ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ



Б1-5-80-413

# ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1980

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

В.М.Лебеденко



# О НЕГРАДУИРОВАННЫХ ПОДАЛГЕБРАХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ. I.



Дубна, 1980

# I. Введение

Настоящая работа может быть полезной для физиков-теоретиков, применяющих теорию супералгебр Ли в своей работе. В ней мы остановимся на некоторых свойствах таких алгебр.

I.I. При изучении супералгебр Ли (см. /2,3,4/ ), как правило, рассматривают их $Z_2$- градуированные подалгебры ( см.п.I.2). Однако, не всякая подалгебра, в обычном смысле этого слова , супералгебры Ли является $Z_2$-градуированной. Например, в любой супералгебре $l(n,n)$ ( см.п.I.2) подалгебра, порожденная элементом

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

не является, как легко проверить, $Z_2$ -градуированной ( здесь $I_n$- единичная $n \times n$ - матрица).

В работе /5/, посвященной свойствам простых супералгебр Ли (см. п.I.2), В.Нам и М.Шойнерт обратили внимание на такие подалгебры.

Ниже нами будет показано, что "почти в каждой" супералгебре Ли есть не $Z_2$ -градуированные подалгебры. Мы покажем, в частности, что всякая супералгебра Ли с ненулевым радикалом и всякая полупростая супералгебра, отличная от супералгебр Ли некоторого специального типа, обладает не $Z_2$-градуированной подалгеброй. Полный перечень результатов и нерешенных пока вопросов мы приведем в пункте 5.

## I.2. Обозначения и терминология

Под $Z_2$ будем понимать кольцо вычетов по модулю $2$, $Z/2Z$, где $Z$ - кольцо целых чисел, с естественными операциями сложения и умножения. Будем писать, что $Z_2$ состоит из элементов $\bar{0}$ и $\bar{1}$, т.е. $Z_2=[\bar{0},\bar{1}]$. $Z_2$ - поле с таблицами сложения и умножения:

$$\begin{aligned} &\bar{0}+\bar{0}=\bar{0} \qquad && \bar{0}\cdot\bar{1}=\bar{0} \\ &\bar{0}+\bar{1}=\bar{1} && \bar{0}\cdot\bar{0}=\bar{0} \\ &\bar{1}+\bar{1}=\bar{0} && \bar{1}\cdot\bar{1}=\bar{1}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будут фигурировать символы типа $(-1)^{\alpha}$, где $\alpha\in Z_2$. Условимся считать, что

$$(-1)^{\bar{0}}=1, \quad (-1)^{\bar{1}}=-1 \quad и \quad (-1)^{\alpha+\beta}=(-1)^{\alpha}(-1)^{\beta}, \quad \alpha,\beta\in Z_2.$$

Через $\{A\}$ будем обозначать подпространство некоторой алгебры, натянутое на ее подмножество $A\neq\varnothing$.

Знак „$\oplus$" будем использовать для обозначения прямой суммы, а знак „$\otimes$" - для обозначения тензорного произведения ( см./I/ ). Произведение (билинейное) в алгебрах будем обозначать с помощью скобок: $[\ ,\ ]$. Будем рассматривать только конечномерные алгебры над полем. ( См. стр.2а).

Пусть $G$ такая алгебра и

$$G=G_{\bar{0}}\oplus G_{\bar{1}}, \quad где$$

$G_{\bar{0}}$ и $G_{\bar{1}}$ -какие-то подпространства $G$. Фиксируем это разложение. Элементы $G$, принадлежащие либо $G_{\bar{0}}$, либо $G_{\bar{1}}$ будем называть <u>однородными</u>.

Все результаты, приведенные ниже, справедливы для алгебр над полем $C$. Леммы 1 и 3 справедливы для любого поля, лемма 2 и предложение I справедливы для любого поля с характеристикой не равной 3, все остальные результаты справедливы для любого алгебраически замкнутого поля характеристики 0.

Алгебру $G$ с таким разложением будем называть супералгеброй если для любых ее однородных элементов $a$ и $b$ выполняются соотношения

$$[a,b] \in G_{\alpha+\beta} \quad \text{при} \quad a \in G_\alpha,\ b \in G_\beta\ (\alpha,\beta \in Z_2) \quad (*)$$

(то есть здесь $[G_\alpha, G_\beta] \subseteq G_{\alpha+\beta}$ ).

