Лебеденко В.М.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-5-7346

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1973

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

В.М.Лебеденко

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ
С НЕПРИВОДИМЫМИ СИСТЕМАМИ ОБРАЗУЮЩИХ

Дубна 1973

Система образующих $\mathcal{D}$ абелевой группы G ($G=\{\mathcal{D}\}$) называется неприводимой системой образующих (н.с.о.), если она не содержит ни одной истинной подсистемы, порождающей G. Известны многие виды абелевых групп, как обладающих, так и не обладающих н.с.о. (см. /3-6/). Периодические абелевы группы, обладающие н.с.о. изучались в работе Кхаббаза /5/. В работе Сойфера /6/ показано, что любая абелева группа вложима, в качестве прямого слагаемого, в некоторую равномощную абелеву группу, обладающую н.с.о.

В настоящей работе рассматриваются произвольные абелевы группы, обладающие н.с.о. Получены некоторые необходимые и достаточные условия, при которых абелева группа обладает н.с.о.

Далее всюду под группами будем подразумевать абелевы группы. Через $\bar{f}$ будем обозначать образ элемента f группы G в фактор-группе $\bar{G}=G/A$. Символ „$\subset$" будет применяться для строгого вложения подмножеств, в отличие от „$\subseteq$". При обозначении прямой суммы групп мы используем знаки „$+$" и „$\sum$".

I. О гомоморфных образах абелевых групп, обладающих н.с.о.

Лемма. Если $\mathcal{D}$ - н.с.о. группы G, то для любой подсистемы $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$, $\overline{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0}$ - н.с.о. фактор-группы $\bar{G}=G/\{\mathcal{D}_0\}$.

Доказательство. Группа $\bar{G} = G/\{\mathcal{D}_0\} = \{\overline{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0}\}$, так как $G = \{\mathcal{D}\}$ и $\mathcal{D} = (\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0)\cup\mathcal{D}_0$. Если для некоторого $f \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0$ $\bar{f} \in \{(\overline{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0})\setminus(\bar{f})\}$, то $f \in \{\mathcal{D}\setminus(f)\}$. Этого не может быть, поскольку $\mathcal{D}$ - н.с.о. G. Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема I. Расширение конечнопорожденной группы A с помощью некоторой группы B обладает н.с.о. тогда и только тогда, когда B обладает н.с.о. (Доказательство этой теоремы приведено в работе /6/).

Теорема 2. Если группа G обладает бесконечной н.с.о., то существуют такие группы A и B, $|A| = |B|$, обладающие бесконечными н.с.о., что G является расширением A с помощью B.

Доказательство. Чтобы получить требуемое утверждение, достаточно положить в лемме, что

$$|G| = |\mathcal{D}| = |\mathcal{D}_0| = |\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0|.$$

Теорема 3. Если группа G является расширением подгруппы A с помощью полной группы $B \neq 0$, то, при выполнении одного из следующих условий, она не обладает непроводимой системой образующих:

I) A - группа с конечным числом образующих:

2) $|B| > |A|$.

Доказательство. Допустим, что группа G удовлетворяет одному из условий I), 2) теоремы и имеет н.с.о. $\mathcal{D}$. Тогда подгруппа A должна обладать системой образующих M, мощности которой меньше $|\mathcal{D}|$ $(|\mathcal{D}| \geq \aleph_0)$. Из $\mathcal{D}$ можно выделить такую подсистему $\mathcal{D}_0$, что

$$\{\mathcal{D}_0\} \supseteq \{M\} = A \quad и \quad |\mathcal{D}_0| < |\mathcal{D}|,$$

так как каждый элемент M является линейной комбинацией некоторого конечного подмножества $\mathcal{D}$.

Так как $|\mathcal{D}_0|<|\mathcal{D}|$, то

$$A \subseteq \{\mathcal{D}_0\} \subset \{\mathcal{D}\} = G.$$

В силу леммы, фактор-группа $G/\{\mathcal{D}_0\}\neq 0$ должна обладать н.с.о. Но этого не может быть, поскольку

$$G/\{\mathcal{D}_0\} \cong (G/A)/(\{\mathcal{D}_0\}/A) \text{ —}$$

- ненулевая полная группа. А такие группы не обладают н.с.о. (см. /3/). Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

2. О расширениях, с помощью периодических групп, обладающих н.с.о.

Приведем без доказательства теорему, принадлежащую Кхаббазу /5/.

