

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория ядерных проблем

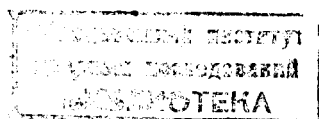
СЗ46.5+Ц840

11 20

Д. Нягу

51-1711

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРА K_2^0



г. Дубна, 1964 г.

С. 2. 673

АННОТАЦИЯ

В отчете описан метод и программа для статистического определения спектра K_2^0 - мезона на основе идентифицированных γ^0 - событий от K_2^0 - распада.

Известно, что долгоживущий K^0 - мезон распадается на три частицы по одной из следующих схем распада:

$$(K_{e3}) \quad K_2^0 \rightarrow \pi + e + \nu,$$

$$(K_{\mu 3}) \quad K_2^0 \rightarrow \pi + \mu + \nu,$$

$$(K_{3\pi}) \quad K_2^0 \rightarrow \pi + \pi + \pi^0.$$

(I)

В трековых камерах эти распады регистрируются в виде V^0 - событий и поэтому обмер стереофотографий дает значения всего шесть кинематических параметров распада: два импульса (P_+ , P_-) и четыре угла (θ_+ , ψ_+ , θ_- , ψ_-)^{ж)}, относящихся к заряженным продуктам распада. Отсутствие информации о кинематических характеристиках нейтральной распадной частицы приводит к некой неопределенности в изучении распадных свойств K_2^0 - мезона неопределенность, которую нельзя считать, если заранее неизвестна энергия K_2^0 - мезона. Действительно, даже в предположении, что из дополнительной информации^{жж)} известна какова из схем распада (I) осуществлялась на опыте и что из постановки опыта известно направление движения K_2^0 - мезона, применение законов сохранения сводится в конечном счете к решению квадратного уравнения. Аргументом этого уравнения могут служить разные параметры распада (энергия или скорости K_2^0 - мезоны, импульс или направление вылета нейтральной распадной частицы в системе лаборатория (слаб.)) и в общем случае, уравнение имеет два действительных, положительных корня. По сути дела это означает, что в системе покоя

ж) Углы θ_{\pm} и ψ_{\pm} представляют собой полярный и азимутальный угол в произвольно-выбранной системе координатных осей.

жж) см. § 3.

K_2^0 - мезона (с.ц.м.) существует две конфигурации*) распада совместимые - в смысле преобразования Лоренца со схемой распада (I) и с данными в слаб., V^0 - событием. Если использовать графический метод эту неопределенность можно выразить, например, следующим образом.

Пусть \vec{P}_t - "суммарный" импульс V^0 - события

$$\vec{P}_t = \vec{P}_+ + \vec{P}_- \quad (2)$$

ϕ - угол вылета \vec{P}_t по отношению к направлению движения K_2^0 - мезона **). Если известна схема распада, то импульс нейтральной распадной частицы, в с.ц.м., $|\vec{P}_N^*|$ определяется однозначно, исходя из Лоренцового инварианта $M_t^2 = (E_+ + E_-)^2 - P_t^2$, где E_+, E_- энергии распадных частиц. В системе покоя K_2^0 - мезона

$$M_t^2 = (M_K - E_N^*)^2 - P_N^{*2} \quad \text{откуда:}$$

$$P_N^* = \frac{\sqrt{[(M_K - M_t)^2 - m_N^2][M_K + M_t]^2 - m_N^2}}{2M} \quad (3)$$

где $M_K \approx 498 \text{ MeV}$ - масса K_2^0 - мезона, и m_N - масса нейтральной распадной частицы ***)

*) Под "конфигурацией распада", здесь и в дальнейшем подразумеваем ансамбль трех векторов ($\vec{P}_+, \vec{P}_-, \vec{P}_N$); "конфигурацией V^0 -события" называем ансамбль двух векторов (\vec{P}_+, \vec{P}_-).

**) Согласно нашему упрощающему предположению, это направление считаем известным из постановки опыта.

***) Звездочкой отмечены величины, относящиеся к системе покоя K_2^0 - мезона.

Очевидно, суммарный импульс заряженных частиц имеет такое же значение (3), но векторы \vec{P}_N^* и \vec{P}_t^* направлены в противоположные друг-другу стороны.

Так как преобразование Лоренца сохраняет азимутальные углы, векторы $\vec{P}_t, \vec{P}_t^*, \vec{P}_N^*$ - компланарны и их можно изобразить на плоском рисунке (рис. I).

Задача определения конфигурации распада сводится, в конечном счете, к определению угла вылета ϕ^* импульса \vec{P}_t^* . Если бы для этого угла V^0 -события определяло бы одно единственное значение (ϕ^*), то конфигурация распада была бы полностью определена как в слаб., так и в с.ц.м., ибо из преобразования $\phi^* = f(\phi)$ можно было бы получить скорость K_2^0 -мезона (V_K), а из равенства

$\phi_N^* = (\pi - \phi^*)$, можно было бы получить угол вылета нейтральной частицы в (слаб.). Однако V^0 -событие представляет недостаточно информации для такого определения угла ϕ^* ; действительно, зная значения (P_t, ϕ) требуется определить значения (P_t^*, ϕ^*) так, чтобы одни получились из других путем преобразования Лоренца с соблюдением соотношения (3). Но в этих условиях преобразование Лоренца устанавливает лишь, что угол ϕ^* должен быть таким, чтобы сохранялись поперечные составляющие импульсов \vec{P}_t^* и \vec{P}_t , то есть:

$$P_t^* \sin \phi^* = P_t \sin \phi, \quad (4)$$

другими словами, устанавливает лишь, что концы векторов \vec{P}_t и \vec{P}_t^* находятся на одной прямой (Δ), параллельной направлению движения K_2^0 -мезона. Однако, в общем случае прямая (Δ) пересекает окружность (R) - радиусом P_N^* - в двух точках, A_I и $A_{\bar{I}}$,

определяя, таким образом, две возможные ориентации вектора \vec{P}_t^* (\vec{P}_{tI}^* , \vec{P}_{tII}^*) и два значения угла Φ^* (Φ_I^* и Φ_{II}^*). Каждому из этих углов соответствует вполне определенная конфигурация распада в слаб., причем, следует заметить, что обеим конфигурациям в сим соответствует одно и то же V^0 - событие в слаб., а отличие между конфигурациями и распада в слаб. состоит лишь в ориентации и величина импульса нейтральной частицы распада. Из этого обстоятельства нетрудно вывести следующее заключение: так как векторы \vec{P}_{tI}^* и \vec{P}_{tII}^* путем некоторых Лоренцовых преобразований (L_I и L_{II}) приводят к одному и тому же вектору \vec{P}_t , следует что, существует (третье) лоренцовое преобразование (L), преобразующее векторы \vec{P}_{tI}^* и \vec{P}_{tII}^* один в другой. Значения V_{KI} и V_{KII} скорости K_2^0 - мезона, преобразующие конфигурации (I) и (II) в одно и то же V^0 - событие разные, но примчательно, что преобразование (L) не зависит от V_{KI} и V_{KII} а лишь от значения $\sin \Phi^*$. Это легко видеть на рис. I, из которого следует, что (независимо от конфигурации V^0 - события,) \vec{P}_{tI}^* и \vec{P}_{tII}^* являются один отрижением другого относительно линии BB' .

Что касается скорости V преобразования (L), ее легко вывести, если заметить, что преобразование (L) таково, что изменяет знак продольных составляющих, оставляя неизменным их абсолютное значение.

$$V = \frac{2E_t^* P_t^* \cos \Phi^*}{E_t^{*2} + P_t^{*2} \cos^2 \Phi^*} = \frac{2(M_K - E_N^*) P_N^* \cos \Phi^*}{(M_K - E_N^*)^2 + P_N^{*2} \cos^2 \Phi^*} \quad (5)$$

Между векторами \vec{P}_{NI}^* и \vec{P}_{NII}^* также существует преобразование Лоренца, но скорость преобразования равна ($-V$), так что если говорить о конфигурациях (I) и (II) в целом, то между

ими нет единого преобразования Лоренца.

Подводя итоги - неопределенность которая возникает при исследовании K_2^0 - мезонов с помощью V' - события даже в предположении, что известна схема распада и направление движения K_2^0 - мезона, можно выразить одним из следующих положений:

1) Можно найти два вектора \vec{P}_N (в слаб.) каждый из которых "вместе с V^0 - событием" удовлетворял бы всем кинематическим условиям распада K_2^0 - мезона;

2) Можно найти две конфигурации (I и II) в сдм при данном P_N^* каждая из которых при помощи некоторых Лоренцовых преобразований (Λ_I и Λ_{II}) привела бы к одному и тому же V^0 - событию;

3) Данное событие определяет два значения скорости K_2^0 - мезона (V_I и V_{II}).