Если $G$ – супералгебра, то из свойств $Z_2$ вытекает, например, что $G_{\bar 0}$ является подалгеброй $G$ , $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] \subseteq G_{\bar 1}$ и $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \subseteq G_{\bar 0}$ . Подалгебру $G_{\bar 0}$ называют четной частью супералгебры $G$ , а подпространство $G_{\bar 1}$ - нечетной частью супералгебры $G$ . Иногда применяется обозначение

$$\deg x = \alpha ,$$

если $x \in G_\alpha$ , $\alpha \in Z_2$.

Супералгебра $G$ с фиксированным разложением

$$G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$$

называется супералгеброй Ли, если для любых ее однородных элементов $a, b, c$ выполняются соотношения:

$$[a,b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b,a] \tag{1}$$

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\alpha\beta}[b,[a,c]] \tag{2}$$

(обобщенное тождество Якоби),

где $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$.

Важным примером супералгебр Ли являются супералгебры типа $\ell(m,n)$. Рассмотрим линейное пространство $V$ с фиксированным разложением

$$V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$$

где $V_{\bar 0}$ и $V_{\bar 1}$ какие-то подпространства $V$ размерностей $m$ и $n$ соответственно $(m, n \geqslant 1)$. Алгебра $End\, V$ с естественной операцией умножения матриц $(a, b \to ab)$ является супералгеброй, состоящей из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

(здесь $\alpha - m \times m$, $\beta - m \times n$, $\gamma - n \times m$, $\delta - n \times n$ - матрицы), если считать, что

$$End\, V = (End\, V)_{\bar 0} \oplus (End\, V)_{\bar 1}\,, \quad \text{где}$$

$(End\, V)_{\bar 0}$ состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

а $(End\, V)_{\bar 1}$ из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Алгебра $End\,V$ с выбранным таким образом разложением становится супералгеброй Ли, если ввести в ней новую билинейную операцию $[\ ,\ ]$, для которой на всех однородных элементах выполняются соотношения:

$$[a,b]=ab-(-1)^{(\deg a)(\deg b)}ba \tag{3}$$

Полученная таким образом новая алгебра является, как легко проверить, супералгеброй Ли, которая обозначается через $\underline{l(m,n)}$.

Если $A$ и $B$ супералгебры Ли, то их тензорное произведение $A\otimes B$ определяется следующим образом. На тензорном произведении имодулей $A$ и $B$ ( см. /I/ ) вводится билинейная операция $[\ ,\ ]$, удовлетворяющая требованиям

$$[(a_1\otimes b_1),(a_2\otimes b_2)]=(-1)^{(\deg a_2)(\deg b_1)}[a_1,a_2]\otimes[b_1,b_2]$$

для всех однородных элементов $A$ и $B$, $a_i\in A$, $b_i\in B$ (здесь $[a_1,a_2]$, $[b_1,b_2]$ - произведения в $A$ и $B$ ).$^{x}$

Если $G$ - супералгебра Ли с $G_{\bar 1}=0$, то она является обыкновенной алгеброй Ли в силу тождеств (I) и (2). Такие супералгебры мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Пусть супералгебра Ли $G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$ $^{xx}$ и $A$ ее подалгебра. Будем называть $A$ __$Z_2$-градуированной подалгеброй__ $G$, если

---

xx) Под такой записью здесь и далее будем понимать, что $G_{\bar 0}$ и $G_{\bar 1}$ (соответственно) четная и нечетная части супералгебры $G$.

x) $(A\otimes B)_{\bar 0}=(A_{\bar 0}\otimes B_{\bar 0})\oplus(A_{\bar 1}\otimes B_{\bar 1})$,
$(A\otimes B)_{\bar 1}=(A_{\bar 0}\otimes B_{\bar 1})\oplus(A_{\bar 1}\otimes B_{\bar 0})$.

$$A = A \cap G_{\bar 0} \oplus A \cap G_{\bar 1} \tag{4}$$

В противном случае будем называть подалгебру $A$ <u>не $Z_2$ - градуированной</u> ( в этом случае $G_{\bar 0} \neq 0 \neq G_{\bar 1}$ ; ниже речь пойдет именно о таких супералгебрах Ли).