Теорема 4. Пусть T - периодическая абелева группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

I) T обладает н.с.о.;

2) T имеет ту же мощность, что и ее базисная подгруппа;

3) T обладает прямым слагаемым, которое является прямой суммой циклических групп и имеет ту же мощность, что и T.

Под базисной подгруппой непримарной периодической группы здесь подразумевается прямая сумма базисных подгрупп всех ее примарных компонент.

Из теорем I,3 и 4 вытекает ряд следствий.

Следствие I. Счетная периодическая группа обладает н.с.о. тогда и только тогда, когда ранг ее редуцированной части бесконечен.

Следствие 2. Непериодическая группа конечного свободного ранга обладает н.с.о. тогда и только тогда, когда является расширением свободной группы конечного ранга с помощью периодической группы, обладающей н.с.о.

Следствие 3. Группа без кручения конечного свободного ранга не обладает н.с.о. тогда и только тогда, когда она является расширением свободной группы того же ранга с помощью ненулевой периодической полной группы.

Перейдем к следующему утверждению.

Теорема 5. Любое расширение периодической группы с помощью периодической группы большей или равной мощности, обладающей неприводимой системой образующих, имеет н.с.о.

Доказательство. Предположим, что периодическая группа G удовлетворяет условию теоремы, то есть G содержит подгруппу A, G/A обладает неприводимой системой образующих и $|G/A| \geqslant |A|$. Естественно предположить, что $|G/A| \geqslant \aleph_0$ и, следовательно, $|G/A| = |G|$. Допустим, что G не обладает неприводимой системой образующих. Тогда, в силу теоремы 5, группа G имеет базисную подгруппу B с $|B| < |G| = |G/A|$. Далее, фактор-группа

$$(G/A)/(\{B,A\}/A) \cong G/\{B,A\} \cong (G/B)/(\{B,A\}/B)$$

является полной. Так как

$$|\{B,A\}/A| \leqslant |B| < |G/A|$$, то

$$|\{B,A\}/A| < |(G/A)/(\{B,A\}/A)|.$$

Следовательно, группа G/A , как расширение $\{B,A\}/A$ с помощью полной группы большей мощности, не должна обладать неприводимой системой образующих (см. теорему 3). Таким образом, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

3. О сервантных расширениях с помощью групп, обладающих н.с.о.

Теорема 6. Если подгруппа A сервантна в группе G , G/A обладает бесконечной неприводимой системой образующих, $|G/A| \geqslant |A|$, то G обладает неприводимой системой образующих.

Доказательство. Ввиду теорем I и 5, можно рассмотреть только случай, когда G - непериодическая группа и A не обладает конечной системой образующих $(|A| \geqslant \aleph_0)$. Пусть $G/A=\{\bar{\mathcal{D}}\}$ и $\bar{\mathcal{D}}=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ - неприводимая система образующих. Через $\bar{\mathcal{D}}_1 \supseteq \emptyset$ обозначим совокупность всех элементов конечного порядка системы $\bar{\mathcal{D}}$, $\bar{\mathcal{D}}_1=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1}$. Если $\bar{\mathcal{D}}\setminus\bar{\mathcal{D}}_1$ содержит хотя бы одну конечную линейно зависимую подсистему, то можно построить семейство $[\bar{\mathcal{D}}_\mu]_{\mu\in M}$ непересекающихся конечных линейно зависимых подсистем $\bar{\mathcal{D}}_\mu \subseteq \bar{\mathcal{D}}\setminus\bar{\mathcal{D}}_1$, причем, максимальное, с этими свойствами. Пусть $\bar{\mathcal{D}}_2=\bigcup_{\mu\in M}\bar{\mathcal{D}}_\mu$ или $\bar{\mathcal{D}}_2=\emptyset$, если $\bar{\mathcal{D}}\setminus\bar{\mathcal{D}}_1$ - линейно незавксема. Итак, если $\bar{\mathcal{D}}_2 \neq 0$, то $\bar{\mathcal{D}}_2=\bigcup_{\mu\in M}\bar{\mathcal{D}}_\mu \subseteq \bar{\mathcal{D}}\setminus\bar{\mathcal{D}}_1$, $1<|\bar{\mathcal{D}}_\mu|<\aleph_0$, $\bar{\mathcal{D}}_{\mu_1}\cap\bar{\mathcal{D}}_{\mu_2}=\emptyset$ при $\mu_1\neq\mu_2$. Если $\bar{\mathcal{D}}_\mu=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_\mu}$, $\mu\in M$, то для некоторых целых чисел k_λ ,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} k_\lambda \bar{f}_\lambda = \bar{0} .$$