Подчеркивая, что все эти выражения между собой эквивалентны и что неопределенность выраженная ими связана именно с недостатком информации относительно распада, следует указать:

а) практически, при исследовании распадных свойств K_2^0 - мезона, неопределенность выявляется, прежде всего в виде двузначности энергии K_2^0 - мезона;

б) хотя обе конфигурации (I и II), являются "разрешенными" - то есть могут осуществляться при распаде K_2^0 - мезона и хотя обработка каждого V^0 - события приводит к двум (парным) конфигурациям, тем не менее их распределения не являются обязательно идентичными.

Последнее обстоятельство и выражает то главное затруднение, которое возникает при исследовании K_2^0 - мезонов в трековых камерах: наряду с "истинной" конфигурацией, подсчет V^0 - события дает авто-

матически и вторую, "ложную" конфигурацию и в самом ν^0 -событии вообще нет признаков, указывающих, какая из этих конфигураций на самом деле осуществилась.

Естественным выходом из этого затруднения является такая постановка опыта, при которой заранее известно "истинное" значение энергии K_2^0 - мезона. Этого можно добиться, например, исследуя моноэнергетические K_2^0 - мезона. Однако, такие опыты трудно осуществить и чаще всего экспериментатор вынужден искать другие (обходные) пути выделения "истинных" конфигураций.

Можно указать, по крайней мере, два таких способа, оба основанные на выборочной обработке K_2^0 - распадов.

а) обрабатывать только те распады, для которых получена дополнительная информация относительно нейтральной распадной частицы. Это случается при $K_{3\pi}$ - распаде, когда π^0 - мезон, в свою очередь, распадается через пару Далица (см. например, работу [1]). Эти распады регистрируются в виде четырехлучевых событий, $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$ и это уже достаточно для однозначного восстановления конфигурации распада. Однако, подобные события составляют всего 5% из общего числа регистрируемых распадов и, кроме этого, таким образом полученная информация может служить только для исследования данного

$K_{3\pi}$ - распада.

б) Для некоторых ν^0 - событий двузначность определения конфигурации снимается сама по себе: Речь идет, в первую очередь о тех

ν^0 - событиях, для которых выполняется условие $P_t \leq P_N^*$

Из Рис.2 видно, что в этих случаях вектор \vec{P}_t ориентирован внутри угла ω образуемыми векторами \vec{P}_{tI}^* и \vec{P}_{tII}^* и поэтому, один из векторов скорости (\vec{v}_I) направлен противоположно "истинному" из-

вестному направлению движения K_2^0 - мезона; тем самым, конфигурацию (I) следует признать "нефизической".

Аналогичная ситуация возникает также когда v_{Γ} имеет очень большое значение, заведомо превышающее максимальное значение скорости K_2^0 -мезонов *) из пучка.

Этот метод отбора событий может быть применен для изучения всех систем распада (I). Однако он имеет явно выборочный характер и, кроме того, его эффективность очень мала: условие $P_{\Gamma} \leq P_N^*$ выполняется только для нескольких процентов из числа N^0 - событий.

Как видно, для "чистого" выделения истинных конфигураций распада придется выбросить из рассмотрения подавляющее большинство зарегистрированных N^0 - событий, не говоря уже о том, что следует строго учитывать характер выборки, которая возникает при этом.

Насколько нам известно, до сих пор физики обходили решение этого вопроса, тем самым приводя в жертву внутреннюю когерентность рассуждений; например, авторы /2/ пользуются в каждом отдельном случае неким полуэмпирическим алгоритмом для решения вопроса о том, какую из конфигураций следует считать "истинной". Но если в некоторых задачах неточное определение "истинной" конфигурации может и не исказить качественно полученный результат, в других - такое знание спектра K_2^0 - мезонов является просто необходимым (см. например 3).

§ 2. В настоящем отчете излагается статистический метод определения спектра K_2^0 - мезона, основанный на моделировании конфигураций распада методом Монте-Карло. Преимущество этого метода состоит в том, что он максимально эффективно использует экспе -

*) Определить $\{v_k\}_{max}$ всегда возможно, исходя из реакции рождения K_2^0 - мезонов.

риментальный материал, ибо включает в рассмотрение все идентифицированные V^0 - события. Из недостатков, подчеркиваем главный: выделение спектра производится статистически из "смеси", в которой "ложные" конфигурации настолько-же многочисленны, как и "истинные". Это приводит к тому, что чувствительность метода зависит от вида самого спектра, причем, она выше для более энергичной части спектра.

Отчет описывает программу для машинного решения поставленной задачи и служит одновременно инструкцией к эксплуатации этой программы.

Отчет следует рассматривать вместе с составленными ранее отчетами (4+6) и как часть описания экспериментального метода изучения распадных свойств K_2^0 - мезонов, проводимого в течение ряда лет (1959-1964 гг) "Объединенной группой K_2^0 -", в составе сотрудников Лаборатории ядерных проблем, Лаборатории высоких энергий и Института физики Академии Наук Грузинской ССР.

§3. Идентификация схемы распада представляет собой операцию, которую в общем случае нельзя свести к простому кинематическому об-счету V^0 - события, ибо как правило, V^0 - событие удовлетворяет кинематическим условиям не одной, а нескольких из схем распада (I). Подробно этот вопрос освещался в отчете (4) где излагаются кинематические критерии обработки V^0 - событий, но подчеркивается, что удовлетворение этим критериям следует рассматривать, как необходимым, но не как достаточным условием идентификации какой-либо из схем (I).

Решающий в идентификации схемы распада является побочная не кинематического характера информация относительно природы распад-ных частиц. Нами использовались два типа такой информации: сброс импульса при прохождении распадных частиц через свинцовую пластинку

и ионизационные измерения. Оба эти способа приводят (с большой достоверностью) к идентификации распадных электронов, т.е. к выделению распадов по схеме $K_2^0 \rightarrow \pi + e + \nu$, однако они носят сильно выборочный характер. Методом сброса импульса идентифицируются те электроны, которые проходят через свинцовую пластинку, то есть, те которые удовлетворяют определенным геометрическим условиям (импульс \vec{P}_e направлен в ограниченном телескопе угле). Ионизационные измерения выделяют только малоэнергичные электроны, т.е. также приводят к выборочной идентификации K_{e3} -распада. Описание всех выборок связанных с условиями регистрации и идентификации ν^0 -событий приводится в отчете [5], где описывается также и программа для моделирования этих условий методом случайных испытаний. На "Выход" эта программа выдает в любом количестве фиктивные ν^0 -события, которые удовлетворяют как теоретическим предсказаниям, так и условиям, при которых подобные события действительно идентифицировались бы в камере Вильсона.

В "паспортах" этих событий вычислены как величины относящиеся к "истинной" так и к "ложной" конфигурациям, причем, из самих условий моделирования их можно разделить в чистом виде.

В качестве исходных данных для подобного моделирования следует указать:

- а) энергия K_2^0 - мезонов;
- б) схема распада;
- в) условия регистрации и идентификации ν^0 -событий.

Из всех этих данных заранее неизвестным является лишь энергия K_2^0 - мезонов; как указывалось в § 2, это и приводит к тому, что в экспериментальном материале нельзя выделить "истинные" конфигурации

из смеси с "ложными".

Допустим однако, что при розыгрыше мы фиксировали энергии K_2^0 -мезонов и машинным способом получены γ_0 паспортов фиктивных V^0 -событий. В каждом паспорте, наряду со значением E_k энергии, при которой производился розыгрыш, указывается также каково было бы "ложное" значение \tilde{E}_k , которое получил бы экспериментатор, если подобное событие было бы зарегистрировано в камере и было-бы обработано тем же самым способом, которым обрабатываются настоящие V^0 -события. Если теперь из каждого паспорта извлечь значения \tilde{E}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, \gamma_0$) и строить гистограмму $M = f(\tilde{E}_k)$ тем самым получим закон распределения "ложных" значений \tilde{E} , при фиксированном E . В § 2 было сказано, что переход от "истинной" к "ложной" конфигурации осуществляется через значение v , (5), которое вообще и не зависит от E_k : казалось бы, что построить распределение $N = f(\tilde{E})$ можно и без розыгрыша. Однако, существенным фактором является тот, что моделирование методом случайных испытаний учитывает выборки при регистрации и идентификации, что очень трудно учесть аналитически.

Если на той же гистограмме занести еще и значения E , то получим гистограмму Γ_E (см. Рис. 3), представляющую собой смесь "истинных" и "ложных" значений энергий при фиксированном E_k . Из самого изложения следует, что таким образом организованный метод случайных испытаний позволяет получить с любой степенью точности *) закон "размазывания" каждой отдельной "линии" E_k из спектра K_2^0 -мезонов, если на одной и той же гистограмме занести как "истинное", так и "ложные" значения энергии.

*) То есть, с любым объемом статистики.