Пусть $G$ -супералгебра Ли и $A, B \neq \emptyset$ - ее подмножества. Через $[A, B]$ обозначим подпространство $G$, натянутое на все элементы вида $[x, y]$ , где $x \in A$ , $y \in B$

Подалгебру $A$ супералгебры $G$ называют идеалом $G$ , если $[x, A] \subseteq A$ , $[A, x] \subseteq A$ для любого $x \in G$ . Легко показать, что если $A$ и $B$ $Z_2$ -градуированные идеалы супералгебры $G$ то $[A, B]$ – $Z_2$-градуированный идеал $G$ . Пусть теперь

$$G^{(1)} = [G, G],\ G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}], \ldots, G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}], \ldots$$

Если для некоторого $n$ $G^{(n)} = 0$ , то супералгебра Ли $G$ - называется <u>разрешимой.</u> В частности, если $G^{(1)} = 0$, то алгебра $G$ называется <u>абелевой</u>.

Разрешимый $Z_2$-градуированный идеал супералгебры Ли $G$ максимальной размерности называют <u>радикалом</u> этой супералгебры. Легко показать, что радикал содержит всякий $Z_2$ -градуированный разрешимый идеал $G$ . Он обладает тем свойством, что фактор-алгебра $G$ по нему уже не содержит ненулевых разрешимых $Z_2$ -градуированных идеалов. Неабелевы супералгебры Ли, не содержащие ненулевых $Z_2$- градуированных разрешимых идеалов, называют <u>полупростыми</u>. Супералгебра Ли $G$ , $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ называется <u>простой</u>, если она неабелева и не содержит собственных $Z_2$-градуированных идеалов.

Через $\Lambda(n)$ $(n \geqslant 1)$ будем обозначать грассманову алгебру - то есть абелеву супералгебру Ли размерности $n$.

Причем будем считать, что $\Lambda(n) = (\Lambda(n))_{\bar{1}}$

I.3. Две леммы

В дальнейшем нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма I. Пусть $G = G_{\bar{0}} + G_{\bar{1}}$ - супералгебра Ли. Подалгебра $A \subseteq G$ является $Z_2$ -градуированной тогда и только тогда, когда для любого $g \in A$, $g = a + b$, $a \in G_{\bar{0}}$, $b \in G_{\bar{1}}$, выполняются соотношения:

$$a \in A \quad , b \in A . \tag{5}$$

Доказательство. Пусть для любого элемента $g$ подалгебры $A$ выполняются соотношения (5). Тогда, как легко видеть, каждый элемент $A$ представим в виде суммы элементов из $A \cap G_{\bar{0}}$ и $A \cap G_{\bar{1}}$. То есть $A \subseteq A \cap G_{\bar{0}} \oplus A \cap G_{\bar{1}}$, и, следовательно, выполняется соотношение (4).

Пусть теперь, наоборот, для $A$ выполняется соотношение (4): $A = A \cap G_{\bar{0}} \oplus A \cap G_{\bar{1}}$ и $g \in A$, $g = a + b$, $a \in G_{\bar{0}}$, $b \in G_{\bar{1}}$. Следовательно $g = a' + b'$, где $a' \in A \cap G_{\bar{0}}$, $b' \in A \cap G_{\bar{1}}$. Но так как $G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$ - прямое разложение, то получаем, что $a' = a$, $b' = b$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть супералгебра Ли

$$G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}} ,$$

ее элементы $a, b \neq 0$, $a \in G_{\bar{0}}$, $b \in G_{\bar{1}}$ и

1) $[a, b] = 0$

2) $[b, b] \neq ka$, $k \neq 0$ ( элемент $[b,b]$ не кратен $a$ ).

Тогда подалгебра $A$, порожденная элементом $a+b$ равна $\{a+b, [b,b]\}$. Она является абелевой и не $Z_2$-градуированной.

<u>Доказательство</u>. Пусть элементы $a$ и $b$ удовлетворяют условию. Тогда

$$[a+b, a+b] = [a,a] + [a,b] + [b,a] + [b,b] = [b,b],$$

так как $[a,a] = 0$, $[b,a] = -[a,b]$ в силу соотношения (I). Далее $[[b,b],[b,b]] = 0$ (т.к. $[b,b] \in G_{\bar{0}}$, см. (*) ) и $[b,[b,b]] = 0$. Последнее равенство вытекает из тождеств (I) и (2):

$$[b,[b,b]] = [[b,b],b] - [b,[b,b]] = -2[b,[b,b]]$$

Отсюда получаем, что $[a+b, [b,b]] = [b,[b,b]] = 0$

Действительно,

$$[a+b, [b,b]] = [a, [b,b]] + [b, [b,b]].$$

Но из тождества (2) и из условия вытекает, что

$$[a, [b,b]] = [[a,b], b] + [b, [a,b]] = 0$$

так как $[a,b] = 0$.