Можно считать, что все $k_\lambda \neq 0$. Для любого $\lambda \in \Lambda_\mu$, $|k_\lambda| > 1$, так как $\bar{f}_\lambda$ - элементы неприводимой системы образующих. Через d_μ обозначим наибольший общий делитель чисел k_λ , $\lambda \in \Lambda_\mu$. Если G/A - группа без кручения, то всегда можно выбрать такие k_λ , $\lambda \in \Lambda_\mu$, что $d_\mu = 1$. В общем случае этого утверждат нельзя.

Система $\bar{\mathcal{D}}$ должна удовлетворять одному из следующих условий:

а) $|\bar{\mathcal{D}}_1| = |G/A|$

в) $|\bar{\mathcal{D}}_2| = |G/A|$

с) $|\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2| < |G/A|$

Если $\bar{\mathcal{D}}$ удовлетворяет условию с), то система $\bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2)$ линейно независима в смысле свободного ранга. Это следует из построения $\bar{\mathcal{D}}_2$. Если, кроме того, $\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 \neq \varnothing$, то найдется такое подмножество $\bar{\mathcal{D}}_3 \subset \bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2)$, что

$$\{\bar{\mathcal{D}}_3\} \geq \{\bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2)\} \cap \{\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2\}$$

и

$$|\bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_3)| = |G/A| ,$$

так как $|\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2| < |G/A|$. При $\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 = \varnothing$ будем считать, что $\bar{\mathcal{D}}_3 = \varnothing$.

В силу этого, для любого элемента $\bar{f}_\lambda \in \bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_3)$ выполняется соотношение:

$$\{\bar{f}_\lambda\} \cap \{\bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{f}_\lambda)\} = \bar{0} \qquad \text{(I)}$$

(то есть $(G/A)/\{\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_3\}$ - свободная группа).
Поскольку $|G/A| \geqslant |A|$, можно выделить подмножество $\bar{\mathcal{D}}_4 \subset \bar{\mathcal{D}} \setminus (\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \bar{\mathcal{D}}_2 \cup \bar{\mathcal{D}}_3)$ мощности $|A|$, элементы которого также удовлетворяют соотношениям (I). Пусть $\bar{\mathcal{D}}_4 = [\bar{f}_\lambda]_{\lambda \in \Lambda_4}$ и, при каждом $\lambda \in \Lambda_4$,

$$\bar{b}_\lambda = 2\bar{f}_\lambda \quad , \quad \bar{c}_\lambda = 3\bar{f}_\lambda \ .$$

Тогда, при $\bar{B} = [\bar{b}_\lambda]_{\lambda \in \Delta_4}$, $\bar{C} = [\bar{c}_\lambda]_{\lambda \in \Delta_4}$, система $\bar{B} \cup \bar{C} \cup (\bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}_4)$ порождает G/A и неприводима, в силу соотношений (I). Элементы $\bar{b}_\lambda$ и $\bar{c}_\lambda$, $\lambda \in \Delta_4$, удовлетворяют соотношениям

$$3\bar{b}_\lambda - 2\bar{c}_\lambda = 0$$

Поскольку A сервантна в G , можно выбрать такие представители $b_\lambda \in \bar{b}_\lambda$, $c_\lambda \in \bar{c}_\lambda$, $\lambda \in \Delta_4$, для которых в G выполняются соотношения

$$3b_\lambda - 2c_\lambda = 0$$

Пусть $A = \{[a_\lambda]_{\lambda \in \Delta_4}\} \, (|\Delta_4| = |A|)$ и, при каждом $\lambda \in \Delta_4$,

$$b'_\lambda = b_\lambda + a_\lambda \quad , \quad c'_\lambda = c_\lambda + a_\lambda$$

Тогда

$$\begin{gathered} 3b'_\lambda - 2c'_\lambda = a_\lambda , \\ b'_\lambda \in \bar{b}_\lambda , \ c'_\lambda \in \bar{c}_\lambda \quad (\lambda \in \Delta_4) . \end{gathered} \tag{2}$$

Выберем некоторые представители $f_\lambda \in \bar{f}_\lambda$, при $\lambda \in \Delta \setminus \Delta_4$. При $B = [b'_\lambda]_{\lambda \in \Delta_4}$, $C = [c'_\lambda]_{\lambda \in \Delta_4}$, система

$$B \cup C \cup [f_\lambda]_{\lambda \in \Delta \setminus \Delta_4}$$

неприводима, поскольку состоит из представителей неприводимой системы образующих G/A , и порождает G , так как $\{B \cup C\} \supset A$ ввиду соотношений (2).