Предложенный метод определения спектра K_2^0 -мезонов состоит в следующем:

Пусть $W = f(E_k)$ "истинный", (неизвестный) энергетический спектр влетающих в камеру K_2^0 - мезонов. Из побочных рассуждений, всегда можно определить некую верхнюю границу $E_{k \max}$ этого спектра. Разделим тогда весь интервал возможных значений энергии $(M_k + E_{k \max})$ на k подинтервала с шириной $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$. Переходя к дискретному представлению спектра, обозначим $\varphi(E_i)$ - вес энергии E_i :

$$\varphi(E_i) = \int_{E_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{E_i + \frac{\Delta_i}{2}} f(E) dE \quad (6)$$

т.е. $\varphi(E_i)$ - нормализованное число частиц с энергией в интервале $(E_i - \frac{\Delta_i}{2}) + (E_i + \frac{\Delta_i}{2})$.

Независимо от каких либо экспериментальных данных, а лишь с учетом условий регистрации и идентификации, производим розыгрыш V^0 - событий для каждой из энергии E_1, E_2, \dots, E_k . В результате этих розыгрышей получим:

1) эффективность (γ_i) регистрации и идентификации K_2^0 - распадов при данном значении E_i (см. [5]).

2) Гистограмму Γ_{E_i}

С другой стороны, на основании идентифицированных на опыте K_2^0 - распадов строим суммарное распределение (ГЭСН) всех значений E_i и \tilde{E}_i , полученных при кинематической обработке этих событий.

Определим теперь набор k нормализованных чисел $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$

так, чтобы взвешенная гистограмма

$$\Sigma = \sum_{i=1}^k n_i \Gamma_{\xi_i} \quad (7)$$

"наилучшим" образом аппроксимировала гистограмму Гэксп. Ясно, что набор чисел является оценкой "истинного" энергетического спектра, (в дискретном представлении), тех K_2^0 -распадов, которые регистрировались и идентифицировались данной методикой. С учетом эффективностей γ_i , оценкой спектра влетающих в камеру K_2^0 -мезонов является тогда набор $\xi \left\{ \frac{n_1}{\gamma_1}, \frac{n_2}{\gamma_2}, \dots, \frac{n_k}{\gamma_k} \right\}$ если, числа $\left\{ \frac{n_i}{\gamma_i} \right\}$ были предварительно нормированы.

В такой постановке задача определения спектра K_2^0 -мезонов сводится к определению k нормированных чисел n_1, n_2, \dots, n_k для "взвешенного" усреднения гистограмм $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ полученных путем розыгрыша. Естественным образом решение задачи разделяется на две части.

I) Розыгрыш по методу Монте-Карло k смешанных распределений $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$;

II) "Взвешенное" усреднение гистограмм Γ_i с помощью весов n_i .

Решение первой части задачи описано в отчете /5/; в настоящем отчете описывается машинное решение второй части и приводится инструкция по эксплуатации этой программы.

§ 4. В качестве "меры согласия" гистограмм Σ и Гэксп выбран параметр χ^2 (см. например [7]):

$$\chi^2 = N^\Sigma N^\Gamma \sum \frac{(w_i^\Sigma - w_i^\Gamma)^2}{N^\Sigma w_i^\Sigma + N^\Gamma w_i^\Gamma} \quad (8)$$

где N^Σ и N^Γ - числа событий представленных в гистограммах Σ и Γ , w_i^Σ и w_i^Γ - частоты в соответствующих друг другу ячейках этих гистограмм; решение задачи состоит в поиске набора $\xi \{n_1, n_2, \dots, n_{k_2}\}$ для которого χ^2 достигает минимального значения χ^2_{min}

В некотором смысле, произвольным при решении задачи является выбор (конкретных) значений E_i и выбор числа (k) этих значений. Готовых рецептов для этого выбора, повидимому, не существует и рассуждать о правильности сделанного выбора придется не только до решения, но и после решения задачи.

До решения ясно лишь, что значения E_i должны покрывать весь интервал ($M_k + E_{k_{max}}$) и что среди них должны присутствовать "главные" *). Однако, т.к. "истинный" спектр еще не известен, информацию о главных значениях E_i можно извлечь только из экспериментального, смешанного распределения Гэксп.

После решения оценка полученного результата проводится, как обычно в подобных случаях, обследуя зависимость результата от числа (k), использованных гистограмм Γ_i . При этом следует остерегаться как слишком больших значений χ^2_{min} , так и слишком "хорошего" согласия (χ^2_{min} - немного меньше числа степеней

*) в смысле большого веса n_{E_i} .

свободы) не забывая, что χ^2 - статистический параметр, среднее значение которого равно числу степеней свободы. Первый случай указывает на то, что были использованы слишком малое число значений E_k или что эти значения были неадекватно выбраны; второй - указывает, что для данной гистограммы Гэксп, набор гистограмм $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ преопределяет решение. Убедительный аргумент в пользу правильности результата получается также и из обратного решения задачи: на основе полученного (расчетного) спектра, проводится повторный розыгрыш и сравниваются между собой, (опять по χ^2), смешанная гистограмма (E_k, \tilde{E}_k) с гистограммой Гэксп.

При составлении программы для машинного решения задачи мы учитывали следующие факты. Из совокупности (предварительной) информации, которой располагаем известно:

- а) среднее значение искомого спектра лежит в районе 100 ± 120 Мэв,
- в) в сторону больших энергий спектр имеет довольно быстро спадающий "хвост", который простирается до 800 ± 1000 Мэв;
- с) подавляющее большинство частиц влетают в камеру с энергией 50 ± 200 Мэв.

Поэтому мы считали целесообразно проводить розыгрыш при девяти значениях $E_k = 498, 548, 598, 648, 698, 748, 798, 848, 898$ Мэв и в соответствии с этим, построить программу, способную определить до девяти нормированных чисел n_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 9$).

§ 5. Из предыдущего изложения следует что, программа для машинного решения задачи должна выполнить следующие алгоритмы.

Заданы девять гистограмм $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_9$ с произвольным (но не очень большим) числом ячеек, определенные в одном и том же или в разных интервалах переменного, но которые имеют одни и те же границы ячеек; задана также экспериментальная гистограмма Гэксп

причем Гэксп имеет ячейки соответствующие ячейкам гистограмм Γ_i ; требуется определить с заданной точностью ϵ , девять положительных чисел n_1, n_2, \dots, n_9 , удовлетворяющие основному условию определения вероятности, $\sum n_i = 1$ так чтобы "взвешенная" гистограмма $\sum = \sum_{i=1}^9 n_i \Gamma_i$, "наилучшим образом" (в смысле χ^2) аппроксимировала гистограмму Гэксп.

Как видно, речь идет о машинном решении задачи аппроксимации параметров по χ^2 , с той особенностью, что требуется определить заведомо положительные и нормализованные значения параметров. Подобные условия обычно не накладываются над параметрами при решении сходных с этой задачей методом наименьших квадратов (см. СП-123 в библиотеке Стандартных Программ). Видоизменение СП-123 для соблюдения этих условий потребовало -бы включение в арифметическую часть вычисления производных прерывной функции произвольного вида по модулю аргумента. Кроме этого, так как задача является нелинейной *), после применения СП-123, необходимо провести дополнительно исследование устойчивости полученного решения.

В предложенный нами метод решения, вместо движения к χ^2_{min} по направлению наиболее быстрого убывания "меры", перебираются по ряд все наборы $\{n_1, n_2, \dots, n_9\}$ которые можно образовать, если разбивать девятимерное пространство "сеткой" шагом \underline{H} и ставить в соответствии каждому узлу сетки набор девяти чисел ("координаты" узла).

Этим арифметическая часть программы сводится к минимуму, исчезают трудности, связанные с вычислением производных прерывной

*) Относительно параметров n_i .

функции и избегаются ложные решения (сложные минимумы). Метод имеет однако и один недостаток - довольно большой расход машинного времени причем, в отличие от метода наименьших квадратов, расход времени не зависит от вида гистограмм, а зависит лишь от числа узлов, образуемых сеткой шагом H в многомерном пространстве параметров.

Как будет показано далее, умелое использование побочной (предварительной) информации относительно вида "истинного", искомого спектра позволяет, однако, снизить существенно этот расход времени не приводя в жертву точность определения минимума.

Программа составлена не специалистом причем, при её составлении придавалось предпочтение наипростейшим и наиболее быстрым приемам программирования *).

Программа состоит из последовательности независимых или слабозависимых операторов и занимает ~ 1000 ячеек (в восьмеричном исчислении); поле для занесения начальных данных и для хранения промежуточных результатов занимает все остальное свободное поле оперативной памяти, так что данная программа не может быть использована **) одновременно с другими программами.

*) исключение составляет лишь главный оператор программы, так называемый "Генератор $\{n_i\}$ " см. § 10.

**) Без применения магнитной памяти машины.

Блок-схема программы приведена на Рис. 4 . Она довольно подробно описывает операторы и их взаимосвязи; ниже, одновременно с общим описанием программы, приводится дополнительно описание главных операторов.

§ 6. Гистограммы $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ Гэксп вводится в машину самой программой однако, каждая, из них должна быть снабжена своим адресным кодом (КА):

(Γ_1)	КА=0077,
(Γ_2)	КА=0177,
⋮	⋮
(Γ_9)	КА=1077,
(Гэксп)	КА=1200.