Аналогично,

$$[[b,b],a+b] = [[b,b],b] = -[b,[b,b]] = 0$$

Отсюда вытекает, что алгебра

$$\{a+b, [b,b]\} -$$

абелева. Покажем, что она совпадает с подалгеброй, порожденной элементом $a+b$, которую будем обозначать через $A$. Подалгебра $A$ является объединением подалгебр $A_n$ ($n=1,2,\ldots$), каждая из которых - линейная оболочка всех элементов, получающихся из $a+b$ применением операции $[\ ,\ ]$ не более $n$ раз.

Итак, $A_1 = \{a+b, [b,b]\}$,

$$A_2 = \{a+b, [b,b], [b,[b,b]], [[b,b],[b,b]]\} = A_1$$

Пусть уже показано, что $A_n = A_1$ $(n \geqslant 2)$. Следовательно

$$A_1 \subseteq A_{n+1} \subseteq \{[A_n, A_n], A_n\} = \{a+b, [b,b], [b,[b,b]], [[b,b],[b,b]]\} = A_1$$

Отсюда видно ( ввиду принципа индукции), что $A_n \equiv A_1$

Следовательно и

$$A = \{a+b, [b,b]\}.$$

Это, как было замечено, абелева подалгебра $G$. В силу условия 2) элемент $a$ не принадлежит $A$. Следовательно, ввиду Утверждения леммы I, подалгебра $A$ не является $Z_2$ -градуированной. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекают некоторые следствия.

Следствие 1. Если $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ $(G_{\bar 0} \neq 0 \neq G_{\bar 1})$ абелева супералгебра Ли, то она обладает не $Z_2$ -градуированной подалгеброй.

Следствие 2 . Если супералгебра Ли $G$ равна прямой сумме своих идеалов $A$ и $B$,

$$G = A \oplus B,$$

$$A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1},\ B = B_{\bar 0} \oplus B_{\bar 1},\ A_{\bar 0} \neq 0 \neq B_{\bar 1},$$

то в ней есть не $Z_2$ -градуированная подалгебра.

Следствие 1 непосредственно вытекает из леммы 2, так как в этом случае для любых двух элементов $x, y \in G$ — $[x, y] = 0$.

Следствие 2 также вытекает из леммы 2, так как по условию $[A, B] = 0$ и $[B, B] \subseteq B$, $A \cap B = 0$.

Переходим к непосредственному рассмотрению нашего вопроса.

2. Случай супералгебр Ли с ненулевыми радикалами. Здесь справедливо следующее

Предположение 1. Любая супералгебра Ли $G$ ($c$ $G_{\bar 0} \neq 0 \neq G_{\bar 1}$ ) с ненулевым радикалом $R$ ( в частности, разрешимая) обладает не $Z_2$ -градуированной подалгеброй.

Доказательство. Пусть супералгебра Ли $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1} \supseteq R$ и радикал $R = R_{\bar 0} \oplus R_{\bar 1}$ , где $R_{\bar 0} = R \cap G_{\bar 0}$, $R_{\bar 1} = R \cap G_{\bar 1}$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

I) $R = R_{\bar 0}$ . Здесь $R_{\bar 0}$ - идеал в $G$ $(R_{\bar 0} \subseteq G_{\bar 0} \neq 0)$

Для любых элементов $a$ и $b$, $a, b \neq 0$, $a \in R_{\bar 0}$, $b \in G_{\bar 1}$ произведение $[a, b] = 0$ . Действительно, так как $[R_{\bar 0}, b] \subseteq R_{\bar 0}$ и $[G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] \subseteq G_{\bar 1}$ ( см. п.I.2), то