Теперь рассмотрим случай, тогда система образующих $\bar{\mathcal{D}}$ удовлетворяет условию в). То есть, $\bar{\mathcal{D}} \supseteq \bar{\mathcal{D}}_2 = \bigcup_{\mu \in M} \bar{\mathcal{D}}_\mu$,

$$|M| = |G/A| \ , \quad \bar{\mathcal{D}}_\mu = [\bar{f}_\lambda]_{\lambda \in \Delta_\mu} \ ,$$

$$\sum_{\lambda \in \Delta_\mu} k_\lambda \bar{f}_\lambda = \bar{0} \ .$$

Построим неприводимую систему образующих G при дополнительном условии, состоящем в том, что

$$\overline{\mathcal{D}}_2 \supseteq \overline{\mathcal{D}}(m) = \bigcup_{\mu \in M(m)} \mathcal{D}_\mu \quad , \quad |\overline{\mathcal{D}}(m)| = |A| \; ,$$

$$d_\mu = m \text{ для любого } \mu \in M(m) \, .$$

Это условие всегда выполняется, если G/A – без кручения $(d_\mu = 1)$, а также, при $|G/A| > \aleph_0$. Для некоторых представителей $f_\lambda \in \bar{f}_\lambda$, $\lambda \in \Delta_\mu$, $\mu \in M(m)$, выполняются соотношения

$$\sum_{\lambda \in \Delta_\mu} k_\lambda f_\lambda = 0 \; ,$$

так как A сервантна в G. Выберем для каждого $\mu \in M(m)$ такие l_λ $(\lambda \in \Delta_\mu)$, что

$$\sum_{\lambda \in \Delta_\mu} k_\lambda l_\lambda = d_\mu = m$$

и элементы $a_\mu \in A$ так, чтобы $A = \{[a_\mu]_{\mu \in M(m)}\}$. Для $\lambda \in \Delta \setminus \bigcup_{\mu \in M(m)} \Delta_\mu$ выберем произвольные представители $f_\lambda \in \bar{f}_\lambda$, а при $\mu \in M(m)$, для $\lambda \in \Delta_\mu$ положим $f'_\lambda = f_\lambda + l_\lambda a_\mu$. Тогда $\sum_{\lambda \in \Delta_\mu} k_\lambda f'_\lambda = m a_\mu \quad (\mu \in M(m))$.

Поэтому система $\mathcal{D} = \left([f'_\lambda]_{\lambda \in \bigcup_{\mu \in M(m)} \Delta_\mu} \right) \cup \left([f_\lambda]_{\lambda \in \Delta \setminus \bigcup_{\mu \in M(m)} \Delta_\mu} \right)$ неприводима и $mA \subseteq \{\mathcal{D}\}$. Если $m=1$, то это – система образующих группы G x/.

---

x/ Отсюда видно, что если G/A – без кручения, то группа G обладает неприводимой системой образующих, состоящей из представителей неприводимой системы образующих G/A. В этом случае система должна удовлетворять одному из условий в) и с).

Если $m>1$ и $mA\neq A$, то можно построить неприводимую систему образующих G, содержащую $\mathcal{D}$. Если $\{\mathcal{D}\}\neq G$, то фактор-группа $G/\{\mathcal{D}\}$ обладает неприводимой системой образующих $\bar{E}=[\bar{e}_t]_{t\in T}$, так как $m(G/\{\mathcal{D}\})=0$. Выберем представители $e_t\in\bar{e}_t\ (t\in T)$, $[e_t]_{t\in T}=E$. Можно считать, чт все $e_t\in A$, поскольку $G=\{A,\mathcal{D}\}$. Множество $E\cup\mathcal{D}$ является, очевидно, неприводимой системой образующих группы G. Подсистема $\bar{\mathcal{D}}_2$ может не удовлетворять нашему дополнительному предположению только в счетном случае, который мы рассмотрим позднее.

