БАЛДИН, А.М.

Б1-3230

Сшиватель

Лит.

Город

Учрежд. или предприятие

Дело:

от

до

Примечание

Балдин, А.М,
Широков, М.И

Реакции с поляризованными частицами.

Р Е А К Ц И И
С ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Настоящий [illegible] о совместной работе А.М.БАЛДИНА и М.И.ШИРОКОВА "Реакции с поляризованными частицами"

составлен ШИРОКОВЫМ.

Аннотация

Используя диагональность S - матрицы по полному импульсу, полному моменту качества движения и его проекции и последовательно применяя теорию преобразований Дирака мы получаем выражения для тензорных моментов рассеянных частиц. Рассматривается самый общий случай: падающие частицы и частицы мишени, находятся в определенных спиновых состояниях (поляризованы), ищутся вероятности определенных спиновых состояний (величины поляризации) обоих частиц-продуктов реакции. Выводится формула описывающая распад покоящейся нестабильной частицы со спином на две разные частицы со спином.

В в е д е н и е

Общая теория ядерных реакций получила широкое развити в работах [6, 11, 13] . В настоящей статье мы дадим новый метод вывода основных величин теории-тензорных моментов рассеянных частиц (определение см. § 4). Суть метода заключается в том, что S - матрица, диагональная в представлении полного момента количества движения, его проекции, полной энергии и полного импульса системы с помощью ряда унитарных преобразований, осуществляемых коэфициентами Клебша - Гордана и сферическими функциями, переводится в представление тех величин, которые измеряются на опыте (близкий по идее метод излагался в [3]). Мы получим также тензорные моменты реакции распада нестабильной частицы на две частицы.

Этот подход допускает релятивисткое обобщение, а также непосредственное обобщение на случай ядерных реакций с более чем двумя частицами в конечном состоянии. Аналогично можно использовать диагональность S -матрицы по другим сохраняющимся физическим величинам для получения ряда общих свойств процессов в квантово - механических системах.

§-1. Напомним некоторые обозначения, определения и формулы теории представлений Дирака [1], которые нам потребуются в дальнейшем.

Состояние системы частиц можно задать указанием значений нескольких определенных физических величин, составляющих полный набор.

Пусть ξ и η обозначают набор переменных двух разных полных наборов. Символ $(\xi|\eta)$ означает запись волновой функции состояния, характеризующегося определенными значениями величин η в представлении величин ξ.

Короче: $(\xi|\eta)$ задает η -состояние в ξ - представлении. Наиболее просто выглядит волновая функция η -состояния системы в своем собственном представлении: она имеет вид дельта-функции.

Физический смысл символа $(\xi|\eta)$ - вероятность того, что в η -состоянии системы величины ξ имеют значение $\xi=\xi_0$ дается $|(\xi_0|\eta)|^2$.

Если $(\xi|\eta)$ есть волновая функция η -состояния в ξ -представлении, то волновая функция ξ -состояния в η -представлении обозначаемая символом $(\eta|\xi)$ равна $(\xi|\eta)^*$ (Звездочка означает комплексное сопряжение).

Другой вариант начала §1.

§ 1. Для описания состояния системы, как известно, надо знать значения физических величин, составляющих полный набор, в выбранной системе координат.

Система 2 частиц может описываться заданием двух векторов импульсов этих частиц $\bar{\bar{p}}_1$ и $\bar{\bar{p}}_2$ (шесть чисел) и проекций их спинов на ось z m_1 и m_2, или заданием квадратов их орбитальных моментов количества движения (относительно начала координат), проекций этих моментов на ось z, энергий частиц и проекций их спинов и т.п. Состояние системы с определенными $\bar{\bar{p}}_1$, $\bar{\bar{p}}_2$ и проекциями спинов m_1 и m_2 может быть записано так: $\delta(\bar{\bar{p}}_1'-\bar{\bar{p}}_1)\delta(\bar{\bar{p}}_2'-\bar{\bar{p}}_2)\delta_{m_1'm_1}\delta_{m_2'm_2}$, что представляет из себя волновую функцию системы.

Волновую функцию бесспиновой частицы с определенным импульсом $\delta(\bar{\bar{p}}'-\bar{\bar{p}})$ можно представить так:

$$\delta(\bar{\bar{p}}'-\bar{\bar{p}}) = N^2\iiint e^{\frac{i\bar{\bar{p}}'x}{\hbar}}\, e^{-\frac{i\bar{\bar{p}}x}{\hbar}}\,(dx)$$

(N – нормировочный коэффициент). Это есть разложение волновой функции по системе ортонормированных функций $Ne^{\frac{i\bar{\bar{p}}'x}{\hbar}}$ с коэффициентами $Ne^{-\frac{i\bar{\bar{p}}x}{\hbar}}$. Эти коэффициенты являются волновой функцией нашей частицы в координатном представлении.

$\delta(\bar{\bar{p}}'-\bar{\bar{p}})$ может быть разложена по любой другой системе ортонормированных функций в импульсном пространстве [1] $\varphi_m(\bar{\bar{p}})$, где индекс m обозначает три величины какого-то другого полного набора (например, орбитальный момент частицы l, его проекцию μ, энергию E):

$$\delta(\bar{\bar{p}}'-\bar{\bar{p}})=\sum_m \varphi_m(\bar{\bar{p}}')\,\bar{\bar{C}}_m^{\bar{\bar{p}}} = \sum_m \varphi_m(\bar{\bar{p}}')\,\varphi_m^*(\bar{\bar{p}}) \qquad (1.1)$$

Если индекс m непрерывен, то вместо суммы подразуме-вается интеграл. Мы будем говорить, что величины $\bar{\bar{C}}_m^{\bar{\bar{p}}}$ задают состояние с определенными значениями величин полного набора $\bar{\bar{p}}_x\, \bar{\bar{p}}_y\, \bar{\bar{p}}_z$ в представлении величин полного набора m. Короче $\bar{\bar{p}}$ - состояние задано в m - представлении.

Удобно писать индекс состояния справа (индекс столбца), а индекс представления слева (индекс строки). В такой записи (I.2) имеет вид:

$$ {}_{\bar{\bar{p}}'}\delta_{\bar{\bar{p}}} = \sum_m {}_{\bar{\bar{p}}'}\varphi_m \; {}_m C_{\bar{\bar{p}}} = \sum_m {}_{\bar{\bar{p}}'}\varphi_m \; {}_{\bar{\bar{p}}}\varphi_m^* \qquad (1.2)$$

${}_{\bar{\bar{p}}'}\varphi_m$ есть волновая функция m - состояния в $\bar{\bar{p}}$ - представлении. В матричной записи она представляется матрицей φ, где отличны от нуля лишь элементы одного столбца (по аналогии с матричной записью спиновых функций).

Из (I.2) следует, что ${}_{\bar{\bar{p}}}\varphi_m^*$ есть волновая функция $\bar{\bar{p}}$ - состояния в m - представлении. Удобно писать: ${}_m\bar{\bar{C}}_{\bar{\bar{p}}} = {}_m(\varphi^+)_{\bar{\bar{p}}}$ где φ^+ обозначает матрицу, полученную транспонированием φ и комплексным сопряжением её элементов.

В дальнейшем мы используем тот факт, что если $Y_{l\mu}(\vartheta,\varphi)$ (где ϑ,φ пусть углы вектора импульса в сферической системе координат) есть волновая функция l,μ - состояния в ϑ,φ - представлении, то ${}_{\vartheta,\varphi}Y^*_{l\mu} = {}_{l\mu}(Y^+)_{\vartheta,\varphi}$ есть волновая функция ϑ,φ - состояния в l,μ - представлении. (В обоих полных наборах третьей величиной набора может быть квадрат импульса или энергия).

Запись состояния в виде δ - функции, например, в виде ${}_{p'}\delta_{p}$, является записью $\bar{\bar{p}}$ - состояния, например, в своем собственном представлении.[I)]

I) Если ${}_{m'}\delta_m$ индексы непрерывные, то это δ - функция Дирака, если m пробегает ряд дискретных значений, то ${}_{m'}\delta_m$ есть символ Кронекера-Вейерштрасса.

Пусть $\psi_{j_1 j_2 j m E_1 E_2}$ есть волновая функция системы двух бесспиновых частиц в состоянии с определенными орбитальными моментами j_1 и j_2, суммарным орбитальным моментом j и его проекцией m и энергиями E_1 и E_2 в каком нибудь представлении (например, в своем собственном представлении). Разложим ее по системе волновых функций состояний с определенными j_1, j_2, их проекциями m_1, m_2 и энергиями E_1, E_2 (эти величины тоже составляют полный набор):

$$\psi_{j_1 j_2 j m E_1 E_2} = \sum_{m_1 m_2} \psi_{j_1 j_2 m_1 m_2 E_1 E_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) \quad (1.1)$$

Коэффициенты ($j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m$) называются коэффициентами Клебша-Жордана. Мы будем употреблять для них также обозначение $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$. Из унитарности матрицы этих коэффициентов и их действительности следует, что обратное разложение имеет вид:

$$\psi_{j_1 j_2 m_1 m_2} = \sum_{j m} \psi_{j_1 j_2 j m} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) \quad (1.2)$$

Таким образом, ($(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m)$) можно считать волновыми функциями $j_1 j_2 j m$ - состояния в $j_1 j_2 m_1 m_2$ - представлении.

Одной из основных в дальнейшем для нас будет формула:

$$(\eta_1|\hat{f}|\eta_2) = (\xi|\eta_1)^*(\xi_1|\hat{f}|\xi_1)(\xi_2|\eta_2) = (\eta_1|\xi_1)(\xi_1|\hat{f}|\xi_2)(\xi_2|\eta_2) \quad (1.3)$$

Т.е. для нахождения матричного элемента оператора $\hat{f}$ в η - представлении, если известны его матричные элементы в ξ - представлении, нужны волновые функции η - состояния в ξ - представлении.

§ 2. Мы будем рассматривать реакции, в которых частица a со спином i_a сталкивается с частицей b со спином i_b (мишень), в результате реакций получаются две разные частицы, которые мы назовем Λ и θ (спины их l_Λ и l_θ соответственно):

$$A + B = \Lambda + \theta \tag{2.1}$$

Λ и θ, вообще говоря, отличны от A и B. Все части-цы имеют массу, не равную нулю.

Зная начальное состояние системы и предполагая извест-ными элементы S - матрицы в нужном нам представлении [1], мы можем получить волновую функцию конечного состояния

$$_{\xi'}\Psi'_{\xi_0} = (\xi'|S'|\xi)\,_{\xi}\Psi_{\xi_0} \tag{2.2}$$

Подразумевается суммирование или интегрирование по ξ. Индексы ξ обозначают количество частиц каждого сорта в описываемом состоянии и, например, импульсы и проекции спина каждой частицы (т.е. так называемые числа заполнения). Для системы двух частиц индекс ξ означает величины какого нибудь полного набора для такой системы.

Для удобства у волновых функций Ψ индекс состояния написан внизу справа, а индекс представления внизу слева.

Волновую функцию начального состояния удобнее всего задавать в своем собственном представлении.