$[a,b]\in R_{\bar 0}\cap G_{\bar 1}=0$ . Если размерность $\dim R_{\bar 0}>1$ то можно подобрать такие два элемента $a$ и $b$ , удовлетворяющие указанным условиям, что $[b,b]$ не кратно $a$ . Здесь применима лемма 2. Допустим, что $\dim R_{\bar 0}=1$. Тогда $R_{\bar 0}=\{a\}$ для некоторого элемента $a\neq 0$. Если в $G_{\bar 1}$ есть такой элемент $b$ ,что $[b,b]$ не кратно $a$ , то тут опять применима лемма 2. Остается еще возможность: для любого элемента $x\in G_{\bar 1}, x\neq 0, [x,x]$ кратно $a$ . Отсюда следует, как легко заметить, для любых элементов $x,y\in G_{\bar 1}$ , $[x,y]\in R_{\bar 0}$ ( см. тождество (I) из п.I.2). То есть

$$[G_{\bar 1},G_{\bar 1}]=R_{\bar 0}$$

Далее, так как $[a,G_{\bar 1}],[G_{\bar 1},a]=0$ , то получаем, что $Z_2$ - градуированная подалгебра $\{a,G_{\bar 1}\}$ является разрешимой и не содержится в $R$ . Легко проверить, что это идеал в $G$ . Тут мы приходим к противоречию с тем, что $R$ — радикал $G$ ( см. п.I.2). Поэтому такой вариант отпадает.

2) $R\subseteq G_{\bar 1}$

В этом случае радикал $R$ абелев $([R,R]\subseteq G_{\bar 0}\cap G_{\bar 1})$

Пусть $0\neq a,b$ , $a\in G_{\bar 0}$ , $b\in R$ . Тогда, в силу тождества (I),

$$[a,a]=0\ ,\ [a,b]+[b,a]=0$$

и, следовательно, $[a+b,a+b]=[b,b]=0$

Отсюда получаем, что подпространство $\{a+b\}$ является абелевой не $Z_2$ -градуированной подалгеброй $G$ .

3) $R^{(n)}=0,\ 0\neq R^{(n-1)}\subseteq G_{\bar 1}$ ( $n\geqslant 2$ , см. п.I.2).

Здесь можно поступить также, как и в предыдущем случае.

4) $R^{(n)}=0,\ 0\neq R^{(n-1)}\subseteq G_{\bar 0}$ $(n\geqslant 2)$

Здесь применимы рассуждения из первой части нашего доказательства, если выполняется хотя бы одно из условий

$$\dim R^{(n-1)}>1\ ;$$

$\dim R^{(n-1)}=1$ и в $G_{\bar 1}$ есть такой элемент $b\neq 0$ ; что $[b,b]\bar{\in} R^{(n-1)}$ ;

$\dim R^{(n-1)}=1$ , для любого $b\in G_{\bar 1}$, $[b,b]\in R^{(n-1)}$ и $G_{\bar 1}\not\subset R$

(Здесь получается, что $\{R^{(n-1)}, G_{\bar 1}\}$ - разрешимый $\mathbb{Z}_2$- градуированный идеал, не содержащийся в $R$ ).

Остается рассмотреть случай, когда $\dim R^{(n-1)}=1$, $0\neq[b,b]\in R^{(n-1)}$ для любого $b\in G_{\bar 1}$, и $G_{\bar 1}\subset R$. Здесь можно поступить, как и ранее, взяв некоторый элемент $0\neq b\in G_{\bar 1}$ и $0\neq a\in R^{(n-2)}\setminus R^{(n-1)}$ . Тогда $[a,b]=0$ , так как $R^{(n-2)}$ — идеал в $G$ ( см. п.I.2), и элемент $[b,b]$ не пропорционален $a$ . Тут можно применить лемму 2.

5) $R^{(n)}=0,\ R^{(n-1)}=R_{\bar 0}^{(n-1)}\oplus R_{\bar 1}^{(n-1)},\ R_{\bar 0}^{(n-1)}\neq 0\neq R_{\bar 1}^{(n-1)}$

Здесь $R^{(n-1)}$ -абелева подалгебра $G$ и применимость леммы 2 очевидна. Таким образом, рассмотрев все возможные случаи, мы приходим к выводу, что утверждение предложения I справедливо.

Теперь , в силу полученного результата, остается рассмотреть полупростые супералгебры Ли ( см. п.I.2).

3. Случай полупростых супералгебр Ли

Некоторую информацию о строении полупростых супералгебр Ли дает следующее

Предположение 2. Всякая полупростая супералгебра Ли изоморфна некоторой подалгебре алгебры дифференцирований $\operatorname{der} S$, где

$$S = \bigoplus_{i=1}^{r} (S_i \otimes \Lambda(n_i)), \qquad (6)$$

$r \geq 1$, $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, $S_i$ – простые супералгебры Ли, $\Lambda(n_i)$ – супералгебры Ли Грассмана, содержащей $S$ (см. теорему 6 из /2,3/; здесь под $S_i \otimes \Lambda(0)$ понимается сама алгебра $S_i$).