В § 4 было сказано, что гистограммы Γ_i получаются путем моделирования учитывающего условия регистрации и идентификации ν° -событий, (условия при которых отбирались на опыте, ν° -события на основе которых была составлена Гэксп). Но прежде, чем сравнить гистограммы Γ_i с гистограммой Гэксп, следует учесть еще влияние ошибок измерения на вид "ожидаемых" гистограмм Γ_i . Это влияние состоит в некотором "размазывании" (см. отчет [5], стр 107) моделированных гистограмм; однако в данной программе нет оператора, выполняющего эту операцию и поэтому, прежде чем вводить гистограммы Γ_i в машину, их надо предварительно переработать отдельной подпрограммой (см. отчет [5] , стр 107).

Стандартная форма составления гистограмм для ввода в машину показана на таблице I. Первая строка этой таблицы отведена под ν_i -эффективность идентификации распада при данном E_i (см. § 4), вторая - под значение E_i ; из этого следует, что для каждой гисто-

граммы Γ_i отведено поле не более 62_{10} ячеек, что ограничивает число ячеек обрабатываемых гистограмм.

На таблице I содержимые ячеек гистограмм Γ_i обозначены f_1, f_2, \dots и они представляют собой либо частоты (т.е. $\sum f_i = 1$), либо число событий в каждой ячейке. Четвертую строку таблицы I следует оставить свободной; там машина запишет пересчитанное ею на основе $\{f_i\}$, "объем" гистограммы (число событий).

Стандартная форма гистограммы $\Gamma_{\text{эксп}}$ показана в таблице II. В первой строке записывается какое-либо условное число отмечающее данную экспериментальную гистограмму. Третью строку таблицы II также следует оставить свободной, для занесения вычисленного машиной "объема" гистограммы Гэксп.

§ 7. Условия, при которых следует провести сравнение гистограмм по χ^2 , содержатся в "Таблице Постоянных" (ТП), которая вводится в машину с адресным кодом КА-1400. Стандартная форма составления ТП показана на таблице III.

Среди другой информации ТП сообщает машине, так называемое, "число ячеек, N в каждой гистограмме". Это означает, что в машину следует ввести гистограммы, которые имеют одинаковое число ячеек и поэтому, все гистограммы следует дополнить "фиктивными" ячейками с нулевым содержанием. Дополнение гистограмм фиктивными ячейками должно быть сделано так, чтобы ячейки с одинаковым порядковым номером во всех гистограммах Γ_i и в Гэксп "соответствовали друг-другу", т.е. чтобы они относились к одному и тому же интервалу изменения представленного признака.

§ 8. До того как приступить к обработке гистограмм по χ^2 программа нормализует сначала гистограммы Γ_i если они не были такими при вводе; при этом, в качестве проверки вводимого материала, машина пересчитает на основе указанных в гистограммах частот объем (т.е. число событий) в каждой гистограмме и запомнит его.

Нормализованные гистограммы Γ_i а также Гэксп засылаются для дальнейшей обработки на поле 5100+6200; одновременно с этим они засылаются на хранение на МБ-2 и оттуда, они повторно засылаются на поле 5100+6200. Эта процедура необходима потому что дальнейшая обработка гистограмм происходит "в цикле" т.е. по желанию оператора *) может повторяться при варьированных условиях и каждый цикл может несколько изменять первоначальный вид гистограмм Γ_i .

§ 9. Так как результат применения критерия χ^2 не должен сильно зависеть от числа событий, в каждой ячейке гистограммы, а это происходит лишь, если это достаточно большое, предусмотрена возможность объединения нескольких "соседних" ячеек так, чтобы "объединенная" ячейка содержала достаточно большое число событий, $N_i \geq \Omega$, где Ω - указанное в ТИ постоянное число.

Операция "группирования по Ω " состоит в том, что обследуется подряд содержимое каждой ячейки гистограммы Гэксп из поля 6100-6200. Если $N_i < \Omega$, тогда содержимое ячейки (i) приплюсуется к содержимому ячейки ($i+1$) (или ($i-1$)), а в ячейку (i) засылается нуль. После этого обследуется содержимое соседней ячейки и повторяется также процедура. Все операции проводимые над гистограммой Гэксп повторяются в точности над гистограммами Γ_i .

*) см. § 2 и § 14.

Примечания: 1) Операция "группирования по Ω " проводится в двух этапах, сначала начиная от "первой" ячейки, затем начиная от "последней".

2) Следует помнить, что операция группирования проводится на основе гистограммы Гэксп, предполагая при этом, что частоты гистограмм Γ_i были получены (при розыгрыше) на основе достаточно большого числа событий в каждой ячейке.

3) Если при вводе, Гэксп была нормализованной, группирование проводится не на основе указанного в ТП значения Ω , а на основе "эффективного $\Omega_{эфф}$ " где:

$$\Omega_{эфф} = \Omega / N_{tэфф}. \quad (9)$$

4. Группированные гистограммы Γ_i и Гэксп заменяют нормализованные гистограммы на тех же полях 5100+6200.

5. Операция группирования по Ω выключается, если в ТП указать $\Omega = 0$.

Операция группирования по Ω не нарушает нормировки гистограмм Γ_i , но так как при вводе, гистограмма Гэксп могла и не быть нормализованной, а описанное в § 8. нормирование не распространяется и на Гэксп, гистограмма Гэксп нормализуется снова после группирования и засылается на поле 6400+6500.

§ 10. Основным оператором программы является "генератор $\{n_i\}$ ", при каждом обращении к которому на выход выдается девять чисел

n_1, n_2, \dots, n_9 удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=1}^9 n_i = 1 \quad (10)$$

$$\zeta_{i \min} \leq n_i \leq \zeta_{i \max}.$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 9$$

(II)

Выработка наборов чисел $\{n_i\}$ носит не случайный характер а систематический, ибо генератор вырабатывает все возможные наборы, отличающиеся между собой изменением на kH ($k = 1, 2, 3, \dots$) по крайней мере двух из девяти чисел n_i .

По своей структуре данный Генератор представляет собой серию из четырех более "простых" генераторов (g_1, g_2, g_3, g_4), соединенных между собой последовательно. Подобные простые генераторы были описаны в отчете [6]; первый из них вырабатывает 3 положительные числа n_1, n_2, n'_3 , удовлетворяющие условию:

$$(g_1) \quad 1 = n_1 + n_2 + n'_3; \quad (a)$$

второй - разлагает n'_3 на три другие числа:

$$(g_2) \quad n'_3 = n_3 + n_4 + n'_5; \quad (b)$$

генераторы (g_3) и (g_4) работают аналогично (g_2):

$$(g_3) \quad n'_5 = n_5 + n_6 + n'_7; \quad (c)$$

$$(g_4) \quad n'_7 = n_7 + n_8 + n_9. \quad (d)$$

Разложение единицы на девять положительных чисел n_1, n_2, \dots, n_9 можно изобразить следующей схемой:

$$1 = n_1 + n_2 + n'_3 \quad (12)$$

$$\quad \quad \quad \hookrightarrow n'_3 = n_3 + n_4 + n'_5$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \hookrightarrow n'_5 = n_5 + n_6 + n'_7$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hookrightarrow n'_7 = n_7 + n_8 + n_9.$$

При каждом частичном разложении $(a + d)$, программа проверяет выполнение условия (II) и выбрасывает из дальнейшего рассмотрения весь набор, если хоть одно из чисел n_i выпадает из разрешенного интервала $\{\zeta_{i \min} \div \zeta_{i \max}\}$.

Порядок, в котором каждый из генераторов (g_i) вырабатывает свои частичные) наборы из трех чисел, был описан в упомянутом выше отчете. Для Генератора $\{n_i\}$ нельзя дать наглядное (графическое) представление порядка выработки наборов из девяти чисел $\{n_i\}$, но этот порядок вытекает автоматически из предыдущего.

а) В исходном положении Генератора, числа n_1, n_2, \dots, n_8 имеют минимальные значения $\zeta_{i \min}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ а число n_9 - значение, которое вытекает из условия (I0).

б) при каждом повторном обращении к Генератору число n_8 увеличивается, а n_9 уменьшается на шаг H .

в) если очередное увеличение n_8 привело бы к выпаданию n_8 или n_9 из разрешенного для них интервала, тогда:

I. восстанавливается исходное положение Генератора;

II. прибавляется H к n_7 ;

III. пересчитывается n_9 согласно (I0),

после чего наборы $\{n_i\}$ вырабатываются так как описано в пункте б).

г) когда n_7 достигает своего максимального значения $\zeta_7(\max)$, также восстанавливается исходное положение Генератора, но после этого, H прибавляется не к n_7 а к n_6 ; что касается n_9 , оно снова пересчитывается согласно (2), а дальше, выработка наборов происходит так, как описано в пунктах б) и в).