Рассмотрим случай, когда система $\bar{\mathcal{D}}$ удовлетворяет условию а), то есть, $|\bar{\mathcal{D}}_1|=|G/A|$. Воспользуемся сервантностью A в G и выберем такие представители $f_\lambda\in\bar{f}_\lambda$, $\lambda\in\Lambda_1$, $(\bar{\mathcal{D}}_1=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1})$, что $o(f_\lambda)=o(\bar{f}_\lambda)$. Если $\bar{\mathcal{D}}_1$ содержит подмножество $\bar{\mathcal{D}}_1(n)=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1(n)}$, $|\bar{\mathcal{D}}_1(n)|=|A|$, все элементы которого имеют конечный порядок n (это заведомо будет при $|G/A|>\aleph_0$), то, при $f'_\lambda=f_\lambda+a_\lambda$, $\lambda\in\Lambda_1(n)$, $\mathcal{D}_1(n)=[f'_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1(n)}$, $\{[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1(n)}\}=A$, выполняется соотношение

$$\{\mathcal{D}_1(n)\}\supset nA$$

Далее, можно получить систему $\mathcal{D}\supset\mathcal{D}_1(n)$, $\{\mathcal{D}\}\supset nA$, состоящую из представителей $\bar{\mathcal{D}}$, и, поступив как в предыдущем случае, построить неприводимую систему образующих группы G.

Будем теперь считать, что $|\bar{\mathcal{D}}_1|=|G/A|=|A|=\aleph_0$.

В этом случае нельзя гарантировать существование множества типа $\bar{\mathcal{D}}_1(n)\subseteq\bar{\mathcal{D}}_1$. Здесь мы поступим иначе. Пусть $\bar{\mathcal{D}}_1=\bar{\mathcal{D}}_{11}\cup\bar{\mathcal{D}}_{12}$, $\bar{\mathcal{D}}_{11}\cap\bar{\mathcal{D}}_{12}=\varnothing$, $|\bar{\mathcal{D}}_{11}|=|\bar{\mathcal{D}}_{12}|=\aleph_0$, $\bar{\mathcal{D}}_{11}=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_{11}}$, $\bar{\mathcal{D}}_{12}=[\bar{f}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_{12}}$ и $A=[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_{11}}$. Так как порядки $o(\bar{f}_\lambda)=n_\lambda$, $\lambda\in\Lambda_1$, элементов $\bar{\mathcal{D}}_1$ конечны, то для всех $\lambda\in\Lambda_{11}\subset\Lambda_1$ можно выбрать такие $f_\lambda\in\bar{f}_\lambda$, что при $f'_\lambda=f_\lambda+a_\lambda$,

$$n_\lambda g_\lambda' = n_\lambda a_\lambda .$$

Для остальных $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{11}$ выберем произвольные представители $g_\lambda \in \bar{g}_\lambda$. Пусть $\mathcal{D}_{11} = [g_\lambda']_{\lambda \in \Lambda_{11}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{11} \cup [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{11}}$, $\mathcal{D}_{12} = [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda_{12}} \subset \mathcal{D}$. Элементы $\mathcal{D}_{12}$ удовлетворяют соотношениям

$$n_\lambda g_\lambda \in \langle A \rangle \quad (\lambda \in \Lambda_{12}) .$$

Система $\mathcal{D}$ неприводима. Если $\langle \mathcal{D} \rangle \neq G$, то фактор-группа

$$\tilde{G} = G / \langle \mathcal{D}_{11} \cup (\mathcal{D} \setminus (\mathcal{D}_{11} \cup \mathcal{D}_{12})) \rangle$$

является периодической. Действительно, она порождается образами A и $\mathcal{D}_{12}$ —

$$\tilde{G} = \langle \tilde{A}, \tilde{\mathcal{D}}_{12} \rangle$$

Для любого элемента $\tilde{g}_\lambda \in \tilde{\mathcal{D}}_{12}$, $n_\lambda \tilde{g}_\lambda \in \tilde{A}$. Группа $\tilde{A}$ -периодическая, как гомоморфный образ $A / (A \cap \langle \mathcal{D}_{11} \rangle)$. Более того, периодическая группа $\tilde{G}$ является расширением своей подгруппы $\tilde{A}$ с помощью равномощной группы, обладающей неприводимой системой образующих. Поэтому $\tilde{G}$, ввиду теоремы 5, обладает некоторой неприводимой системой образующих $\tilde{H} = [\tilde{h}_i]_{i \in J}$. Для каждого $i \in J$ можно выбрать такой элемент $h_i \in \tilde{h}_i$, что $h_i \in \langle A, \mathcal{D}_{12} \rangle$. При $H = [h_i]_{i \in J}$, множество $H \cup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{12})$ является неприводимой системой образующих группы G .