Из полученных нами ранее результатов вытекает

Предположение 3. Если для полупростой супералгебры Ли в формуле (6) $r \geq 2$, то алгебра $G$ обладает не $Z_2$-градуированной подалгеброй (см. следствие 2, п.I.3). Остается рассмотреть подалгебры из $\operatorname{der} S$, где $S = S' \otimes \Lambda(n)$ ($S'$ - простая супералгебра Ли). В случае $n > 0$ ответ на наш вопрос дает

Предположение 4. Всякая супералгебра Ли, содержащая подалгебру типа $S' \otimes \Lambda(n)$, где $S'$ — простая супералгебра Ли, $n > 0$, обладает не $Z_2$-градуированной подалгеброй.

Доказательство. Пусть супералгебра Ли $G \supseteq S' \otimes \Lambda(n)$, $0 \neq s \in S'_{\bar 0}$, $0 \neq e \in \Lambda(n) = (\Lambda(n))_{\bar 1}$. Тогда при $a = [e \otimes e]$, $b = [s \otimes e]$ будет $[a, b] = 0$ и $[b, b] = 0$ (см. п.I.2):

Действительно:

$$[b,e]=[[s\otimes e],[s\otimes e]]=[s,s]\otimes[e,e]=[s,s]\otimes 0=0,$$

$$[a,e]=[(e\otimes e),(s\otimes e)]=[e,s]\otimes[e,e]=[e,s]\otimes 0=0.$$

Здесь к алгебре $G$ применима лемма 2 ( см. П.I.3). Поэтому наше предложение справедливо.

Теперь осталось рассмотреть полупростые алгебры, содержащиеся в алгебрах $\mathrm{der}\, S$ , где $S$ - простая супералгебра Ли, в частности простые. Ниже мы увидим, что многие простые супералгебры Ли обладают не $Z_2$-градуированными подалгебрами. Полностью этот вопрос нами пока еще не решен.

4. <u>Случай классических супералгебр Ли</u>

Классические супералгебры Ли приведены в работе /2/ . Это супералгебры следующих типов: $A(m,n)$ , $B(m,n)$ , $C(n)$, $D(m,n)$ , $D(2,1,\alpha)$ , $F(4)$ , $G(3)$ , $P(n)$ , $Q(n)$

(Мы рассматриваем только алгебры с $G_{\bar 1}\neq 0$ ). Ниже будет показано, что почти все они обладают не $Z_2$-градуированными подалгебрами.

4.I. <u>Случай алгебр $A(m,n)$ .</u>

Для матрицы

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in \ell(m,n) \qquad \text{(см. п.I.2),}$$

определяется следующим образом суперслед $\mathrm{str}\, g$ :

$$str\,\gamma = tr\,\alpha - tr\,\delta$$

Пусть

$$sl(m,n) = [a \,/\, a \in l(m,n) \,/\, str\,a = 0]$$

Через $\underline{A(m,n)}$ при $m \neq n$, $m,n \geq 0$, обозначают супералгебру Ли

$$sl(m+1,n+1),$$

а через $\underline{A(n,n)}(n>0)$ супералгебру

$$sl(n+1,n+1)/\{I_{2n+2}\}$$

В случае $A(m,n) = sl(m+1,n+1)$ рассмотрим элемент $a \in sl(m+1,n+1)$ вида

$$a = \left(\begin{array}{c|c} \frac{n+1}{m+1} I_{m+1} & \begin{matrix} & 0 \\ 1 & \end{matrix} \\ \hline 0 & I_{n+1} \end{array}\right)$$

(Здесь в нижнем левом углу правой верхней клетки стоит I, а остальные элементы этой клетки равны нулю). Легко показать, что $[a,a] = 0$ ( см. п.I.2). Следовательно, подалгебра $\{a\}$ - не $Z_2$ -градуирована, так как $a \,\bar{\in}\, (A(m,n))_i$, $i \in Z_2$

Рассмотрим случай $A(n,n)$. Как указано выше, $A(n,n) = sl(n+1,n+1)/\{I_{2n+2}\}$ $(n>0)$. Здесь такую же роль, как в предыдущем случае играет образ в указанной фактор-алгебре элемента

$$b = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

где $A \neq 0$ – какая-то $(n \times n)$ недиагональная матрица.