д) обновление исходного положения Генератора происходит каж-

дый раз когда один из "головных" разрядов (чисел) n_5, n_4, n_3, n_2 перепрыгивается и каждый раз выработка "следующих" наборов происходит так как описано в пунктах б), в), г),

Резюмировать алгоритм Генератора можно следующим образом: Каждый новый набор получается из предыдущего путем прибавления H к числу n_8 и соответствующего пересчета n_9 . Если подобное увеличение невозможно из-за выхода из разрешенного интервала чисел n_8 или n_9 , то H прибавляется к первому встречному, более "младшему", еще незаполненному числу $n_7, n_6, n_5, \dots, n_1$, а во всех остальных, более "старших" числах восстанавливаются минимальные разрешенные значения; после этого выработка наборов происходит опять путем прибавления H к n_8 .

Подобный алгоритм обеспечивает выработку наборов $\{n_i\}$ без каких-либо пропусков узлов сетки шагом H в пространстве $\{n_i\}$.

§ II. В анализ по χ^2 принимают участие гистограммы Γ_i из поля 5100+6100 и гистограмма Гэкср из поля 6400+6500. Так было сказано, целью анализа является поиск того набора $\{n_i\}$, для которого "смешанная" (взвешенная) гистограмма $\Sigma = \sum n_i \Gamma_i$ имеет минимальное отклонение (в смысле χ^2) от Гэкср. Этой цели программа добивается многократным (повторным) обращением к Генератору. При каждом обращении, Генератор вырабатывает один набор $\{n_i\}$ и для него, программа выполняет следующий замкнутый в себе алгоритм (см.на блок-схеме - Цикл Генератора);

а) вычисляет смешанную гистограмму Σ ;

б) вычисляет χ^2 ;

в) составляет, на поле 6500+6600, "сводку" очередного сравнения по χ^2 ;

г) решает, является или нет полученный χ^2 минимальным по отношению ко всем ранее полученным значениям χ^2 ; если ответ положительный, засылает "сводку" на поле 6600+6700;

д) прибавляет единицу в счетчик наборов $\{n_i\}$ находящийся в ячейке 6577;

э) снова обращается к Генератору для получения нового набора $\{n_i\}$.

"Сводка" представляет собой как бы совокупность двух гистограмм - - распределение весов $\{n_i\}$ и гистограмма Σ с отличительными признаками χ^2 , k , N^Σ . Стандартная форма "сводки" приведена в таблице IV; частоты гистограммы Σ обозначены там $\{w_i\}$ и вычисляются по формуле:

$$w_i = \sum_{j=1}^g n_j f_i^j$$

N^Σ - обозначает объем (т.е. число событий) в гистограмме и вычисляется по формуле

$$N^\Sigma = \sum_i n_i N_{ti}$$

k обозначает число членов в χ^2 (см. формулу (8) стр. 13), для которых $w^\Sigma \neq 0$ и $w^\Gamma = 0$.

Возможные АВОСТ-ы при вычислении χ^2 избегаются тем, что если для данной ячейки $N^\Sigma w^\Sigma + N^\Gamma w^\Gamma = 0$, деление предусмотренное формулой (8) пропускается и программа переходит к следующему члену суммы.

Поиск значения x^2_{min} состоит в том, что " очередное " значение $x^2 = f (n_1, n_2, \dots, n_9)$ сравнивается со значением x^2 сводки находящейся на поле 6600+ , и если очередное x^2 меньше " x^2 из сводки ", тогда новая сводка заменяет старую на поле 6600.

" первое " значение x^2 (т.е. значение x^2 полученное при составлении " первой " сводки) сравнивается с очень большим числом $S_{max} = 10^{+15}$, так что на поле 6600+ ... засылается по крайней мере одна сводка.

§ 12. Цикл Генератора заканчивает свою работу, когда исчерпываются все наборы $\{n_i\}$ разрешенные условиями (I0), (II) и возможные в условиях сетки шагом H в пространстве $\{n_i\}$. Вычислить сколько разрешенных наборов - нетрудная, но довольно громоздкая задача; поэтому здесь приводим лишь конечную формулу:

$$N_{n_1, n_2, \dots, n_9} = \prod_{i=1}^9 \left[1 + \frac{S_{i max} - S_{i min}}{i H} \right], \quad (I3)$$

если предполагать, что все интервалы $[S_{i max} - S_{i min}]$ являются кратными значениями шага H . В противном случае соответствующие разницы $[S_{i max} - S_{i min}]$ следует заменить максимальными целыми числами M_i , удовлетворяющими одновременно условиям:

$$M_i \leq [S_{i max} - S_{i min}],$$

$$M_i = k_i H \quad i = 1, 2, \dots, 9. \quad (I4)$$

Формула показывает, что число N возрастает чрезвычайно быстро с уменьшением шага H , и с увеличением числа измерений пространства

$\{n_i\}$ если, например, допустить что,

$$H = 0,1$$

$$S_{i \min} = 0$$

$$S_{i \max} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

тогда формула (13) дает $N=43758$ наборов и для их обработки потребовалось бы приблизительно два часа чистого машинного времени *); причем, как нетрудно понять, точность определения "положения" была бы не лучше, чем 0,1 и приходится повторить вычисления для повышения точности (см. § 14). Становится ясно насколько желательно обследовать предварительно, немашинным способом, возможный вид искомого спектра и на основе этого обследования как можно больше сузить интервалы $\Delta_i = S_{i \max} - S_{i \min}$ внутри которых ищется значение n_i .

Например, при решении данной задачи, из вида гистограмм Γ_i следует, что при $E_k \geq 800$ Мэв, вклад гистограмм в область "малых" значений $E_k \approx 500-600$ Мэв - незначителен и что высокие частоты гистограмм Гэкср обусловлены практически лишь "высокоэнергичными" гистограммами Γ_i ; Отсюда следует, что можно указать довольно узкие интервалы Δ_i возможных значений чисел n_i , относящихся к высоким энергиям и что вообще задачу можно решать "по частям": сначала искать вклад гистограмм для "малых" энергий, затем для "больших" энергий.

*) При данной структуре программы большая ЭВМ ВЦ ОИЯИ анализирует эти наборы со скоростью ~ 8 наборов/сек.

§ 13. По окончании "Цикла Генератора" машина печатает содержимое поля 6577-6677, т.е. печатает число обследуемых наборов, и сводку, относящуюся к x^2_{min} . Затем, машина пересчитывает "истинные" значения частот $\{n_i\}$ с учетом эффективностей регистрации и идентификации разных энергий (см. §4) и составляет, на поле 6676-6724 "Конечную сводку" указанную в таблице IV.

Содержимое конечной сводки сразу же выдается на печать, а содержимое всей оперативной памяти машины записывается на МБ-I (см. §16).

§ 14. Предыдущие операции определяют положение минимума на поверхность $x^2 = f(n_1, n_2, \dots, n_9)$ с точностью не лучше, чем шаг H ; и как следует из §13. значение шага нельзя указать с самого начала слишком маленьким. Нужная точность $H \leq \epsilon$ достигается с помощью "Цикла по точности" (см. Блок-схема) который обеспечивает повторные обращения к Генератору.

Пусть $\{n_i\}_{min}$, $i = 1, 2, \dots, 9$, "координаты" точки x^2_{min} . Если они были получены при значениях шага $H > \epsilon$, тогда программа проводит замену "старых" границ $\zeta_{i min}$, $\zeta_{i max}$ "новыми" - по формулам:

$$\begin{cases} \zeta'_{i min} = \max [\zeta_{i min}, \{n_i\}_{min} - H], \\ \zeta'_{i max} = \min [\zeta_{i max}, \{n_i\}_{min} + H], \end{cases} \quad (15)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, 9.$

Это означает, что программа, как бы, "вырезает" из указанной первоначально "разреженной" области девятимерного пространства

$\{n_1, n_2, \dots, n_9\}$, многомерный прямоугольник со сторонами не больше чем $2H$ и с центром в точке $[\{n_1\}_{min}, \{n_2\}_{min}, \dots, \{n_9\}_{min}]$. В этой новой области записывается новая сетка с уменьшенным шагом H' , где H'

удовлетворяет условию:

$$H' = (\zeta'_{\max} - \zeta'_{\min}) \frac{H}{(\zeta_{\max} - \zeta_{\min})} \quad (16)$$

На основе новой сетки программа повторяет поиск x^2_{\min} и все операции описанные в §§ II, 12. Эта процедура повторяется до тех пор пока не достигается точности $H \leq \epsilon$.

Следует отметить, что H "измеряет" точность определения положения минимума, но еще мало говорит о чувствительности "меры согласия" x^2 к изменению параметров $\{n_1, n_2, \dots, n_9\}$. Подобную информацию можно было бы извлечь из карты распределения значений x^2 вокруг точки x^2_{\min} , с привлечением дополнительных физических и статистических соображений однако, построить такую карту для большого числа параметров (в данном случае - их девять!) расточительно. Куда более разумно обследовать поведение меры согласия вокруг минимума при изменении лишь нескольких (2-3) "соседних" параметров. Эта задача полностью решена программой описанной в отчете [6].