---

1) Если все частицы в (3.1) "элементарные" (электроны, нуклоны, новые частицы и т.п.), то принципиально возможно $(\xi'|S|\xi)$ найти с помощью вторично-квантованной теории, описывающей взаимодействие системы из четырех полей, вообще говоря (не считая вспомогательных полей, которые могут быть введены в конкретном варианте такой теории). Если некоторые из частиц (3.1) не "элементарные" (ядра), то $(\xi'|S|\xi)$ надо находить с помощью более сложных (или приближенных) теорий, принимающих во внимание структуру этих частиц.

$_{\xi'}\Psi'_{\xi_0}$ есть амплитуда вероятности того, что в конечном состоянии система будет находиться в ξ' - состоянии, если вначале она находилась в ξ_0 -состоянии.

Начальные и конечные состояния системы следует описывать не волновыми функциями, а матрицами плотности, так как состояния системы вообще говоря, в задачах рассеяния образуют смешанный ансамбль [2]. Например, неполяризованный пучок падающих на мишень частиц описывается таким ансамблем, в котором все ориентации спинов частиц равновероятны. Матрицу плотности начального состояния системы (левая часть (3.1)) запишем в представлении чисел заполнения:

$$(\xi_i|\rho|\xi_k) = \sum_\eta {}_{\xi_i}\Psi_\eta\, \rho_\eta\, {}_{\xi_k}\Psi_\eta^* \equiv \sum_\eta \rho_\eta\, {}_\eta\Psi_{\xi_i}^*\, {}_\eta\Psi_{\xi_k} \qquad (2.3)$$

где ρ_η -веса отдельных чистых состояний.

С помощью (2.2) найдем, что матрица плотности конечного состояния равна:

$$(\xi_1'|\rho'|\xi_2') = (\xi_1'|S|\xi_i)(\xi_2'|S|\xi_k)^*(\xi_i|\rho|\xi_k) = (\xi_1'|S\rho S^+|\xi_2') \qquad (2.4)$$

Диагональные элементы $(\xi'|\rho'|\xi')$ дают вероятность того, что в конечном состоянии система будет находиться в ξ'-состоянии, если начальное состояние характеризовалось матрицей плотности (2.3)

Будем матрицу плотности начального состояния писать в представлении такого полного набора: $\vec{p}_a, \vec{P}, i_a\ i_b, m_a, m_b, \alpha$ [2)] где $\vec{p}_a$ -импульс частицы a в системе

---

2) Заметим, что в полный набор должны еще входить вообще говоря, массы частиц. Для краткости они явно не выписываются. В полный набор может еще входить ряд переменных, например, внутренние четности обеих частиц. Все они обозначаются буквой α .

центра инерции, $\vec{\mathcal{P}}$ -полный импульс системы, i_a и i_b -спины частиц, m_a, m_b -их проекции на ось z. ρ' пишется в том же представлении [3]; Для реакции (3.1) соотношение (2.4) имеет вид:

$$(\vec{p}_\Lambda \vec{\mathcal{P}} m_\Lambda m_\theta \alpha | \rho' | \vec{p}'_\Lambda \vec{\mathcal{P}}' m'_\Lambda m'_\theta \alpha') =$$

$$= (\vec{p}_\Lambda \vec{\mathcal{P}} m_\Lambda m_\theta \alpha | S | \vec{p}_a \vec{\mathcal{P}}'' m_a m_b \alpha_1)(\vec{p}'_\Lambda \vec{\mathcal{P}}' m'_\Lambda m'_\theta \alpha' | S | \vec{p}_a \vec{\mathcal{P}}''' m'_a m'_b \alpha_2)^* \times$$
$$\times (\vec{p}_a \vec{\mathcal{P}}'' m_a m_b \alpha_1) | \rho | \vec{p}'_a \vec{\mathcal{P}}''' m'_a m'_b \alpha_2) \qquad (2.4)$$

Индексы i_a и i_b и индексы спинов частиц Λ и θ для для краткости опущены. По дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование или интегрирование.

§ 3. Известно, что у изолированной системы полный момент количества движения J, его проекция M, полный импульс $\vec{\mathcal{P}}$ и полная энергия E системы сохраняются. Это означает, что соответствующие операторы коммутируют с гамильтонианом $\hat{H}$ или с S - матрицей системы. Операторы-матрицы $\hat{J}^2, \hat{M}, \hat{\mathcal{P}}, H$ диагональны в своем собственном представлении, коммутация S -матрицы или матрицы рассеяния $R = S - 1$ (все элементы которой совпадают с элементами S -матрицы, за исключением матричных элементов переходов без изменения состояния [4] с ними означает, что если матричные элементы R (или S) записаны в представлении, где фигурируют $J, M, \vec{\mathcal{P}}$ и E, то она диагональна по этим индексам.

Однако, вообще говоря, $J, M, \vec{\mathcal{P}}$ и E не могут входить в один и тот же полный набор. Поэтому в общем случае надо, использовав диагональность матричных элементов R -матрицы по J, M, E в представлении набора, включающего J, M, E, выразить затем через эти матричные элементы R - матрицы в представлении другого полного набора, включающего $\vec{\mathcal{P}}$

(с помощью формулы (1.3)). Практическое выполнение этих операций потребовало бы довольно громоздких унитарных преобразований.

Существует система координат, однако, где мы можем использовать диагональность R - матрицы сразу по J, М, Е, и $\vec{\mathcal{P}}$. А именно, если мы выбрали для описания системы двух частиц систему координат, где $\mathcal{P}^2 = 0$, то в набор, включающий J, М и Е, кроме них могут входить : спины обеих частиц i_a и i_b, суммарный спин S, сумма орбитальных моментов частиц относительно центра инерции ℓ, орбитальный момент всей системы относительно начала координат L (см.ниже), суммарный орбитальный момент $\mathcal{L}$, квадрат полного импульса системы $\mathcal{P}^2$ (равный нулю). Так как оператор $\vec{L}$ можно представить как $[\vec{R}_c\,\vec{\mathcal{P}}]$, где $\vec{R}_c$ оператор центра инерции, то в тех состояниях, где $\vec{\mathcal{P}} = 0$ и $L = 0$ [5], (а мы и рассматриваем только такие состояния системы, где $\mathcal{P}^2 = 0$ и, следовательно, $\vec{\mathcal{P}} = 0$). Так как $\mathcal{P}^2$ сохраняется, то $L = 0$ всегда и суммарный орбитальный момент системы равен ℓ. В представлении этого полного набора

$$(i_a i_b S'\ell' L' \mathcal{L}' \mathcal{P}'^2 J' M' E' \alpha' | R | i_a i_b S \ell L \mathcal{L} 0 J M E \alpha) =$$

$$= (i_a i_b S'\ell' 0 \ell' \alpha' | R^{0JE} | i_a i_b S \ell 0 \ell \alpha)\,\delta(\mathcal{P}'^2 - 0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\delta(E-E_1) \quad (3.1)$$

Верхними индексами обозначена зависимость диагональных элементов от $\mathcal{P}^2$, J и E ; от М, как известно, они не зависят. (См. [6], стр.11). В дальнейшем мы не будем выписывать в соответствующих местах индексов полного импульса и индексов величин L и $\mathcal{L}$, ни в матричных элементах R - матрицы, ни в матрице плотности. Другими словами, мы не будем описывать движения системы как целого (т.е. тот факт, что она покоится).

Для получения матрицы плотности или тензорного момента (см.§ 5) конечного состояния нам нужны элементы R - матрицы в том представлении, в котором записаны ρ' и ρ (см. (2.4). Чтобы их получить из матричных элементов (3.1), согласно (1.3) нам нужны коэффициенты Клебша-Гордана (переход от представления $j_1 j_2 j m$ к представлению $j_1 j_2 m_1 m_2$) и правильно нормированные волновые функции ϑ, φ, P - состояния в $\ell, \mu,$ E- представлении.

В следующем параграфе мы займемся нормировкой волновых функций в нашей задаче и другими связанными с ней вопросами.

§ 4. Так как $w = (\xi'|\rho'|\xi')$ есть вероятность перехода системы из начального состояния в ξ'- состояние, то вероятность того, что система перейдет в интервал состояний $(\xi', \xi' + \Delta\xi')$ $\Delta w = (\xi'|\rho'|\xi')\Delta\xi'$. Чтобы получить соответствующее поперечное сечение $\Delta\sigma$ процесса а + в $\rightarrow \Lambda + \theta$, надо предположить, что система заключена в некотором большом объеме $\mathcal{V}$; тогда

$$\Delta\sigma = \Delta w \frac{\mathcal{V}}{v} \tag{4.1}$$

где v -модуль относительной скорости частиц А и В, В системе центра инерции

$$v = |v_a| + |v_b| = \frac{dE_a}{dp_a} + \frac{dE_b}{dp_b} = \frac{d(E_a + E_b)}{dp_a} = \frac{dE}{dp_a}$$

Все волновые функции (и матрицу плотности) нашей задачи следовательно надо нормировать так, чтобы система в η-состоянии с вероятностью 1 находилась в объеме $\mathcal{V}$, что в х - представлении запишется таким образом:

$$\int_{\mathcal{V}} (x|\eta)^* (x|\eta)\, d^3x = 1 \tag{4.2}$$

Нормировка волновых функций η - состояния в других представлениях должны соответствовать этой нормировке.

Условие ортонормированности для функции $\vec{P}$ -состояния в $\vec{X}$ - представлении[3)] поэтому запишется так:

$$(x|p')^*(x|p) \equiv \int_V e^{-i\frac{\vec{p}'}{\hbar}\vec{x}} e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\vec{x}} d^3x = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}\delta_{V_p}(\vec{P}'-\vec{P})$$

(4.3)

<u>По определению</u> $\delta_V(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V e^{i\vec{K}\vec{x}} d^3x$, (где V -трехмерный шар). При этом $\lim_{V\to\infty}\delta_V(\vec{K}) = \delta(\vec{K})$ где $\delta(\vec{K})$- дельта-функция Дирака.

При $\vec{P}' = \vec{P}$ (4.3) превращается в условие нормировки (4.2) Из (4.3) следует, что внутри[3)] V $(\vec{x}|\vec{P}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\vec{x}}$ (4.4) (вне объема V $(x|P) = 0$).

Правая часть (4.3) является правильно нормированной волновой функцией $(\vec{P}'|\vec{P})$. Потребуем, чтобы

$$(\vec{P}_1|\vec{P})(\vec{P}|\vec{P}_2) \equiv \int(\vec{P}|\vec{P}_1)^*(\vec{P}|\vec{P}_2)\mathcal{D}d^3p = (\vec{P}_1|\vec{P}_2)$$

(4.5)

т.е. равнялось единице при $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ и нулю при $\vec{P}_1 \neq \vec{P}_2$.