Итак, все алгебры типа $A(m,n)$ обладают не $Z_2$-градуированными подалгебрами.

4.2. <u>Случай алгебр $B(m,n)$.</u>

$B(m,n)$ $(m \geq 0, n > 0)$ – супералгебра Ли $OSP(2m+1,2n)$. Это подалгебра в $l(2m+1,2n)$ специального типа ( см. /2,3/ )

Она содержит элемент

$$b = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_m & 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline A^T & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ \cline{1-3} -A^T & 0 & 0 & & \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, m \\ \}\, 1 \\ \}\, 2n \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} m & m & 1 & n & n \end{array} & \end{array}$$

где $A \neq 0$ некоторая $n \times m$ -матрица. Легко проверить, что $[b,b] = 0$ ( см. п.I.2). Поэтому линейная оболочка элемента $b$ – подалгебра требуемого типа. Таким образом, видно, что все алгебры типа $B(m,n)$ обладают не $Z_2$ -градуированными подалгебрами.

4.3. Случай алгебр $D(m,n)$.

Алгебра $D(m,n)$ $(m \geq 2, n > 0)$ равна $osp(2m,2n)$ (см. /2/ ). Она содержит элемент типа

$$
\begin{array}{c}
\\
b =
\end{array}
\begin{array}{cccc}
m & m & n & n \\
\end{array}
$$

$$
b = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_m & A & 0 \\ \hline A^T & 0 & 0 & 0 \\ \hline -A^T & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \}m \\ \}m \\ \}n \\ \}n \end{array}
$$

где $A \neq 0$ - некоторая $n \times m$ — матрица. Как и в случае 4.2. получаем, что $[b,b]=0$. Следовательно, всякая алгебра типа $D(m,n)$ обладает не $Z_2$ -градуированной подалгеброй.

4.4. Случай алгебр $C(n)$.

Алгебра типа $C(n) = osp(2, 2n-2)$ $(n \geq 2$, см. /2/ ). Здесь можно поступить точно так же, как и в случае 4.3 $(m=1, n \leftrightarrow n-1)$. Отсюда вытекает, что алгебры этого типа обладают не $Z_2$ -градуированными подалгебрами.

4.5. Случай алгебр $P(n)$.

Алгебра типа $P(n)$ содержится в $sl(n+1,n+1)$ $(n \geq 2)$ и состоит из всех матриц вида

$$
\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^T \end{array}\right)
$$

где $tr\, a = 0$ , $b$ - симметрическая, а $c$ — кососимметрическая матрица. Здесь для любого элемента вида

$$d = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & -a^T \end{array}\right),$$

где $a, b \neq 0$, $[d,d]=0$.

Отсюда видно, что во всякой супералгебре Ли типа $P(n)$ есть не $Z_2$ -градуированная подалгебра.

4.6 . Случай алгебр $Q(n)$. Любая алгебра типа $Q(n)$ $(n \geq 2)$ является фактор-алгеброй $\tilde{Q}(n)/\{I_{2n+2}\}$, где $\tilde{Q}(n)$ - подалгебра $sl(n+1,n+1)$, состоящая из всех матриц вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right)$$

с $tr\, b = 0$. Как и в предыдущем случае, в $Q(n)$ можно выбрать элемент $c$ вида

$$c = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right), \quad \text{где}$$

$$b = \left(\begin{array}{cc} & \overbrace{\phantom{0}}^{n+1} \\ & 0 \\ 1 & \end{array}\right)\Big\}n+1$$

(здесь в нижнем левом углу стоит I, а в остальных местах нули).

Легко проверяется, что $[c,c]=0$ и образ $c$ в $Q(n)$ не равен нулю. Теперь мы видим, что все алгебры типа $Q(n)$ обладают не $Z_2$ -градуированными подалгебрами.

4.7. Случай алгебр $G(3)$ и $F(4)$.

Алгебра $G(3)$ имеет размерность 3I, а алгебра $F(4)$ - 40 ( см. /2/ ). Размерность $(G(3))_{\bar 0}$ равна I7, а $dim(F(4))_{\bar 0}=24$. Следовательно, $dim(G(3))_{\bar 1}=$ I4, а $dim(F(4))_{\bar 1}=$ I6.