§ 15. Подведя итоги описания структуры программы следует сказать, что она содержит 3 циклические операции: "цикл по Ω ", "цикл по точности" и "цикл Генератора". "Внешним" по отношению ко всем остальным является "цикл по Ω ", а "самым внутренним" - "цикл Генератора". Взаимное расположение циклов указано также на Блок-схеме.

Управление циклами осуществляется с помощью величин, указанных в ТП. (Из табл. IV следует, что под Ω_i отведены ячейки

I402-I404, так что группирование по Ω можно провести тремя различными значениями Ω .

Значение шага H записывается в ячейку I405, значения границ $(\xi_{i \min}, \xi_{i \max})$ ($i=1, 2, \dots, 9$) - в ячейках I406-I427, а значение ϵ - в I430.

§ 16. Массив перфокарт при вычислениях состоит из программы со своей $K\Sigma$ и из ряда групп (комплектов) перфокарт, содержащих гистограммы Γ_i , Гэкср и ТП. Группы следует разделить между собой признаком конца ($K\Sigma$).

По окончании вычислений одной группы происходит останов в ячейку 2571 по команде I7; 2571, 2571, 0000. После нажатия кнопки "Пуск", очищается РА и управление передается на ввод нового комплекта.

Во время работы машины, перед обновлением циклов "по Ω " и "по точности", происходит запись всей оперативной памяти на МБ-2. Перед каждой такой операцией в ячейку I614 засылается число (1 или 2), указывающее с какого места программы происходит запись. В случае обнаружения сбоя в работе машины, специальной перфокартой производится считывание программы из магнитной памяти, анализируется содержимое ячейки [I614] и управление передается на продолжение счета, в соответствии с этим содержимому ячейку.

Прежде, чем начинать счет следует "переименовать" "первый" барабан на "второй" и "второй" на "первый" чтобы избежать наводки между буфером и МБ-1.

§ 17. В своей стандартной форме, программа выдает на печать следующее:

- 1) Таблицу Постоянных и первоначальные гистограммы Γ_i и Гэкср;
- 2) Гистограммы Γ_i и Гэкср перед началом цикла по Ω ;
- 3) Сводку из поля 6500;
- 4) Сводку из поля 6600;

Каждое повторение "цикла по точности" и "цикла по Ω " приводит к повторению печати сводок (3) и (4).

Литература

- /1/ М.Аникина и др., *ИЗТФ* **45**, 469, 1963.
- /2/ D. Luers et al., *Phys. Rev.*, **113**, B1275, 1964.
- /3/ Э.Оконов, Препринт ОИЯИ, Р-1423 (1963).
- /4/ Р.Мальшев, Д.Нягу. Методика обработки V^0 -событий отчет ОИЯИ, Б-3-1360, 1962.
- /5/ Д.Нягу: Моделирование методом случайных испытаний условий регистрации и идентификации V^0 -событий в камере Вильсона. Отчет ОИЯИ Б-1-1398, 1963.
- /6/ Д.Нягу. Программа для "взвешенного" (по χ^2) усреднения распределений. Отчет ОИЯИ, 1964.
- /7/ См. например Н.В.Смирнов, И.В. Дунин-Барковский, Краткий курс математической статистики, стр. 253; Физматгиз 1959.

Д. Нягу

Таблица I
Гистограммы в оперативной памяти

				0077					КА	
0077				γ_i					эффективность регистрации	2
100				E_k					энергия K_2^0 - мезона	3
I				N_t	/ события /				объем гистограммы	4
2				0					для занесения N_t^* вычисл.	5
3				f_1				} $\sum f_i = 1$ или $\sum f_i = N_t$		6
4				f_2					7	
5				f_3					8	
6				f_4					9	
7				.					10	
100				.					11	
I				.					12	
.				.					2	
.				.					3	
									4	
									5	
									6	
									7	
									8	
									9	
									10	
									11	
									12	

Таблица II
Гистограмма Гэксп в оперативной памяти:

			1200				КА	
1200			Индикатив Гистограммы					2
1			$N_{тг}$ / события /				Объем гистограммы	3
2			0				для занесения $N_{тг}^{+}$ вычисл.	4
3			f_1^r			}		5
4			f_2^r					6
5			f_3^r				$\sum f_i^r = I$ или $\sum f_i^r = N_{тг}$	7
6			f_4^r					8
7			.					9
1210			.					10
1			.					11
2			.				12	
.			.					
.			.					
								2
								3
								4
								5
								6
								7
								8
								9
								10
								11
								12

Таблица II.

Таблица Постоянных

				1400	КА		
100				N		число гистограммы ($N=9$)	2
1				K	число	ячеек в каждой гистограмме	3
2				Ω_1			4
3				Ω_2			5
4				Ω_3			6
5				H		начальный "шаг"	7
6				$\zeta_{1 \min}$	}	границы интервала Δ_1	8
7			$\zeta_{1 \max}$	для m_1			9
10			$\zeta_{2 \min}$				10
11				$\zeta_{2 \max}$			11
12				.			12
13				.			
14				.			2
15				.			3
16				.			4
17				.			5
20				.			6
11				.			7
12				.			8
13				.			9
14				.			10
15				.			11
26				$\zeta_{g \min}$			12
27				$\zeta_{g \max}$			
30				ϵ		ТОЧНОСТЬ	

Таблица Ш.

Таблица Постоянных

		I400	КА		
I400		N		число гистограммы (N=9)	2
I		\mathcal{N}		число ячеек в каждой гистограмме	3
2		Ω_1			4
3		Ω_2			5
4		Ω_3			6
5		H		начальный "шаг"	7
6		$\zeta_{1 \min}$	}	границы интервала Δ_1 для n_1	8
7		$\zeta_{1 \max}$			9
I410		$\zeta_{2 \min}$			10
I		$\zeta_{2 \max}$			11
2		.			12
3		.			
4		.			2
5		.			3
6		.			4
7		.			5
I420		.			6
I		.			7
2		.			8
3		.			9
4		.			10
5		.			11
I426		$\zeta_{g \min}$			12
I427		$\zeta_{g \max}$			
I430		ε		ТОЧНОСТЬ	

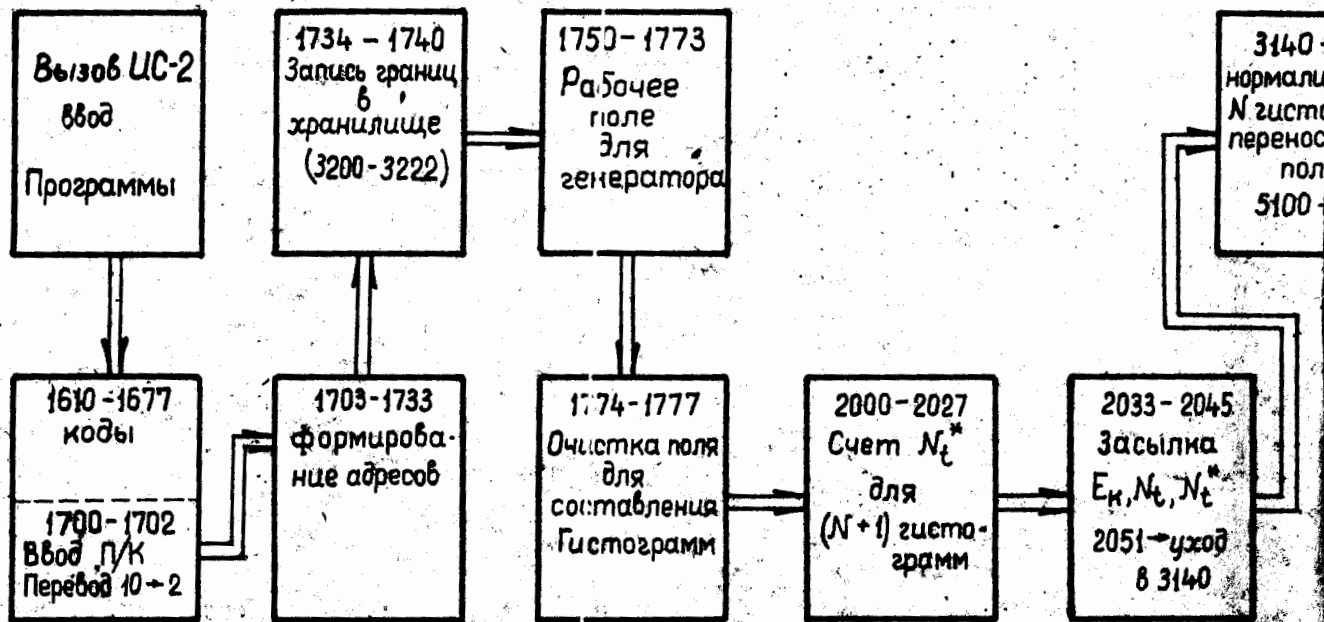
Таблица IV
Сводка Σ

		6500			КА	
6500		Индикатив			(см. таблицу II)	2
I		E_1			энергия	3
2		n_1			вес	4
3		E_2				5
4		n_2				6
5		.				7
6		.				8
7		.				9
6510						10
.						11
.						12
6523		0			} нули	
4		0				2
5		χ^2			"мера согласия"	3
6		k			число членов в χ^2	4
7		N^2			объем гистограммы Σ	5
6530		w_1			} частота гистограммы Σ	6
I		w_2				7
2		w_3				8
3		.				9
4		.				10
.		.				11
.		.			12	