Из этого условия вытекает, что интегрирование по импульсам должно проводиться с весовым множителем

$$\mathcal{D} = \left[\frac{(2\pi\hbar)^3}{V}\right]^{-1} \qquad (\text{ср. } [1])$$

Нормированная согласно (4.2) функция ℓ, μ, E -состояния в координатном представлении имеет вид:

$$(\theta, \varphi, r|\ell\mu E) = \sqrt{\frac{2\pi}{R}}\, Y_{\ell\mu}(\theta,\varphi) R_{\kappa\ell}(r)$$

---

3) Поскольку объем V пока конечен, то должно подразумеваться состояние с минимальным разбросом импульсов (не большим того, какой допускается соотношением неопределенностей). Такое состояние описывается (4.4) лишь приближенно.

где $Y_{\ell\mu}(\theta,\phi)$ – обычным образом нормированная сферическая функция; $R_{\kappa\ell}(r)=\sqrt{\frac{\kappa}{r}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r)$, где $J_{\ell+\frac{1}{2}}$ – бесселева функция; $\kappa=\frac{p}{\hbar}$, а p в нашем случае модуль импульса одной из частиц в системе центра инерции; R – радиус шара V.

Зная правильно нормированные функции (X I P) и $(\theta\,\phi\,r\,|\,\ell\mu E)$ мы можем получить нужную нам правильно нормированную функцию ℓ,μ,E – состояния в импульсном представлении:

$$(\vartheta,\varphi,p\,|\,\ell\mu E)=(\vartheta,\varphi,p\,|\,\theta,\phi\,r)(\theta,\phi,r\,|\,\ell\mu E)$$

Т.к. (X I P) в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\frac{\vec p}{\hbar}\vec x}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\ell=0}^{\infty}i^{\ell}\,4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{r p}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\hbar}r\right)\sum_{\mu=-\ell}^{+\ell}Y^{*}_{\ell\mu}(\theta,\phi)\,Y_{\ell\mu}(\vartheta,\varphi)\equiv$$
$$\equiv(\vartheta,\varphi,r\,|\,\theta\,\phi\,p)$$

то получается

$$(\vartheta,\varphi,p\,|\,\ell\mu E)=\frac{(2\pi\hbar)^{2}}{\sqrt{V}R\hbar}\,\frac{i^{-\ell}}{p}\,Y_{\ell\mu}(\vartheta,\varphi)\,\delta_{R_p}(p-p(E))\equiv$$
$$\equiv\frac{2\sqrt{2\pi\hbar}\sqrt{R}}{\sqrt{V}}\,\frac{i^{-\ell}}{p}\,Y_{\ell\mu}(\vartheta,\varphi)(p\,|\,E)\qquad(4.6)$$

Наличие множителя $i^{-\ell}$ обеспечивает инвариантность действия оператора обращения времени на волновые функции с определенным ℓ и μ относительно сложения моментов количества движения [7] (т.е. запись результата действия этого оператора имеет такой же вид для $\psi_{\ell\mu}$, как и для $\psi_{\ell_1\mu_1}$ и $\psi_{\ell_2\mu_2}$, если $\vec\ell=\vec\ell_1+\vec\ell_2$). Заметим, что

$$(\ell\mu E\,|\,\vartheta,\varphi,p)=(\vartheta,\varphi,p\,|\,\ell\mu E)^{*}=(-1)^{\ell+\mu}(\vartheta,\varphi,p\,|\,\ell-\mu E)\qquad(4{:}7)$$

Запишем ортонормированность функций (4.6):

$$(\ell\mu E\,|\,\vartheta\,\varphi\,p)(\vartheta,\varphi,p\,|\,\ell'\mu'E')=\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{\mu\mu'}\,\frac{2\pi\hbar}{R}\,V\,\delta_{R_E}(E-E')$$

Условие нахождения частиц в объеме $\mathcal{V}$ требует, чтобы мы ограничивались временами $T = \frac{R}{v}$ (иначе частицы заведомо выйдут из объема). $\frac{2\pi\mathcal{V}}{R}\delta_{R_\omega}\left(\frac{E-E'}{\hbar}\right)$ можно поэтому изобразить функцией

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} e^{i\frac{E-E'}{\hbar}t}\,dt \equiv (E/E') \qquad (4.8)$$

Вероятность $\Delta\omega$ в (4.1) надо считать отнесенной к тому промежутку времени T, пока частицы находились в объеме $\mathcal{V}$, т.е. к $T = \frac{R}{v}$. Поэтому диференциальное поперечное сечение $\Delta\sigma$, отнесенное к единице времени, равно

$$\frac{1}{vT}\cdot\mathcal{V}(\xi'|P'|\xi')\Delta\xi' \qquad (4.1$$

Мы получили соответствующие нашей нормировке конкретные выражения для символов Дирака (ξ/η):

$$(\vec{P}_1|\vec{P}_2) = \frac{(2\pi h)^3}{\mathcal{V}}\delta_{R_p}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$$

$$(E_1/E_2) = \frac{2\pi h}{R}\mathcal{V}\delta_{R_E}(E_1-E_2) = \frac{2\pi h}{R}\delta_{R_p}(p_1-p_2) = (p_1/p_2) \qquad (4.9)$$

$$\text{если } E = f(p)$$

$$(p/E) = \frac{2\pi h}{R}\delta_{R_p}(p-p(E)) = \frac{2\pi h\mathcal{V}}{R}\delta_{R_E}(E(p)-E) \equiv (E/p) \quad \text{и т.д.}$$

~~Согласно~~ Такие символы, как ($\vec{P}_1/\vec{P}_2$) и (E_1/E_2) из (4.9) у нас будут играть ту же роль, какую играют соответствующие δ - функции Дирака в случае нормировки волновых функций с непрерывными индексами состояния на δ - функции Дирака от этих индексов.

В выражении (3.1) вместо δ(E' - E) и $\delta(\mathcal{P}^{\mu} - 0)$ мы должны были бы поэтому написать (E'| E) и ($\mathcal{P}^{\prime 2}/0$), понимая под этими символами их конкретные выражения (4.9)

Подчеркнем, что написание формулы (1.3) например, не зависит от конкретного вида символов (ξ/η) и смысла суммирования- интегрирования по ξ (сравни (4.5

В дальнейшем мы везде пользуемся волновыми функциями, нормированными согласно (4.2) (см. (4.9), например)

Запишем конкретный вид матрицы плотности начального состояния (см.(2.4)) в системе координат центра инерции.

Так как в начальном состоянии $\vec{p}_a$ и $\vec{\mathcal{P}} = 0$ имеют вполне определенные значения, то

$$(\vec{p}_a{}' \vec{\mathcal{P}}{}' m_a m_e \alpha_1 | \rho | \vec{p}_a{}'' \vec{\mathcal{P}}{}'' m_a' m_e' \alpha_2) = (\vec{p}_a{}' | \vec{p}_a)(\vec{p}_a{}'' | \vec{p}_a)(\vec{\mathcal{P}}{}' | 0)(\vec{\mathcal{P}}{}'' | 0) \times$$
$$\times (m_a m_e \alpha_1 | \rho(\vec{p}_a, \vec{\theta}) | m_a' m_e' \alpha_2) \qquad (4.10)$$

(если спиновые и импульсные переменные разделяются (нерелятивисткое приближение), то $(m_a, m_e, \alpha, | \rho(\vec{p}_a, \vec{\mathcal{P}}) | m_a' m_e' \alpha_2)$ в действительности не зависит от $\vec{p}_a$ и $\vec{\mathcal{P}}$) Заменяя матрицу S на R (см. § 3), используя закон сохранения $\mathcal{P}^2$ и опуская по условию (см.§3) индексы полного импульса, равные всюду нулю, перепишем (2.4):

$$(\vec{p}_\Lambda m_\Lambda m_\theta \alpha | \rho' | p_\Lambda' m_\Lambda' m_\theta' \alpha') = (\vec{p}_\Lambda m_\Lambda m_\theta \alpha | R | \vec{p}_a m_a m_e \alpha_1) \times$$
$$\times (\vec{p}_\Lambda{}' m_\Lambda' m_\theta' \alpha' | R | \vec{p}_a m_a' m_e' \alpha_2)^* (m_a m_e \alpha_1 | \rho(\vec{p}_a) | m_a' m_e' \alpha_2) \qquad (4.11)$$

В дальнейшем импульсы $\vec{p}$ будем задавать их модулями и соответствующими единичными векторами $\vec{n}$ со сферическими углами ϑ и φ .

Совершая ряд последовательных переходов от одного представления к другому с помощью формулы (1.3), коэффициентов Клебша-Гордана и функций $(\vartheta, \varphi, p | \ell \mu E)$) можно теперь из матричных элементов

$$(i_\Lambda i_\theta s' \ell' \alpha' | R^{JE} | i_a i_e s \ell \alpha) \delta_{J'J} \delta_{M'M} (E' | E)$$

получить интересующие нас элементы:

$$(\vec{n}_\Lambda p_\Lambda m_\Lambda m_\theta \alpha | R | \vec{n}_a p_a m_a m_e \alpha_1) =$$

$$= \sum (\vec{n}_\Lambda p_\Lambda | \ell' \mu' E')(i_\Lambda i_\theta m_\Lambda m_\theta | i_\Lambda i_\theta s' m')(s' \ell' m' \mu' | s' \ell' J' M') \times$$

$$\times (i_\Lambda i_\theta s' \ell' \alpha | R^{JE} | i_a i_b s \ell \alpha_1) \delta_{J'J} \delta_{M'M} (E'|E)(s \ell J M | s \ell m \mu) \times$$

$$\times (i_a i_b s m | i_a i_b m_a m_b)(\ell \mu E | \vec{n}_a, p_a) = \frac{(2\pi h)^2 R}{v \cdot p_\Lambda p_a} \times$$

$$\times \sum_{\ell' \ell s' s \mu' \mu m' m J M} i^{-\ell'-\ell} (-1)^{\ell+\mu} Y_{\ell'\mu'}(\vec{n}_\Lambda) Y_{\ell-\mu}(\vec{n}_a) C^{s'm'}_{i_\Lambda m_\Lambda i_\theta m_\theta} \times$$

$$\times C^{JM}_{s'm'\ell'\mu'} C^{JM}_{sm\ell\mu} C^{sm}_{i_a m_a i_b m_b} (p_\Lambda|E')(E'|E)(E|p_a)(i_\Lambda i_\theta s' \ell' \alpha | R^{JE} | i_a i_b s \ell \alpha_1) \qquad (4.12)$$

Сумма $\sum$ означает суммирование или интегрирование (с соответствующим весом) по всем дважды встречающимся в символах Дирака индексам. Ради краткости мы не писали среди переменных полного набора массы частиц.