Далее нам понадобится

Лемма 3. Если суперал гебра Ли $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$,

$G_{\bar 0}, G_{\bar 1} \neq 0$ и $\dim G_{\bar 0} \geq \dim G_{\bar 1} + 2$,

то для любого $b$, $0 \neq b \in G_{\bar 1}$ в $G_{\bar 0}$ есть такие линейно независимые элементы $c_1$ и $c_2$, что

$$[c_1, b] = [c_2, b] = 0 .$$

Доказательство. Пусть $0 \neq b \in G_{\bar 1}$ и $[a_i]_{i=1}^{n}$ $(n = \dim G_{\bar 0})$ - некоторый базис $G_{\bar 0}$.
Тогда, в силу условия, множество $B = [[a_i, b]]_{i=1}^{n}$ не является линейно независимым в $G_{\bar 1}$ $(\dim G_{\bar 1} \leq n-2)$.
Более того, существует такое линейно независимое подмножество $B' \subseteq B$, $1 \leq \dim B' \leq \dim G_{\bar 1}$, и такие элементы $[a_{i_1}, b]$ и $[a_{i_2}, b]$, что

$$[a_{i_1}, b] = \sum_{j=3}^{m+2} l_j [a_{i_j}, b] ,$$

$$[a_{i_2}, b] = \sum_{j=3}^{m+2} l'_j [a_{i_j}, b] ,$$

где $m = \dim B'$ и все $[a_{i_j}, b] \in B'$ при $j = 3, \dots, m+2$.

Отсюда мы получаем, что

$$\left[a_{i_1} - \sum_{j=3}^{m+2} l_j a_{i_j} , b\right] = \left[a_{i_2} - \sum_{j=3}^{m+2} l'_j a_{i_j} , b\right] = 0 .$$

Пусть $c_1 = a_{i_1} - \sum_{j=3}^{m+2}{}' \ell_j a_{ij}$, $c_2 = a_{i_2} - \sum_{j=3}^{m+2}{}' \ell_j' a_{ij}$

Эти элементы линейно независимы, так как $[a_i]_{i=1}^{n}$ — базис $G_{\bar 0}$. Кроме того, мы уже показали, что

$$[c_1, \ell] = [c_2, \ell] = 0$$

Лемма доказана.

Следствие 3. Если супералгебра Ли $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$, $G_{\bar 0}, G_{\bar 1} \neq 0$ и $\dim G_{\bar 0} \geqslant \dim G_{\bar 1} + 2$, то в алгебре $G$ есть не $Z_2$ -градуированная подалгебра (см. лемму 2 из п.I.3).

Следствие 4. Супералгебры Ли $G(3)$ и $F(4)$ обладают не $Z_2$ -градуированными подалгебрами.

5. Заключение

Подведем итоги наших рассмотрений. Напомним, что мы рассматриваем только супералгебры с ненулевыми четными и нечетными частями. Выше показано, что

I) любая супералгебра Ли с ненулевым радикалом ( в частности разрешимая) обладает не $Z_2$ -градуированной подалгеброй ( см. п.2, предложение 1 )

2) любая полупростая супералгебра Ли,не являющаяся подалгеброй алгебры дифференцирований $S$, содержащей $S$, где $S$ - простая супералгебра Ли типа $\mathcal{D}(2,1,\alpha)$ или картановского типа ( см. /2/) обладает не $Z_2$ -градуированной подалгеброй ( см. п.3 и п.4 )

Остается рассмотреть случай $\mathcal{D}'(2,1,\alpha)$ и случаи алгебр картановского типа .

В заключение автор приносит глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, Г.Тодоровой, Е.А.Иванову, П.Экснеру, А.С.Сорину за интерес к работе и полезные советы.

## Литература

I. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. "Наука, М., 1970.

2. Kac V.G. Lie Superalgebras. Adv.Math., 26, 1977, p.8-96.

3. Kac V.G. A Sketch of Lie Superalgebras Theory. Commun.Math. Phys., 1977, 53, p.31-64.

4. Лейтес. Д.А. Введение в теорию супермногообразий. УМН, т.35, вып.I, 1980, с.3-56.

5. Nahm W., Scheunert M. On the structure of simple pseudo Lie algebras and their invariant bilinear forms. Journal Of Mathematical Physics, vol. 17, N 6, 1976, p.868-879.