КА 6577 = счетчик наборов

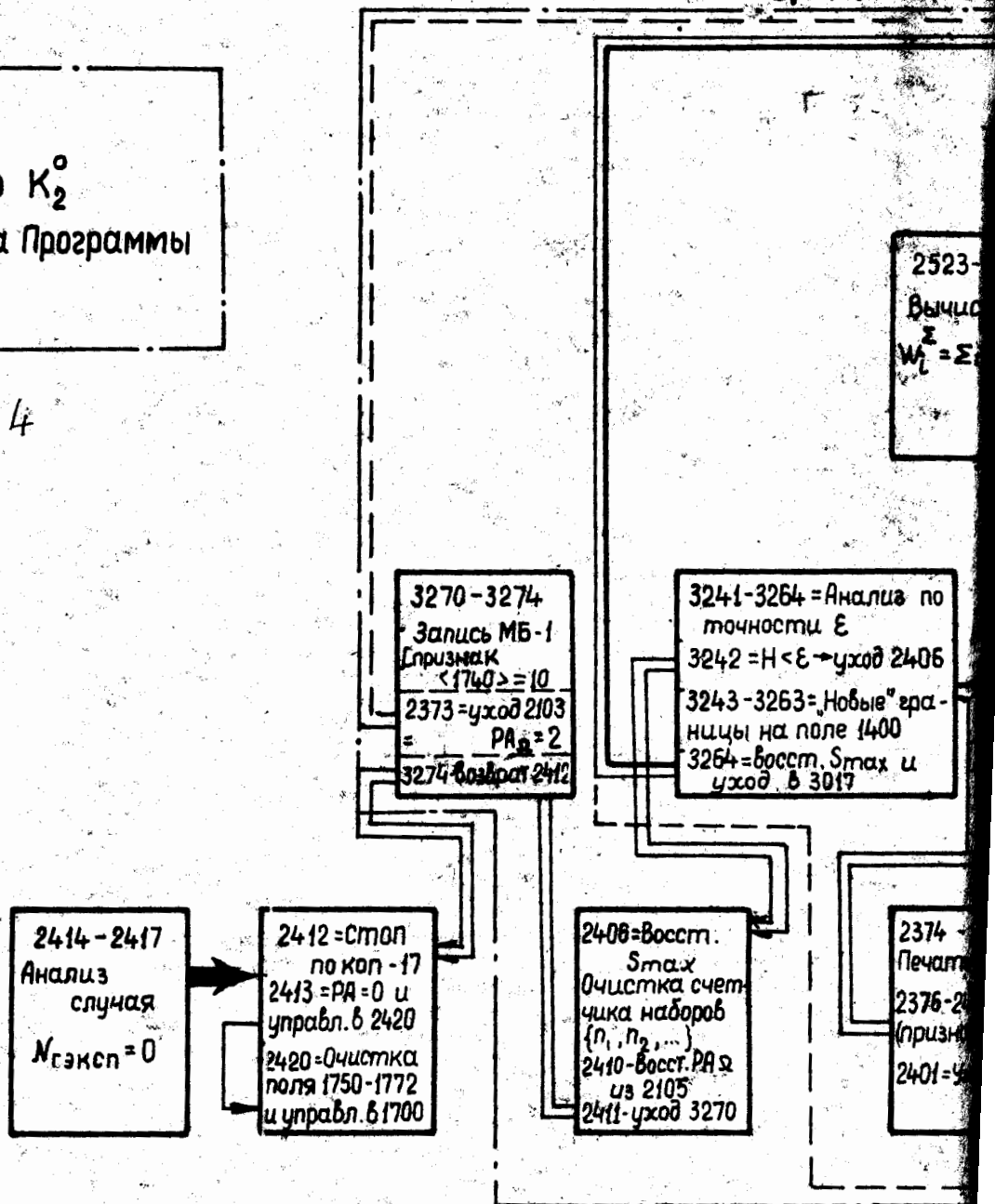
Таблица У
Конечная сводка

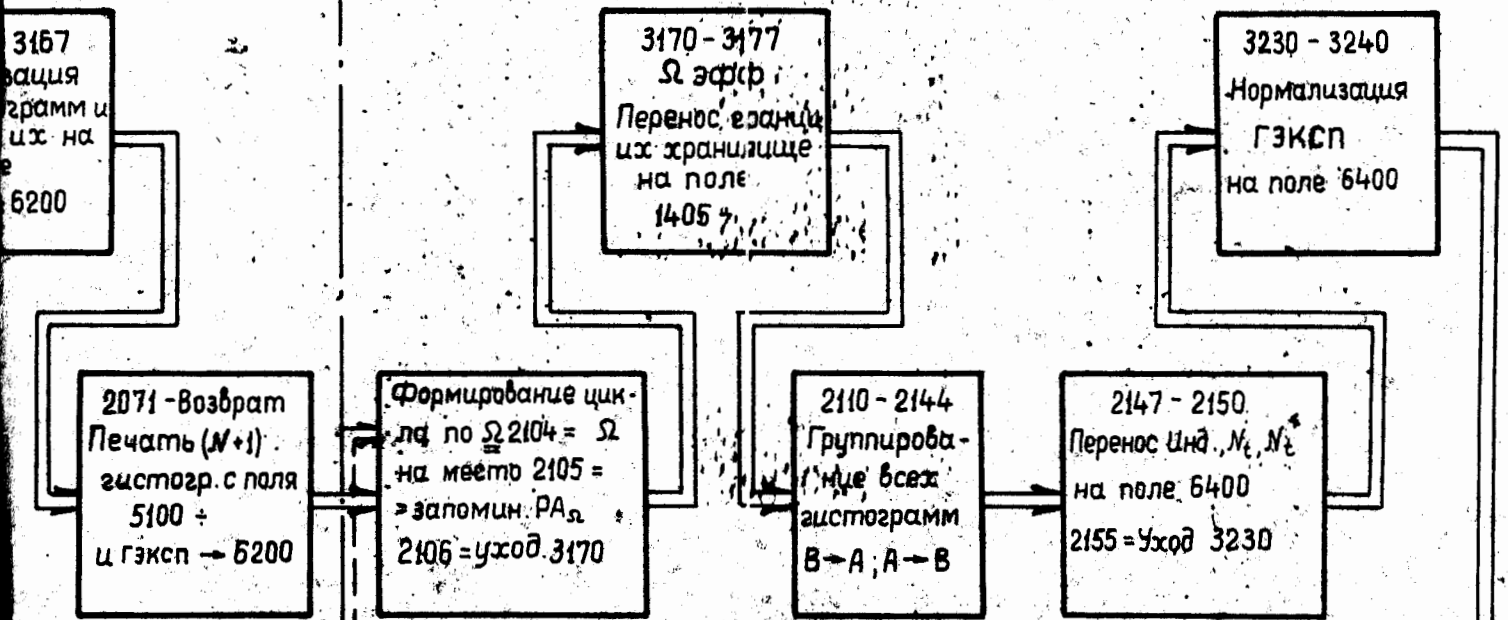
6676			содержимое ячейки < 4020 >		
6677			N_{n_1, n_2, \dots, n_g}		число наборов
6700			H		шаг
I			Индикатив Гэксп		
2			w_1/v_1	} $\sum_{i=1}^g \frac{w_i}{v_i} = 1$	
3			w_2/v_2		
4			w_3/v_3		
5			.		
6			.		
7			.		
6710			.		
I			.		
2			w_g/v_g		
3			E_1		} энергии
4			E_2		
5			E_3		
6			.		
7			.		
6720			.		
I			.		
2			.		
3			E_g		
4			Ω		