Однако они требуются, чтобы зная E' получить p_Λ. Вместо $(p_\Lambda | E')$ например, следовало бы писать $(p_\Lambda, \varkappa_\Lambda, \varkappa_\theta | E', \varkappa_\Lambda \varkappa_\theta)$ и тогда вместо $(p_\Lambda | E')(E'|E)(E|p_a)$ имели бы

$$(p_\Lambda, \varkappa_\Lambda, \varkappa_\theta | E', \varkappa_\Lambda, \varkappa_\theta)(E'|E)(E\, \varkappa_a \varkappa_b | p_a, \varkappa_a, \varkappa_b) =$$

$$= \left(\sqrt{p_\Lambda^2 c^2 + \varkappa_\Lambda^2 c^4} + \sqrt{p_\Lambda^2 c^2 + \varkappa_\theta^2 c^4} \,\middle|\, \sqrt{p_a^2 c^2 + \varkappa_a^2 c^4} + \sqrt{p_a^2 c^2 + \varkappa_b^2 c^4} \right) \equiv (p_\Lambda, p_a)$$

Этот символ обращается в единицу, если p_Λ выражается через p_a согласно соотношению

$$\sqrt{p_\Lambda^2 c^2 + \varkappa_\Lambda^2 c^4} + \sqrt{p_\Lambda^2 c^2 + \varkappa_\theta^2 c^4} = \sqrt{p_a^2 c^4 + \varkappa_a^2 c^4} + \sqrt{p_a^2 c^2 + \varkappa_b^2 c^4} \qquad (4.13)$$

и в нуль, если p_Λ имеет другие значения.

Заметим еще, что в выбранной нами системе координат мы смогли перейти от описания состояния системы величинами ℓ, μ и E, являющимися существенно суммарными характеристиками движения двух частиц, к описанию величинами $\vec{n}$ и p, тоже характеризующими движение обоих частиц, но могущими быть приписанными одной из частиц. Мы произвольно приписали эти величины частицам Λ и a.

§ 5.

Поставим задачу выбрать для описания начального и конечного состояний системы такие переменные, чтобы можно было непосредственно сравнивать результаты теории и эксперимента. С помощью матрицы плотности $(\vec{p}_\Lambda\, m_\Lambda m_\theta \alpha | \rho' | \vec{p}_\Lambda'\, m_\Lambda' m_\theta' \alpha')$ из (4.11) можно узнать вероятность того, что у частиц Λ и θ будут наблюдены импульсы $\vec{P}_\Lambda$ и $-\vec{P}_\Lambda$ соответственно, а проекции их спинов будут равны m_Λ и m_θ. В эксперименте можно измерить распределение по импульсам (т.е. угловое распределение), но вероятности тех или иных значений проекций спинов как правило непосредственно не измеряются, а измеряются средние значения физических величин, связанных с этими проекциями. Например, измеряется среднее значение вектора спина частицы (связанное с поляризацией см. ниже).

Чтобы найти среднее значение оператора физической величины $\hat{A}$ в состоянии, характеризуемом матрицей плотности, надо знать матричные элементы $\hat{A}$ в том представлении, в котором записана матрица плотности. Пусть $\hat{A}$ есть оператор в отношении спиновых переменных одной частицы со спином i ; состояние этой частицы описывается матрицей плотности $(m_1 \xi_1 | \rho | m_2 \xi_2)$, где m_1 и m_2 - магнитные квантовые числа, ξ -все другие переменные представления.

$$\bar{A} = \sum_{m_1 m_2 \xi_1 \xi_2} (m_2 \xi_2 | \hat{A} | m_1 \xi_1)(m_1 \xi_1 | \rho | m_2 \xi_2) \equiv Sp(A\rho) \tag{5.1}$$

Зависимость матричных элементов оператора $\hat{A}^{q\varkappa}$, преобразующего при трехмерных вращениях по неприводимому представлению веса q [8], от m_2 и m_1 дается теоремой Вигнера-Эккарта [8] :

$$(i_2 m_2 \xi_2 | \hat{A}^{q\varkappa} | i_1 m_1 \xi_1) = (i_2 \xi_2 \| \hat{A}^q \| i_1 \xi_1)(i_1 q m_1 \varkappa | i_1 q i_2 m_2) =$$

$$= (i_2 \xi_1 \| \hat{A}^q \| i_1 \xi_1)(\xi_1 | \xi_2)(-1)^q \sqrt{\frac{2i_2+1}{2q+1}}\,(-1)^{-i_2-m_1}(i_1 i_2 -m_1 m_2 | i_1 i_2 q \varkappa) \tag{5.2}$$

Т.е. вся зависимость $(m_2\xi_2|A^{qx}|m_1\xi_1)$ от m_1 и m_2 содержится в коэффициенте Клебша-Јордана.

$$\bar{A}^{qx} = \sum_{\xi_1\xi_2} A(i,q,\xi_1)(\xi_1|\xi_2)\sqrt{2i+1}\ \times$$
$$\times \sum_{m_1 m_2} (-1)^{-i-m_1}(ii-m_1m_2|iiqx)(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2) \tag{5.3}$$

(если спиновые переменные и переменные ξ разделятся, то $A\ (i,q,\xi)$ не зависит от ξ):

$$A(i,q,\xi) = (i\xi\|\hat{A}^q\|i\xi)(-1)^q(2q+1)^{-\frac{1}{2}}$$

Итак, для нахождения $\bar{A}^{qx}$ надо знать непосредственно не матрицу плотности, а величину

$$T_x^q(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{2i+1}\sum_{m_1m_2}(-1)^{-i-m_1}(ii-m_1m_2|iiqx)(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2) \tag{5.4}$$

T_x^q преобразуется при трехмерных вращениях, как $\bar{A}^{qx}$, т.е. по неприводимому представлению веса q.

Обратное выражение $(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2)$ через $T_x^q(\xi_1,\xi_2)$ имеет вид:

$$(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2i+1}}\sum_{q,x}(-1)^{i+m_1}(ii-m_1m_2|iiqx)T_x^q(\xi_1,\xi_2) \tag{5.5}$$

Исходя из изложенного мы будем начальные и конечные состояния нашей задачи описывать величинами T_x^q (См. (5.9) и (5.10)), которые мы назовем тензорными моментами (сравни [11] и [13], а также [15]).

Формулу (5.5) можно рассматривать как преобразование матрицы плотности из представления в переменных m_1 и m_2 в представлении величин q и x. По всем другим переменным ξ $T_x^q(\xi_1,\xi_2)$ совпадает с $(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2)$ и является, следовательно, матрицей плотности.

Можно ввести соответствующее преобразование для матричных элементов спиновых операторов:

$$(\xi_2|\hat{A}_{JM}|\xi_1)=\frac{1}{\sqrt{2i+1}}\sum_{m_1 m_2}(-1)^{i+m_1}(ii-m_1m_2|iiJM)(im_2\xi_2|\hat{A}|im_1\xi_1) \qquad (5.6)$$

Формула (5.3) в этом представлении имеет вид:

$$\bar{A}=\sum_{\xi_1,\xi_2,J,M} T_M^J(\xi_1,\xi_2)(\xi_2|\hat{A}_{JM}|\xi_1) \qquad (5.7)$$

Если $\hat{A}$ преобразуется при трехмерных вращениях по неприводимому представлению веса q, то

$$(\xi_2|\hat{A}^{q\chi}_{JM}|\xi_1)=A(iq\xi_1)\delta_{Jq}\delta_{M\chi}(\xi_2|\xi_1)$$

и $\bar{A}^{q\chi}$ в состоянии, описываемом тензорными моментами (5.4) равно $\sum_{\xi} A(i,q,\xi)T_\chi^q(\xi,\xi)$

Среднее значение $\hat{A}^{q\chi}$ в состоянии с $\xi=\xi_0$ дается формулой

$$\bar{A}^{q\chi}(\xi_0)=A(i,q,\xi_0)T_\chi^q(\xi_0,\xi_0)\cdot\frac{1}{T_0^0(\xi_0,\xi_0)} \qquad (5.8)$$

Если нас интересует только распределение вероятностей частице иметь определенные значения переменных ξ (например, угловое распределение частиц) в состоянии, характеризуемом $(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2)$, то оно будет описываться диагональными элементами матрицы плотности $\sum_m (m\xi_1|\rho|m\xi_2)$. Преобразование (5.4) выбрано так, чтобы $\sum_m (m\xi_1|\rho|m\xi_2)=T_0^0(\xi_1,\xi_2)$, т.е. чтобы угловое распределение, например, описывалось $T_0^0(\vartheta,\varphi;\vartheta,\varphi)$ (отметим, что пучок неполяризованных частиц описывается тоже T_0^0)

Формально угловое распределение получается из формулы (5.8) при $\hat{A}^{00}=1$.

Ограничимся в дальнейшем задачей нахождения средних значений операторов, действующих лишь на спиновые переменные. Из (5.8) следует, что для этого достаточно находить лишь диагональные по $\vec{n}_\Lambda, p_\Lambda$ и α элементы тензорного момента конечного состояния.

Определим тензорные моменты начального и конечного состояний равенствами:

$$(m_a m_e \alpha_1 | \rho(\vec{p}_a) | m_a' m_e' \alpha_2) = [(2i_a+1)(2i_e+1)]^{-\frac{1}{2}} \times \tag{5.9}$$

$$\times \sum (-1)^{i_a+m_a} C^{q_a \chi_a}_{i_a -m_a i_a m_a'} (-1)^{i_e+m_e} C^{q_e \chi_e}_{i_e -m_e i_e m_e'} T^{q_a q_e}_{\chi_a \chi_e}(\vec{p}_a, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$T'^{q_n q_\theta}_{\chi_n \chi_\theta}(\vec{p}_n, \alpha) = [(2i_n+1)(2i_\theta+1)]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{m_n m_n' m_\theta m_\theta'} (-1)^{-i_n-m_n-i_\theta-m_\theta} C^{q_n \chi_n}_{i_n -m_n i_n m_n'} C^{q_\theta \chi_\theta}_{i_\theta -m_\theta i_\theta m_\theta'} (\vec{p}_n m_n m_\theta \alpha | \rho' | \vec{p}_n m_n' m_\theta' \alpha')$$

11178 (5.10)

Поскольку состояние пучка падающих частиц и состояние частиц мишени независимы

$$T^{q_a q_e}_{\chi_a \chi_e}(\vec{p}_a, \alpha_1, \alpha_2) = T^{q_a}_{\chi_a}(\vec{p}_a) T^{q_e}_{\chi_e}(-\vec{p}_a)(\alpha_1 | \rho | \alpha_2)$$

, где $(\alpha_1 | \rho | \alpha_2)$ описывает состояние системы частиц по переменным α.

В нерелятивистком приближении $T^{q_a}_{\chi_a}(\vec{p}_a)$ и $T^{q_e}_{\chi_e}(-\vec{p}_a)$ от $\vec{p}_a$ не зависят. (Эти величины описывают спиновое состояние частиц a и e).