Теперь, поскольку построения в случае с) справедливы и при $|G/A| = \aleph_0$, нам остается рассмотреть систему $\bar{\mathcal{D}}$, удовлетворяющую условию в) при $|G/A| = \aleph_0$. Итак $\bar{\mathcal{D}} \supseteq \bar{\mathcal{D}}_2 = \bigcup_{\mu \in M} \bar{\mathcal{D}}_\mu$, $|M| = \aleph_0$. Пусть $\bar{\mathcal{D}}_{21} \cup \bar{\mathcal{D}}_{22} \subset \bar{\mathcal{D}}_2$, $\bar{\mathcal{D}}_{21} \cap \bar{\mathcal{D}}_{22} = \varnothing$, $|\bar{\mathcal{D}}_{21}| = |\bar{\mathcal{D}}_{22}| = \aleph_0$, $\bar{\mathcal{D}}_{21} = \bigcup_{\mu \in M_1} \bar{\mathcal{D}}_\mu$, $\bar{\mathcal{D}}_{22} = \bigcup_{\mu \in M_2} \bar{\mathcal{D}}_\mu$. Для каждого $\mu \in M_1 \cup M_2$ выберем элементы $g_\lambda \in \bar{g}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda_\mu)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} k_\lambda g_\lambda = 0$$

Пусть $A=[a_\mu]_{\mu\in M_1}$. Элементы f_λ, $\lambda\in\Lambda_\mu$, $\mu\in M_1$, заменим на $f'_\lambda=f_\lambda+l_\lambda a_\mu$, где l_λ - некоторые числа, удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} k_\lambda l_\lambda = d_\mu \quad , \mu\in M_1 .$$

Новые элементы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} k_\lambda f'_\lambda = d_\mu a_\mu \quad , \mu\in M_1 .$$

Пусть $\mathcal{D}_{21}=[f'_\lambda]_{\lambda\in\bigcup_{\mu\in M_1}\Lambda_\mu}$. Ясно, что $A/(A\cap\{\mathcal{D}_{21}\})$ - периодическая группа. Поскольку $|\bar{\mathcal{D}}_\mu|>1$ $(\mu\in M)$, то, для каждого $\mu\in M_2$, множества Λ_μ можно представить в виде $[\lambda(\mu),\Lambda'_\mu]$, где $|\Lambda'_\mu|\geqslant 1$, $\lambda(\mu)\bar{\in}\Lambda'_\mu$. Отсюда, при $\mathcal{D}'_\mu=[f_\lambda]_{\lambda\in\Lambda'_\mu}$, $0\neq k_{\lambda(\mu)}f_{\lambda(\mu)}\in\{\mathcal{D}'_\mu\}$. Выберем некоторые представители $f_\lambda\in\bar{f}_\lambda$ для всех $\lambda\in\Lambda\setminus(\bigcup_{\mu\in M_1\cup M_2}\Lambda_\mu)$ и образуем множество $S=[f_\lambda]_{\lambda\in\Lambda\setminus\bigcup_{\mu\in M_1\cup M_2}\Lambda_\mu}$. Через K обозначим $[f_{\lambda(\mu)}]_{\mu\in M_2}$. Система $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{21}\cup K\cup(\bigcup_{\mu\in M_2}\mathcal{D}'_\mu)\cup S$ неприводима. Если $\{\mathcal{D}\}\neq G$, то $\tilde{G}=G/\{\mathcal{D}\setminus K\}=\{\tilde{A},\tilde{K}\}$ периодическая счетная группа, являющаяся расширением подгруппы $\tilde{A}$ с помощью счетной группы, обладающей неприводимой системой образующих. Мы пришли к уже рассмотренному выше случаю. Поэтому, здесь, также, можно построить неприводимую систему образующих группы G.

Таким образом, доказательство теоремы закончено.

Из теоремы 6 вытекает ряд важных следствий.

Следствие 4. Группа G, разложимая в прямую сумму

$$G=A+B$$

имеет н.с.о., если B имеет бесконечную н.с.о. и $|B|\geqslant|A|$.