§ 6. Введем в уравнение (4.11) вместо матриц плоскости тензорные моменты согласно равенствам (5.9) и (5.10) и воспользуемся (4.12) и формулой

$$Y_{l_1 \mu_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 \mu_2}(\vartheta, \varphi) = \tag{6.1}$$

$$= \sum_{L, m_L} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} (l_1 l_2 0 0 | l_1 l_2 L 0)(l_1 l_2 \mu_1 \mu_2 | l_1 l_2 L m_L) Y_{L m_L}(\vartheta, \varphi)$$

Тогда мы получим следующую формулу:

$$T^{q_a q_b}_{\chi_a \chi_b}(\vec{n}_a, p_a, \chi) = N_1 [(2l_a+1)(2l_b+1)]^{\frac{1}{2}} [(2l_a+1)(2l_b+1)]^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sum (-1)^{-l_a-m_a} C^{f_a \chi_a}_{l_a -m_a, l_a m_a'} (-1)^{-l_b-m_b} C^{f_b \chi_b}_{l_b -m_b l_b m_b'} C^{S_1' m_1'}_{l_a m_a l_b m_b} C^{S_2' m_2'}_{l_a m_a' l_b m_b'}$$

$$\cdot C^{J_1 M_1}_{S_1' m_1' l_1' u_1'} C^{J_2 M_2}_{S_2' m_2' l_2' u_2'} C^{J_1 M_1}_{S_1 m_1 l_1 u_1} C^{J_2 M_2}_{S_2 m_2 l_2 u_2} (-1)^{-u_1'} C^{L' m_L'}_{l_1' u_1' l_2' -u_2'} (-1)^{u_1} C^{L m_L}_{l_1 -u_1 l_2 u_2} \cdot$$

$$\cdot C^{S_1 m_1}_{l_a m_a l_b m_b} C^{S_2 m_2}_{l_a m_a' l_b m_b'} (-1)^{l_a+m_a} C^{f_a \chi_a}_{l_a -m_a l_a m_a'} (-1)^{l_b+m_b} C^{q_b \chi_b}_{l_b -m_b l_b m_b'} \cdot$$

$$\cdot (-1)^{-l_2'+l_1} i^{-l_1'-l_1-l_2'-l_2} [(2l_1'+1)(2l_2'+1)(2l_1+1)(2l_2+1)]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot$$

$$\cdot [(2L'+1)(2L+1)]^{-\frac{1}{2}} C^{L'0}_{l_1'0 l_2'0} C^{L0}_{l_1 0 l_2 0} (l_a l_b S_1' l_1' \alpha | R^{J_1 E} | l_a l_b S_1 l_1 \alpha_1) \cdot$$

$$\cdot (l_a l_b S_2' l_2' \alpha | R^{J_2 E} | l_a l_b S_2 l_2 \alpha_2)^* Y_{L' m_L'}(\vec{n}_a) Y_{L m_L}(\vec{n}_a) T^{q_a q_b}_{\chi_a \chi_b}(\vec{n}_a, p_a, \alpha, \chi)$$

(6.2)

Здесь $N_1 = \dfrac{(2\pi h)^4 R_a R_a}{V_a V_a p_a^2 p_a^2}(p_a, p_a)^2$; V_a и V_a нормировочные объемы волновых функций относительного движения системы до и после реакции (их можно принять равными). Сумма $\sum$ берется по S_1', S_2', J_1, J_2, l_1', l_2', l_1, l_2, L', L, S_1, S_2, q_a, q_b

и по магнитным квантовым числам m_a, m_a', m_b, m_b', u_1', u_2', m_1, m_2, u_1, u_2, M_1, M_2, m_L', m_L, χ_a, χ_b, m_1', m_2', m_a, m_a', m_b, m_b'.

Кроме того, в (6.2) и везде ниже подразумевается сумма (или интегрирование) по α_1 и α_2.

Большинства сумм по магнитным квантовым числам в силу свойств коэффициентов Клебша-Гордана фактически нет, однако их удобно сохранить для дальнейших преобразований формулы (6.4). Формула записана в системе координат центра инерции системы (начало координат в точке центра инерции), но направление оси z пока не фиксируется. Обычно ось z направляют по $\vec{n}_a$.

Выполним суммирование по магнитным квантовым числам. Для этого требуется следующая типовая формула:

$$\sum_{m_1 m_2 \mu_1 \mu_2} C^{s_1 M_1}_{j_1 m_1 \ell_1 \mu_1} C^{s_2 M_2}_{j_2 m_2 \ell_2 \mu_2} C^{J M_J}_{j_1 -m_1 j_2 m_2} C^{L M_L}_{\ell_1 -\mu_1 \ell_2 \mu_2} =$$

$$= (-1)^{s_1 - j_1 - \ell_1} \left[(2s_1+1)(2s_2+1)(2J+1)(2L+1) \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{g, m_g} C^{g m_g}_{s_1 -M_1 s_2 M_2} C^{g m_g}_{J M_J L M_L} X(j_1 J j_2 ; s_1 g s_2 ; \ell_1 L \ell_2) \qquad (6.3)$$

(6.3) получается с помощью соотношений (1),(18) и (19) ссылки [9] , коэффициенты X определены в [10] и [11] С помощью (6.3) сразу выполняется сумма $\sum_1$ по m_A, m_A', m_B, m_B' от произведения первых четырех коэффициентов Клебша-Гордана формулы (6.2) (при этом $\chi_A, \chi_B, m_2', m_2'$ считаются фиксированными) и аналогичная сумма $\sum_2$ по m_a, m_a', m_b, m_b' (заметим, что $m_A - m_B = -m_1'$, $m_a + m_b = m_1$) Если принять во внимание, что

$$C^{L' m_L'}_{\ell_1' \mu_1' \ell_2' -\mu_2'} = (-1)^{L' - \ell_1' - \ell_2'} C^{L' -m_L'}_{\ell_1' -\mu_1' \ell_2' \mu_2'} \text{, то } C^{g' \chi'}_{s_1' -m_1' s_2' m_2'} \text{ и } C^{g \chi}_{s_1 -m_1 s_2 m_2}$$

из сумм $\sum_1$ и $\sum_2$ образуют вместе с оставшимися шестью коэффициентами Клебша - Гордана еще две суммы типа (6.3): сумму по m_1' m_2', μ_1', μ_2' и сумму по m_1 m_2 μ_1' μ_2' (заметим, что

$(-1)^{-m_1 - \mu_1} = (-1)^{M_2}$ и $(-1)^{m_1+\mu_1} = (-1)^{M_1}$)

После этого (6.2) примет вид:

$$T^{q_a q_b}_{\chi_a \chi_b}(\vec{n}_a, p_a, \alpha) = \sum_{q'\chi'} C^{q'\chi'}_{q_a\chi_a q_b\chi_b} \sum_{S_1'S_2'} \left[(2q_a+1)(2q_b+1)(2S_1'+1)(2S_2'+1)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times X(i_a q_a i_a;\ S_1' q' S_2'\ \ i_b q_b i_b)\ T^{q'}_{\chi'}(\vec{n}_a, p_a, S_1' S_2', \alpha)$$

(6.4)

где

$$T^{q'}_{\chi'}(\vec{n}_a, p_a, S_1' S_2', \alpha) = \frac{1}{4\pi} N_1 \left[(2i_a+1)(2i_b+1)\right]^{\frac{1}{2}} \left[(2i_a+1)(2i_b+1)\right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum (-1)^{L'} \left[(2q'+1)(2q+1)\right]^{\frac{1}{2}} (2J_1+1)(2J_2+1)\left[(2l_1'+1)(2l_2'+1)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[(2l_1+1)(2l_2+1)\right]^{\frac{1}{2}} (l_1' l_2' 00 | l_1' l_2' L' 0)(l_1 l_2 00 | l_1 l_2 L 0)\ i^{-l_1'-l_1-l_2'-l_2} \times$$

$$\times \sum_{M_1 M_2} (-1)^{\chi' - M_2 + M_1} (J_1 J_2 -M_1 M_2 | J_1 J_2 J' M')(J_1 J_2 -M_1 M_2 | J_1 J_2 J M) \cdot$$

$$\times (q' L' \chi' -m_L' | q' L' J' M')(q L \chi m_L | q L J M)\cdot X(S_1' q' S_2';\ J_1 J' J_2,\ l_1' L' l_2') \times$$

$$\times X(S_1 q S_2,\ J_1 J J_2,\ l_1 L l_2)(i_a i_b S' l_1' \alpha | R^{J_1 E} | i_a i_b S_1 l_1 \alpha_1) \cdot$$

$$\cdot (i_a i_b S_2' l_2' \alpha | R^{J_2 E} | i_a i_b S_2 l_2 \alpha_2)^{*} \cdot Y_{L' m_L'}(\vec{n}_a) Y_{L m_L}(\vec{n}_a) \times$$

$$\times T^{q}_{\chi}(\vec{n}_a, p_a, S_1, S_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

(6.5)

Сумма берется по $J_1, J_2, l_1', l_2', l_1, l_2, L', L, J', J, S_1, S_2, q$ и по m_L', m_L, M', M, χ, а T^{q}_{χ} равно:

$$T^{q}_{\chi}(\vec{n}_a, p_a, S_1, S_2, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{q_a q_b} \left[(2q_a+1)(2q_b+1)(2S_1+1)(2S_2+1)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\times X(i_a q_a i_a;\ S_1 q S_2:\ i_b q_b i_b) \sum_{\chi_a \chi_b} C^{q\chi}_{q_a\chi_a q_b\chi_b}\ T^{q_a q_b}_{\chi_a \chi_b}(\vec{n}_a, p_a, \alpha_1, \alpha_2)$$

(6.6)

Из (6.4) видно, что поскольку $T^{q_a q_b}_{\chi_a \chi_b}$ вполне определяются величинами $T^{q'}_{\chi'}$, то задача решена, если найдены $T_\chi^{q'}$. С другой стороны, начальное состояние можно выразить через T_χ^{q}, которые полностью определены заданием тензорных моментов $T_{\chi_a\chi_b}^{q_a q_b}$, что видно из (6.5).

При $l_a \neq 0,\ l_b = 0$ соотношение (6.4) принимает вид $T_{\chi_a 0}^{q_a 0} = T_{\chi_a}^{q_a}$ (см. § 8)

При $l_a = 0\ \ l_b = 0$ или $q_a = 0\ \ l_b = 0$ (6.6) обращается в $T_0^0 = T_0^0$.

Из (6.4) и (6.5) следует, что $T_{\chi'}^{q'}$ и T_χ^q преобразуются по неприводимым представлениям группы трехмерных вращений с весами q' и q соответственно.

Так как $(-1)^{-M_2+M_1} = (-1)^{-M}$, то $\sum\limits_{M_1, M_2} (-1)^{-M_2+M_1} \cdot (j_1 j_2 -M_1 M_2 | j_1 j_2 J'M')(j_1 j_2 -M_1 M_2 | j_1 j_2 JM) = (-1)^{-M} \delta_{J'J}\, \delta_{M'M}$

и в выражении (6.5) $J' = J,\ M' = M$ и нет сумм по J' и M' (Заметим, что только здесь мы использовали диагональность R -матрицы по полному моменту количества движения системы и его проекции на ось z.

Коэффициент $(l_1 l_2 00 | l_1' l_2' L'0)$ не равен нулю только при $L' + l_1' + l_2'$ четном. Поэтому

$$(-1)^{L'} i^{-l_1'-l_2'-l_1-l_2} = (-1)^{L'}(-1)^{l_1'+l_2'} i^{l_1'+l_2'-l_1-l_2} = i^{l_1'+l_2'-l_1-l_2}$$

Вместо $T_{\chi'}^{q'}$ и T_χ^q с проекциями χ' и χ относительно произвольной оси z введем соответствующие величины с проекциями τ' и τ на направления $\vec{n}_b$ и $\vec{n}_a$ соответственно [11,13]:

$$\cancel{T_{\tau'}^{q'}(\vartheta_b, \varphi_b, p_b)} \equiv T_{\tau'}^{q'}(\cancel{\vartheta_b, \varphi_b}, p_b) = \sum_{\chi'} T_{\chi'}^{q'}(\vartheta_b, \varphi_b, p_b)\, {}_{\chi'}\mathcal{D}_{\tau'}^{q'}(\varphi_b, \vartheta_b, 0) \tag{6.7}$$

$$T_\chi^q(\vartheta_a, \varphi_a, p_a) \equiv \cancel{T_\chi^q(\vartheta_a, \varphi_a, p_a)} = \sum_\tau T_\tau^q(\vartheta_a, \varphi_a, p_a)\, {}_\chi\mathcal{D}_\tau^{q\,*}(\varphi_a, \vartheta_a, 0) \tag{6.8}$$

где ($\varphi, \vartheta, 0$) – углы Эйлера поворота, совмещающего старую систему координат с новой, у которой ось z' направлена по $\vec{n}$, а ось y' перпендикулярна к оси z и к $\vec{n}$. ~~Углы $\vartheta', \varphi', \dots$ при этом определенным образом выражаются через ϑ_a, φ_a (ϑ_a', φ_a'), что обозначено символом f (и f).~~

$$ {}_{\chi}\mathcal{D}_{\tau}^{q*}(\varphi_a, \vartheta_a, 0) = (-1)^{\tau-\chi}\, {}_{-\chi}\mathcal{D}_{-\tau}^{q}(\varphi_a, \vartheta_a, 0) = (-1)^{\chi+\tau}\, {}_{-\chi}\mathcal{D}_{-\tau}^{q}(\varphi_a, \vartheta_a, 0) \tag{6.9} $$

(заметим, что χ целое)

Подставляя в (6.7) выражение (6.5) для $T_{\chi'}^{q'}$, в котором вместо T_{χ}^{q} подставлено его выражение (6.8) через T_{τ}^{q} после некоторых преобразований (см. [11, 13]) получим:

$$ T_{\tau'}^{q'}(f'(\vartheta_a, \varphi_a), p_a, S_1' S_2' \alpha) \equiv T_{\tau'}'^{q'}(\vartheta_a, \varphi_a, p_a, S_1' S_2' \alpha) = $$

$$ = \frac{1}{(4\pi)^2} N_1 \left[(2i_a+1)(2i_0+1)\right]^{+\frac{1}{2}} \left[(2i_a+1)(2i_b+1)\right]^{-\frac{1}{2}} \times $$

$$ \times \sum i^{\ell_1'+\ell_2'-\ell_1-\ell_2} \times (1R^{J_1 \varepsilon}|)(1R^{J_2\varepsilon}|)^* \left[(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)(2J_1+1)(2J_2+1)(2q'+1)\right]^{\frac{1}{2}} \times $$

$$ \times (2L'+1)^{\frac{1}{2}} \times C_{\ell_1' 0 \ell_2' 0}^{L' 0} (L' q' 0 -\tau' | L' q' J -\tau') X(S_1' q' S_2'; J_1 J J_2; \ell_1' L' \ell_2') \times $$

$$ \times \left[(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2J_1+1)(2J_2+1)(2q+1)\right]^{\frac{1}{2}} (2L+1)^{\frac{1}{2}} C_{\ell_1 0 \ell_2 0}^{L 0} \times $$

$$ \times (L q 0 -\tau | L q J -\tau) X(S_1 q S_2; J_1 J J_2; \ell_1 L \ell_2) \times \tag{6.10} $$

$$ \times \sum_{M,\tau} {}_{M}\mathcal{D}_{\tau'}^{J}(\varphi_a, \vartheta_a, 0)\, {}_{M}\mathcal{D}_{\tau}^{J*}(\varphi_a, \vartheta_a, 0) \cdot T_{\tau}^{q}(\vartheta_a', \varphi_a', p_a, S_1 S_2; \alpha_1, \alpha_2) $$

Сумма берется по $J_1, J_2, \ell_1', \ell_2', \ell_1, \ell_2, S_1, S_2, L', L, q, J$.

Если мы направим ось z по $\vec{n}_a$, то $\vartheta_a = 0$, $\vartheta_a' = \vartheta_a = 0$ (углы φ будем отсчитывать от φ_a, так что положим и $\varphi_a' = \varphi_a = 0$) и ${}_{M}\mathcal{D}_{\tau}^{J*}(0,0,0) = \delta_{M\tau}$

и $\sum_{M} {}_{M}\mathcal{D}_{\tau'}^{J}(\varphi_a, \vartheta_a, 0)\, {}_{M}\mathcal{D}_{\tau}^{J*}(0,0,0) = {}_{\tau}\mathcal{D}_{\tau'}^{J}(\varphi_a, \vartheta_a, 0)$

Отметим, что ввиду сохранения пространственной четности системы числа $-\ell_1+\ell_1'$ и $-\ell_2+\ell_2'$ или оба четны или оба нечетны. Поэтому $i^{\ell_1'+\ell_2'-\ell_1-\ell_2}$ есть действительное число.

Введем определенные в [13] функции G :

$$G_\tau(J_1 l_1 s_1;\ J\quad q;\ J_2 l_2 s_2) =$$

$$= \left[(2l_1+1)(2l_2+1)(2s_1+1)(2s_2+1)(2J_1+1)(2J_2+1)(2q+1)(2J+1)\right]^{\frac{1}{2}} i^{l_1+l_2} \times$$

$$\times \sum_L (l_1 l_2 00|l_1 l_2 L0)(qJ\tau-\tau|qJL0)\,X(J_1 l_1 s_1;\ JLq;\ J_2 l_2 s_2)$$

Учитывая, что $X(s_1 q s_2;\ J_1 J J_2;\ l_1 L l_2) = X(s_1 J_1 l_1;\ qJL;\ s_2 J_2 l_2)$
$= X(J_1 l_1 s_1;\ JLq;\ J_2 l_2 s_2)$

(см. [12]) и

$$X(s_1' q' s_2';\ J_1 J J_2;\ l_1' L' l_2') = X(J_1 l_1' s_1';\ JL'q';\ J_2 l_2' s_2')$$

а также, что

$$(L'q'0-\tau'|L'q'J-\tau') = (-1)^{-q'+\tau'}\sqrt{\frac{2J+1}{2L'+1}}\,(q'J\tau'-\tau'|q'JL'0)$$

$$(Lq0-\tau|LqJ-\tau) = (-1)^{-q+\tau}\sqrt{\frac{2J+1}{2L+1}}\,(qJ\tau-\tau|qJL0)$$

(причем, т.к. q' и q целые, то $(-1)^{-q'} = (-1)^{q'}$ и $(-1)^{q} = (-1)^{q}$)

формулу (6.10) можно записать так:

$$T_\tau^{\prime q'}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_b, \rho_\alpha, s_1' s_2' \alpha) = \frac{1}{(4\pi)^2} N_1 \left[(2l_a+1)(2l_b+1)\right]^{\frac{1}{2}} \left[(2l_a+1)(2l_b+1)\right]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum (-1)^{q'+q+\tau+\tau'} \left[(2s_1+1)(2s_2+1)(2s_1'+1)(2s_2'+1)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$G_{\tau'}(J_1 l_1' s_1';\ J\quad q';\ J_2 l_2' s_2')\, G_\tau^*(J_1 l_1 s_1;\ J\quad q;\ J_2 l_2 s_2) \cdot \qquad (6.11)$$

$$\cdot (l_a l_b s_1' l_1' \alpha_1 | R^{J_1 E} | l_a l_b s_1 l_1 \alpha_1)(l_a l_b s_2' l_2' \alpha_2 | R^{J_2 E} | l_a l_b s_2 l_2 \alpha_2)^* \cdot$$

$$\times\ \mathcal{D}^{(J)}_{\tau\tau'}(\varphi_a, \vartheta_a, 0)\ T_\tau^{q}(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \rho_a, s_1 s_2 \alpha_1 \alpha_2)$$

Сумма берется по $J_1 J_2 l_1' l_2' l_1 l_2 s_1 s_2 J q$ и по τ

Зная $T_\tau^{\prime q'}$, можно по формуле (6.4) получить $T_{\tau_a \tau_b}^{\prime q_a q_b}$

Заметим, что в (6.4) все χ относятся к одной оси z и формула, разумеется, верна при любом выборе этой оси, включая случаи когда она направлена по $\vec{n}_a$.

Т.к. $T^{q_\Lambda q_\theta}_{\chi_\Lambda \chi_\theta}(\vec{p}_\Lambda, \alpha)$ можно рассматривать как матричный элемент той же матрицы плотности конечного состояния, но в другом представлении, то все сказанное в начале § 4 можно повторить для .
Дифференциальное поперечное сечение процесса перехода из начального состояния в интервал состояний $(\vec{p}^0_\Lambda, \vec{p}^0_\Lambda + \Delta\vec{p}_\Lambda)$ и состояния $q_\Lambda = q^0_\Lambda, q_\theta = q^0_\theta$,

$\chi_\Lambda = \chi^0_\Lambda \quad \chi_\theta = \chi^0_\theta, \quad \alpha = \alpha_0$

дается формулой (4.1′) (подразумевая, что интервал $(\vec{p}^0_\Lambda, \vec{p}^0_\Lambda + \Delta\vec{p}_\Lambda)$ содержит тот импульс p'_Λ, который удовлетворяет уравнению (4.13)

$$\Delta\sigma(\vec{p}^0_\Lambda, q^0_\Lambda, q^0_\theta, \chi^0_\Lambda, \chi^0_\theta, \alpha^0) = \frac{V_a}{v T} \int\limits_{\Delta\vec{p}_\Lambda} T^{q^0_\Lambda q^0_\theta}_{\chi^0_\Lambda \chi^0_\theta}(\vec{p}_\Lambda, \alpha^0)\left[\frac{(2\pi h)^3}{V_\Lambda}\right]^{-1} d^3 p_\Lambda =$$

$$= V_a/R_a \int\limits_{\Delta\vec{p}_\Lambda} \frac{(2\pi h)^4 R_\Lambda R_a}{(4\pi)^2 V_a V_\Lambda p_\Lambda^2 p_a^2} (p_\Lambda, p_a)^2 \left(\frac{4 p_a^2}{h^2}\right) \mathcal{T}^{q^0_\Lambda q^0_\theta}_{\chi^0_\Lambda \chi^0_\theta}(\vec{n}_\Lambda, p_\Lambda, \alpha_0) \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(2\pi h)^2 R_\Lambda}{V_\Lambda}\right]^{-1} p_\Lambda^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \left[\frac{2\pi h}{R_\Lambda}\right]^{-1} dp_\Lambda = \mathcal{T}^{q^0_\Lambda q^0_\theta}_{\chi^0_\Lambda \chi^0_\theta}(\vec{n}^0_\Lambda, p'_\Lambda, \alpha_0)\, \Delta\Omega \tag{6.12}$$

введено обозначение $\mathcal{T}^{q_\Lambda q_\theta}_{\chi_\Lambda \chi_\theta} = \frac{h^2}{4 p_a^2}\left[\frac{(4\pi)^2}{N_1}\right] T^{q_\Lambda q_\theta}_{\chi_\Lambda \chi_\theta}$ (6.13)

$\left[(2\pi h)^3 v_\Lambda\right]^{-1}$ и $\left[\frac{2\pi h}{R_\Lambda}\right]^{-1}$ -весовые множители для интегрирования по $\vec{p}_\Lambda$ и p_Λ соответственно.