Следствие 5. Если группа G не имеет н.с.о., то она не содержит ни одного равномощного прямого слагаемого, обладающего бесконечной н.с.о.

4. Расширения с помощью групп большей мощности, обладающих н.с.о.

При $|B|>|A|$ любое расширение группы A с помощью группы B, обладающей н.с.о., обладает н.с.о.

Более того, справедливо следующее утверждение:

Теорема 7.

При $|B|>|A|$, расширение группы A с помощью группы B обладает неприводимой системой образующих тогда и только тогда, когда B обладает неприводимой системой образующих.

Доказательство.

Предположим сначала, что группа B обладает неприводимой системой образующих. Пусть группа $G \supset A$, $G/A \cong B$ и $\bar{\mathcal{D}} = [\bar{f}_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ - неприводимая система образующих G/A. Мы будем рассматривать только случай, когда $|B| > \aleph_0$, так как $|B|>|A|$, а при $|A| < \aleph_0$ к G применима теорема I.

Для всех $\lambda \in \Lambda$ выберем представители $f_\lambda \in \bar{f}_\lambda$, и из них образуем систему $\mathcal{D} = [f_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$. Она неприводима. И если $\{\mathcal{D}\} = G$, то это требуемая система образующих. Пусть $\{\mathcal{D}\} \neq G$. Так как $|\mathcal{D}| = |B| > |A|$, то существует такая подсистема $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, что $\{\mathcal{D}_0\} \supseteq \{\mathcal{D}\} \cap A$ и $|\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0| = |\mathcal{D}|$.

Фактор-группа

$$G/\{\mathcal{D}_0\} = \{A, \mathcal{D}_0\}/\{\mathcal{D}_0\} + \{\mathcal{D}\}/\{\mathcal{D}_0\}$$

имеет неприводимую систему образующих в силу следствия 4, так как ее прямое слагаемое $\{\mathcal{D}\}/\{\mathcal{D}_0\}$ имеет неприводимую систему образующих (см. лемму   ) и его мощность больше мощности дополнительного прямого слагаемого. Обозначим через $\tilde{H} = [\tilde{h}_\mu]_{\mu \in M}$ некоторую неприводимую систему образующих $G/\{\mathcal{D}_0\}$. Для каждого $\mu \in M$ можно выбрать представитель

$h_\mu \in \hat{h}_\mu$, $h_\mu \in \{A, (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0)\}$, поскольку $G = \{A, \mathcal{D}\}$ и $\mathcal{D}_0 < \mathcal{D}$. При $H = [h_\mu]_{\mu \in M}$, система

$$C = H \cup \mathcal{D}_0$$

порождает G и является неприводимой, благодаря выбору элементов H . Итак, одно утверждение теоремы доказано. Предположим теперь, что группа B не обладает неприводимой системой образующих. Пусть группа $G \supset A$, $G/A \cong B$ и $|A| < |B|$. Покажем, что группа G не обладает неприводимой системой образующих. Допустим, что $G = \{C\}$ и C неприводима. Тогда можно выделить некоторое подмножество $C_0 \subset C$, $\{C_0\} \supseteq A$, $|C_0| < |B|$. Фактор-группа $G/\{C_0\}$ обладает неприводимой системой образующих (см. лемму) и

$$G/\{C_0\} \cong (G/A)/(\{C_0\}/A)$$

Отсюда следует, что группа B , как расширение своей подгруппы с помощью группы большей мощности, обладающей н.с.о., должна обладать н.с.о. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Литература

I. А.Г.Курош. Теория групп. Наука, Москва, I967.

2. L.Fuchs. Abelian groups. Budapest, 1958.

3. В.Длаб. Заметка к теории полных абелевых групп. Чех.мат журнал 8(83), I958, 54-6I.

4. В.Длаб. Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп. Чех.мат. журнал т.9 (84) I959, I6I-I69.

5. S.Khabbaz. Abelian Torsion Groups Having a Minimol System of Generators. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 98, No 3, 1961.

6. А.Ю.Сойфер. Абелевы группы, обладающие неприводимыми системами образующих. Сибирский математический журнал. т.XII, №3, I97I.

7. А.Ю.Сойфер. Критерии существования неприводимых систем образующих у абелевых групп. IУ. Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. Новосибирск, I973 (2I3-22I).