Среднее значение оператора $\hat{A}^{q\chi}$ (действующего лишь на спиновые переменные) *в том спиновом состоянии, в котором находится частица Λ с импульсом в интервале $(\vec{p}^0_\Lambda, \vec{p}^0_\Lambda + \Delta\vec{p}_\Lambda)$*, ~~и нормированное не на число взаимодействующих в объеме V_a частиц (как в формуле (5.8)), а на поток, определяется по формуле~~:

$$\overline{A}^{q\chi} = A(j, q, \alpha) \frac{\mathcal{T}^{q^0}_{\chi^0}(\vec{n}^0_\Lambda, p'_\Lambda, \alpha_0)}{\mathcal{T}^{\,0}_0(\vec{n}^0_\Lambda, p'_\Lambda, \alpha_0)} \tag{6.14}$$

Так же находятся соответствующие величины для частицы θ. В формулах (6.12) и (6.14) объемы V_a и V_Λ можно устремить к бесконечности.
Заметим, что поскольку после реакции частицы Λ и θ

не взаимодействуют (т.е. они свободные частицы), то для полного описания конечного состояния системы нам нужны лишь тензорные моменты

$$\tau^{q_A 0}_{\chi_A 0} \quad (q_A = 0, 1 \ldots 2i_A \ , \ \chi_A = -q_A, \ -q_A+1, \ldots \ q_A)$$

и $\tau^{0\, q_B}_{0\, \chi_B}$.

Остальные тензорные моменты выражаются через них:

$$\tau^{q_A q_B}_{\chi_A \chi_B} = \frac{1}{\tau^{0\,0}_{0\,0}} \tau^{q_A 0}_{\chi_A 0} \tau^{0\, q_B}_{0\, \chi_B}$$

Заметим еще, что поляризацией удобно назвать не среднее значение вектора спина $\hat{\vec{\sigma}}$, определяемое по формуле (6.14 а величину $\frac{1}{i}\vec{\sigma}(\vartheta,\varphi)$ За счет деления на спин частицы i полностью поляризованные частицы с разными спинами имеют одну и ту же поляризацию, независимо от величины их спина. Определяемая, таким образом , величина поляризации будет числом относительным и не бо́льшим единицы (предполагается, что среднее значение вектора спина измеряется в единицах $\hbar$).

Тензорные моменты $\tau^{q_A q_B}_{\chi_A \chi_B}$ связаны с матрицей плотности не так, как тензорные моменты, введенные Simon'ом (см. поправку к [11, 13] , но нормированы они так же (на поток)). В частном случае, при $q_B = 0$ и $q_b' = 0$ (неполяризованная мишень) из (6.4),(6.11), (6.6) и (6.13) получается формула, отличающаяся от формулы (3.2) в [13] некоторыми множителями. В основном различие обусловлено разницей в определении тензорных моментов [5]. Существенным добавочным новым множителем под знаком суммы по сравнению с (3.2) из [13] является $(-1)^{\tau}$.

---

[5] Эта разница не влияет на конечные результаты (6.14), сравниваемые с опытом, т.к. соответственно изменяется определение $A(j, q, \alpha \quad)$.

§ 7. Рассмотрим аналогично предыдущему[6)] распад покоящейся частицы Λ на две разные частицы с ненулевыми массами со спинами i_1 и i_2. Λ может быть одной из новых нестабильных частиц или ядром. Ось Z системы координат направлена произвольно. Состояние Λ характеризуется матрицей плотности $(m_1\alpha_1|\rho|m_2\alpha_2)$. Конечное состояние описываем тоже матрицей плотности в представлении полного набора $\vec{n}_1$, p_1, $\mathcal{P}^2=0$, $L=0$, $M_L=0$, σ_1 и σ_2 где $\vec{n}_1$ единичный вектор направления $\vec{p}_1$, оператор $\hat{L}=[\hat{\vec{R}}_c\cdot\hat{\vec{\mathcal{P}}}]$ (см.стр. 7), σ_1 и σ_2 проекции спинов i_1 и i_2. Сохранение полного момента количества движения в случае покоящейся частицы означает, что полный момент системы после распада равен спину S_Λ частицы Λ. Как и прежде, движения системы как целого не описываем и находим только диагональные по $\vec{n}_1$, p_1 элементы матрицы плотности относительного движения или

---

6) Может возникнуть вопрос о применимости теории S - матрицы к данному случаю. Однако если ширина энергетического уровня распадающейся частицы много меньше энергии распада (т.е. если частица живет достаточно долго), то мы имеем достаточно определенное начальное состояние системы (конечное состояние вполне определено). Если отсчет времени начинается с момента рождения нестабильной частицы, то употребляемая в этом параграфе буква S (соответственно R) означает $\mathcal{U}(\infty,0)$ где оператор $\mathcal{U}(t_2,t_1)$ удовлетворяет уравнению $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,0)=H_{взаим.}\mathcal{U}(t,0)$. Если известно состояние системы в момент t_1, то волновая функция системы в момент t_2 равна

$$\mathcal{U}(t_2,t_1)\Psi_{t_1}$$

соответствующего тензорного момента частицы после распада:

$$T^{q_1 q_2}_{\chi_1 \chi_2}(\vec{n}_1, p_1, \alpha) = [(2i_1+1)(2i_2+1)]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{\sigma_1 \sigma_1' \sigma_2 \sigma_2'} (-1)^{-i_1-\sigma_1} C^{q_1 \chi_1}_{i_1 -\sigma_1 i_1 \sigma_1'} (-1)^{-i_2-\sigma_2} C^{q_2 \chi_2}_{i_2 -\sigma_2 i_2 \sigma_2'} \times$$

$$\times (\vec{n}_1\, p_1\, \sigma_1\, \sigma_2\, \alpha \,|\, \rho' \,|\, \vec{n}_1\, p_1\, \sigma_1'\, \sigma_2'\, \alpha) \tag{7.1}$$

Формула (4.11) для этой задачи имеет вид:

$$(\vec{n}_1\, p_1\, \sigma_1\, \sigma_2\, \alpha \,|\, \rho' \,|\, \vec{n}_1\, p_1\, \sigma_1'\, \sigma_2'\, \alpha') =$$

$$= (\vec{n}_1 p_1 \sigma_1 \sigma_2 \alpha \,|\, R \,|\, S_\Lambda m_1 \alpha_1)(\vec{n}_1 p_1 \sigma_1' \sigma_2' \alpha' \,|\, R \,|\, S_\Lambda m_2 \alpha_2)^* (m_1 \alpha_1 |\rho| m_2 \alpha_2) \tag{7.2}$$

где $$(\vec{n}_1\, p_1\, \sigma_1\, \sigma_2 \alpha \,|\, R \,|\, S_\Lambda m \alpha_1) = \frac{(2\pi h)\sqrt{R}}{\sqrt{v_1}\; p_1} \times$$

$$\times \sum_{J_1 \ell_1' s_1' M_1 m \mu_1' m_1'} i^{-\ell_1'} Y_{\ell_1' \mu_1'}(\vec{n}_1)(p_1|E)\, C^{s_1' m_1'}_{i_1 \sigma_1 i_2 \sigma_2}\, C^{J_1 M}_{s_1' m_1' \ell_1' \mu_1'} \times$$

$$\times (i_1 i_2 s_1' \ell_1' \alpha \,|\, R^{S_\Lambda E_\Lambda} | \alpha_1)\, \delta_{J_1 S_\Lambda}\, \delta_{Mm}\, (E|E_\Lambda) =$$

$$= N \sum_{s_1' \ell_1' m_1' \mu_1'} i^{-\ell_1'} Y_{\ell_1' \mu_1'}(\vec{n}_1) \cdot C^{s_1' m_1'}_{i_1 \sigma_1 i_2 \sigma_2}\, C^{S_\Lambda m}_{s_1' m_1' \ell_1' \mu_1'} \times \tag{7.3}$$

$$\times (i_1 i_2 s_1' \ell_1' \alpha \,|\, R^{S_\Lambda E_\Lambda} | \alpha_1)\,(p_1|E_\Lambda)$$

Символ $(p_1|E_\Lambda)$) равен единице, если p_1 есть корень уравнения $\sqrt{p_1^2c^2 + \varkappa_1^2 c^4} + \sqrt{p_1^2 c^2 + \varkappa_2^2 c^4} = E_\Lambda = \varkappa_\Lambda c^2$ и нулю, если p_1 этому уравнению не удовлетворяет. Из (7.1), (7.2), (7.3) и (6.1) следует, что

$$T^{q_1 q_2}_{\chi_1 \chi_2}(\vec{n}_1, p_1, \alpha) = N^2 [(2i_1+1)(2i_2+1)]^{\frac{1}{2}} (p_1|E_\Lambda)^2 \cdot$$

$$\sum (-1)^{-i_1-\sigma_1-i_2-\sigma_2} C^{q_1 \chi_1}_{i_1 -\sigma_1 i_1 \sigma_1'}\, C^{q_2 \chi_2}_{i_2 -\sigma_2 i_2 \sigma_2'}\, C^{s_1' m_1'}_{i_1 \sigma_1 i_2 \sigma_2}\, C^{s_2' m_2'}_{i_1 \sigma_1' i_2 \sigma_2'} \cdot$$

$$\times C^{S_\Lambda m_1}_{s_1' m_1' \ell_1' \mu_1'} \cdot C^{S_\Lambda m_2}_{s_2' m_2' \ell_2' \mu_2'}\, C^{L' m_2'}_{\ell_1' \mu_1' \ell_2' -\mu_2'} (-1)^{-\mu_2'} (-1)^{\ell_2'} i^{-\ell_1' - \ell_2'} \times$$

$$\times [(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)]^{\frac{1}{2}} [4\pi(2L+1)]^{-\frac{1}{2}} (\ell_1' \ell_2' 0 0 | \ell_1' \ell_2' L' 0) \times \tag{7.4}$$

$$\times (i_1 i_2 s_1' \ell_1' \alpha | R^{s_A E_A} | \alpha_1)(i_1 i_2 s_2' \ell_2' \alpha | R^{s_A E_A} | \alpha_2)^* \cdot$$

$$\cdot Y_{L' m_L'}(\vec{n}_1)\,(m_1 \alpha_1 | \rho | m_2 \alpha_2)$$

сумма берется по $s_1', \ell_1', s_2', \ell_2', L'$; $\delta_1, \delta_1', \delta_2, \delta_2'$, $m_1', m_2', \mu_1', \mu_2', m_L', m_1, m_2$.

Сумма $\sum_\delta$ по $\delta_1, \delta_1', \delta_2, \delta_2'$ от произведения первых четырех коэффициентов Клебша-Жордана типовая (см. (6.3)) Сумма по $m_1, m_2', \mu_1', \mu_2'$ от произведения коэффициента $(s_1' s_2' - m_1' m_2' | s_1' s_2' q' \chi')$ из $\sum_\delta$ и следующих трех коэффициентов Клебша - Жордана из (7.4) тоже сводится к типовой сумме (Для этого $C^{L' m_L'}_{\ell_1' \mu_1' \ell_2' -\mu_2'}$ надо представить в виде $(-1)^{L'-\ell_1'-\ell_2'} C^{L' -m_L'}_{\ell_1' -\mu_1' \ell_2' \mu_2'}$)

После этого (7.4) примет вид:

$$T^{q_1 q_2}_{\chi_1 \chi_2}(\vec{n}_1, p_1, \alpha) = \sum_{q' \chi'} C^{q' \chi'}_{q_1 \chi_1 q_2 \chi_2} \sum [(2q_1+1)(2q_2+1)]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times [(2s_1'+1)(2s_2'+1)]^{\frac{1}{2}} X(i_1 q_1 i_1 ; s_1' q' s_2' ; i_2 q_2 i_2)\, T^{q'}_{\chi'}(\vec{n}_1, p_1, \alpha, s_1' s_2') \quad (7.5)$$

где

$$T^{q'}_{\chi'}(\vec{n}_1, p_1, \alpha, s_1' s_2') = N^2 [(2i_1+1)(2i_2+1)]^{\frac{1}{2}} (p_1 / E_A)^2 \times$$

$$\times \sum_{\ell_1' \ell_2' m_1 m_2 L' m_L'} (|R^{s_A E_A}|)(|R^{s_A E_A}|)^* (-1)^{L'} i^{-\ell_1' - \ell_2'} (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\cdot [(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)(2q'+1)]^{\frac{1}{2}} (2s_A+1) C^{L'0}_{\ell_1' 0 \ell_2' 0} \sum_{q_A \chi_A} X(s_1' q' s_2' ; s_A q_A s_A ; \ell_1' L' \ell_2') \quad (7.6)$$

$$\cdot C^{q_A \chi_A}_{q' \chi' L' -m_L'} (-1)^{m_L'} Y_{L' m_L'}(\vec{n}_1) (-1)^{-s_A - m_1} C^{q_A \chi_A}_{s_A -m_1 s_A m_2} (m_1 \alpha_1 | \rho | m_2 \alpha_2)$$

Из (7.6) видно, что для описания процесса непосредственно нужно не $(m_1 \alpha_1 | \rho | m_2 \alpha_2)$, а

$$\sqrt{2s_A+1} \sum_{m_1 m_2} (-1)^{-s_A - m_1} (s_A s_A - m_1 m_2 | s_A s_A q_A \chi_A)(m_1 \alpha_1 | \rho | m_2 \alpha_2) = T^{q_A}_{\chi_A}(\alpha_1, \alpha_2)$$

т.е. соответствующий тензорный момент.

$$N^2 = \frac{(2\pi h)^2}{v_1} \frac{R}{p_1^2}$$

Как и в § 6 вместо $T_{\chi'}^{q'}$ введем $T_{\tau'}^{q'}$, у которого проекция момента τ' берется относительно направления $\vec{n}_1$:

$$T_{\chi'}^{q'}(\vec{n}_1, p_1, \alpha) = \frac{1}{4\pi} N^2 (p_1 | E_\Lambda)^2 [(2i_1+1)(2i_2+1)]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\ell_1' \ell_2' q_\Lambda \chi_\Lambda} (|R^{s_\Lambda E_\Lambda}_{1}|)(|R^{s_\Lambda E_\Lambda}|)^* (-1)^{q'+\tau'} i^{\ell_1'+\ell_2'} \cdot$$

$$\cdot [(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)(2s_\Lambda+1)(2q_\Lambda+1)(2q'+1)]^{\frac{1}{2}} \sum_{L'} C^{L'0}_{\ell_1' 0 \ell_2' 0} \cdot$$

$$\cdot C^{L'0}_{q'\tau' q_\Lambda \tau'} X(s_1' q' s_2' ; s_\Lambda q_\Lambda s_\Lambda ; \ell_1' L' \ell_2') \, {}_{\chi_\Lambda}\mathcal{D}^{q_\Lambda}_{\tau'}(\varphi_1, \vartheta_1, 0) \, T^{q_\Lambda}_{\chi_\Lambda}(\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} N^2 (p_1 | E_\Lambda)^2 [(2i_1+1)(2i_2+1)]^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell_1' \ell_2' q_\Lambda \chi_\Lambda} (|R^{s_\Lambda E_\Lambda}|)(|R^{s_\Lambda E_\Lambda}|)^* \cdot$$

$$\cdot (-1)^{q'+\tau'} [(2s_1'+1)(2s_2'+1)(2s_\Lambda+1)]^{-\frac{1}{2}} \cdot G_{\tau'}(s_\Lambda \ell_1' s_1' ; q_\Lambda \; q' ; s_\Lambda \ell_2' s_2') \cdot$$

$$\cdot {}_{\chi_\Lambda}\mathcal{D}^{q_\Lambda}_{\tau'}(\varphi_1, \vartheta_1 ; 0) \cdot T^{q_\Lambda}_{\chi_\Lambda}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{7.7}$$

Полная вероятность такого распада, при котором частица 1 испускается в интервал состояний $(\vec{p}_1^{\,\circ}, \vec{p}_1^{\,\circ} + \Delta \vec{p}_1)$, ~~а остальные переменные, характеризующие частицы 1 и 2, принимают значения~~ $\cancel{q_1^\circ, q_2^\circ, \chi_1^\circ, \chi_2^\circ}$ ~~и~~ $\cancel{\alpha_0}$ определяется величиной

$$\mathcal{T}^{q_1^\circ q_2^\circ}_{\chi_1^\circ \chi_2^\circ}(\vec{n}_1^{\,\circ}, p_1^\circ, \alpha^\circ) \Delta\Omega \equiv [N^2 (p_1 | E_\Lambda)^2]^{-1} \, T^{q_1^\circ q_2^\circ}_{\chi_1^\circ \chi_2^\circ}(\vec{n}_1^{\,\circ}, p_1^\circ, \alpha^\circ) \Delta\Omega$$

где $\Delta\Omega$ - телесный угол интервала $(\vec{p}_1^{\,\circ}, \vec{p}_1^{\,\circ} + \Delta \vec{p}_1)$

§ 8. Частные случаи. Пусть $i_1 \neq 0$ $i_2 = 0$ тогда $\lambda(i_1 q_1 i_1 \, s_1' q' s_2' \, i_2 q_2 i_2)$ из (7.5) имеет вид $\lambda(i_1 q_1 i_1 \, s_1' q' s_2' \, 0 q_2 0)$. Так как $q_2 \le 0+0$, то $q_2 = 0$. Затем из триад $(i_1, s_1', 0)$, $(i_1 \; s_2' \; 0)$ и $(q_1, q', 0)$ следует, что $s_1' = s_2' = i_1$ (т.к. должно быть $i_1 \le s_1' + 0$ и $s_1' \le i_1 + 0$) и $q' = q_1$.

Если измеряется только угловое распределение протонов распада, то $q_1 = \tau_1 = 0$; $\ell' + \ell' + q_\Lambda$ должно быть четным числом (см. (В.4) в [14]), откуда q_Λ -четное. Из триады ($S_\Lambda, q_\Lambda, S_\Lambda$) следует, что $q_\Lambda \leq 2S_\Lambda$, но так как S_Λ -полуцелое, то $q_\Lambda \leq 2S_\Lambda - 1$

Далее

$$ {}_{\chi_\Lambda}\mathcal{D}_0^{q_\Lambda}(\varphi, \vartheta, 0) = \left[\frac{4\pi}{2q_\Lambda + 1}\right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{\chi_\Lambda} Y_{q_\Lambda - \chi_\Lambda}(\vartheta, \varphi) $$

(см. [11] р. 1041) и угловое распределение продуктов распада Λ^0-частицы имеет вид

$$ \tau(\vartheta, \varphi) = N' \sum_{q_\Lambda = 0}^{2S_\Lambda - 1} \left[(2S_\Lambda + 1)(2q_\Lambda + 1)\right]^{-\frac{1}{2}} G_0\left(S_\Lambda \ell' \tfrac{1}{2}; q_\Lambda 0; S_\Lambda \ell' \tfrac{1}{2}\right) $$

$$ \times \sum_{\chi_\Lambda} (-1)^{\chi_\Lambda} Y_{q_\Lambda - \chi_\Lambda}(\vartheta, \varphi) T_{\chi_\Lambda}^{q_\Lambda} \qquad (8.2) $$

где N' - числовой множитель.

Оно полностью определяется спином S_Λ, четностью Λ^0 - частицы и $T_{\chi_\Lambda}^{q_\Lambda}$ (ср. [14])

В заключение выражается благодарность Чл.корр.АН СССР МАРКОВУ М.А. за постоянный интерес к работе и ЗАСТАВЕНКО Л.Г. за обсуждение ряда вопросов, связанных с теорией представлений группы вращений.

ЭФЛАН

М. Ширков.
декабрь 1955 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П.А.М. Дирак. Основы квантовой механики. изд.2. Ленинград 1937 Москва.

[2] Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. Москва 1949 § 44.

[3] Möller Det Kgl. Danske V.S. M.-f. 1945 v 23 n° 1

[4] Lippmann B. A. and Schwinger J. Phys. Rev. 79, № 3 p.473 (1950).

[5] Fabri E. Nuovo Cimento v XI N 5 p. 481 (1954)

[6] Блатт Дж. и Биденхарн Л. Сб. "Проблемы современной физики". 1955 № 6 стр. 8.
Rev. Mod. Phys. v 24 № 4 (1952)

[7] Huby. Proc. phys soc. 67 N 420 A p 1103 (1954)

[8] Racah G. Phys. Rev. 62 N 9-10 p 442 (1942)

[9] Biedenharn L.C, Blatt J.M, Rose M.E
Rev. Mod. Phys. 24 N 4 p 249 (1952)

[10] Arima, Horie and Tanabe Prog theor phys.
v 11 № 2 p 143 (1954)

[11] Simon A. and Welton T.A. Phys. Rev 90 № 6
p. 1036 (1953) и Phys. Rev. 93 № 6 p 1935 (1954)

[12] Гельфанд И.М. и Шапиро З.Я. Успехи математических наук т.VII вып. 1 (47) (1952) стр. 78-80.

[13] Симон А. сб. "Проблемы современной физики" 1955 № 6 стр. 21. Phys. Rev. 92 p 1050 (1953) и Phys. Rev. 93 № 6 p 1435 (1954) (errata

[14] Treiman S.B and oth. Phys. Rev 97 N6, p 244 (19

[15] Biedenharn L.C. and Rose M.E. Rev. Mod. Phys. 1953 v 25 № 3 p 735.