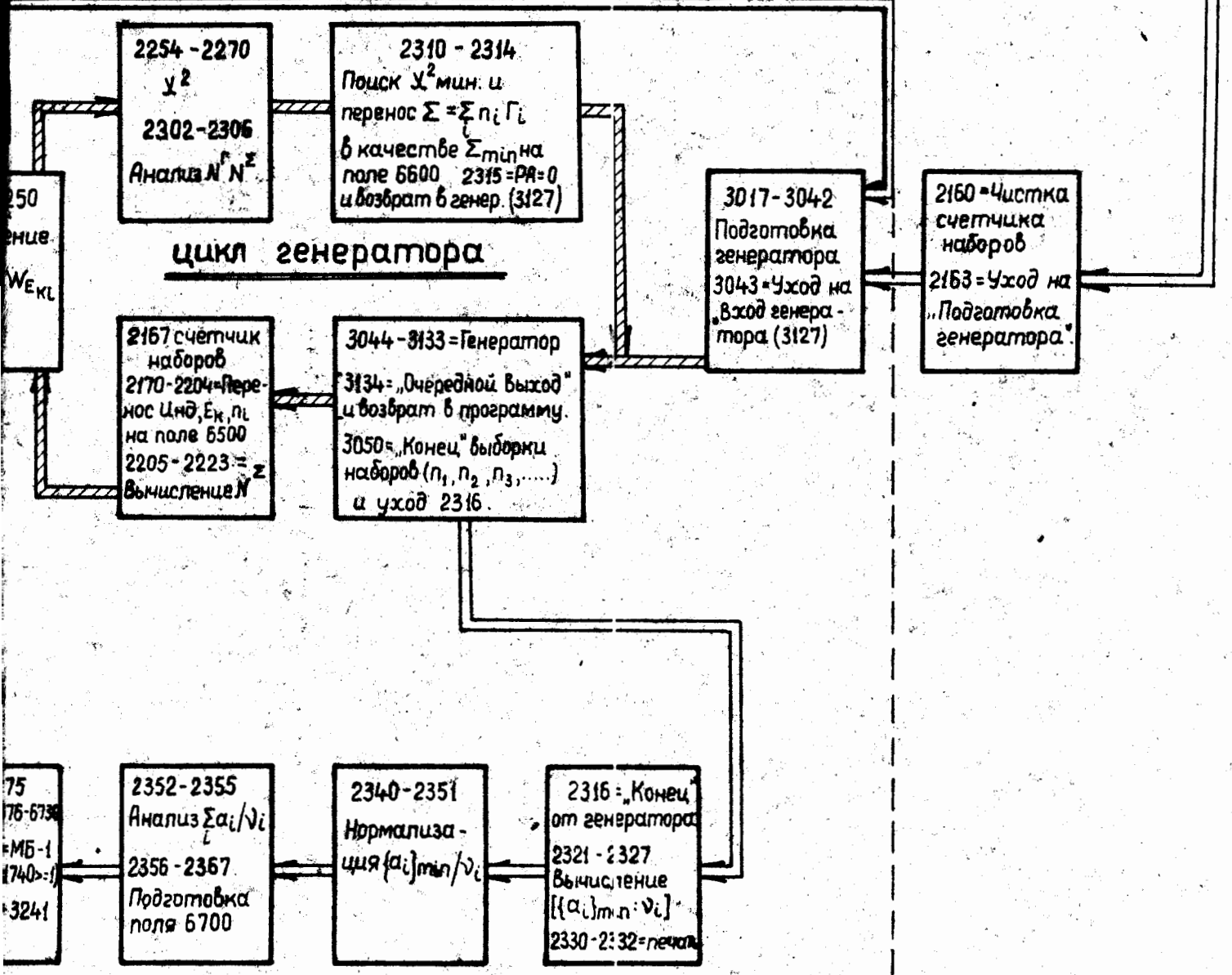
Спектр K_2^0
Блок-схема Программы

Рис. 4





цикл по точности $\langle \epsilon \rangle$



цикл генератора

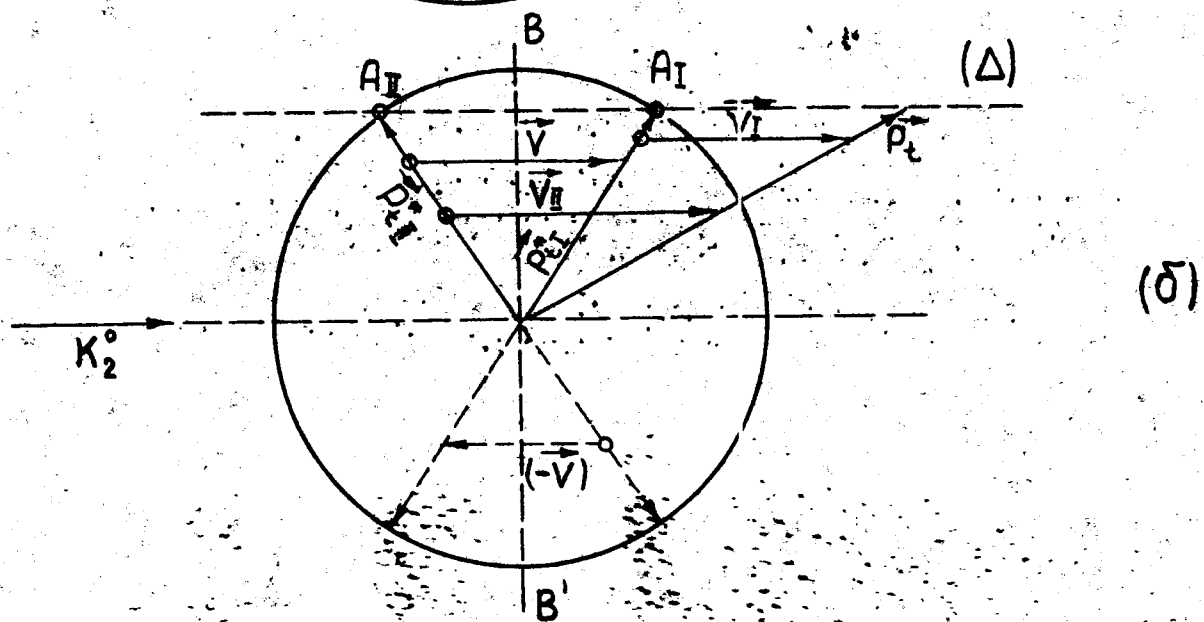
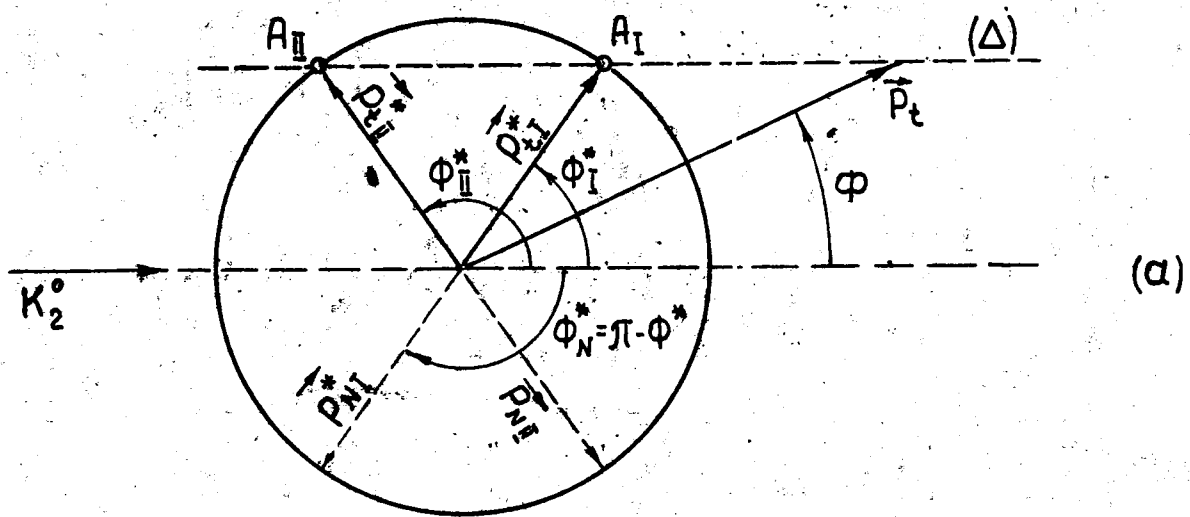


Рис. 1

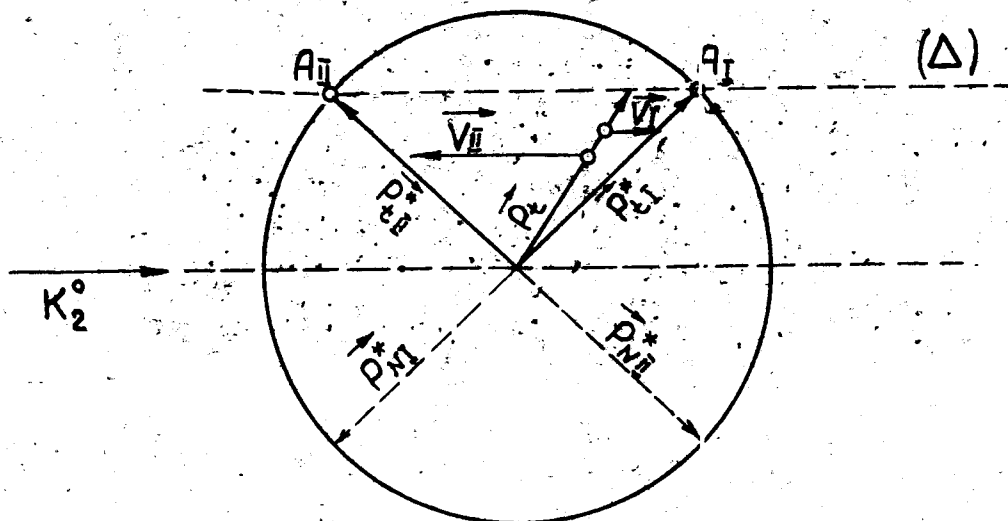


Рис. 2.

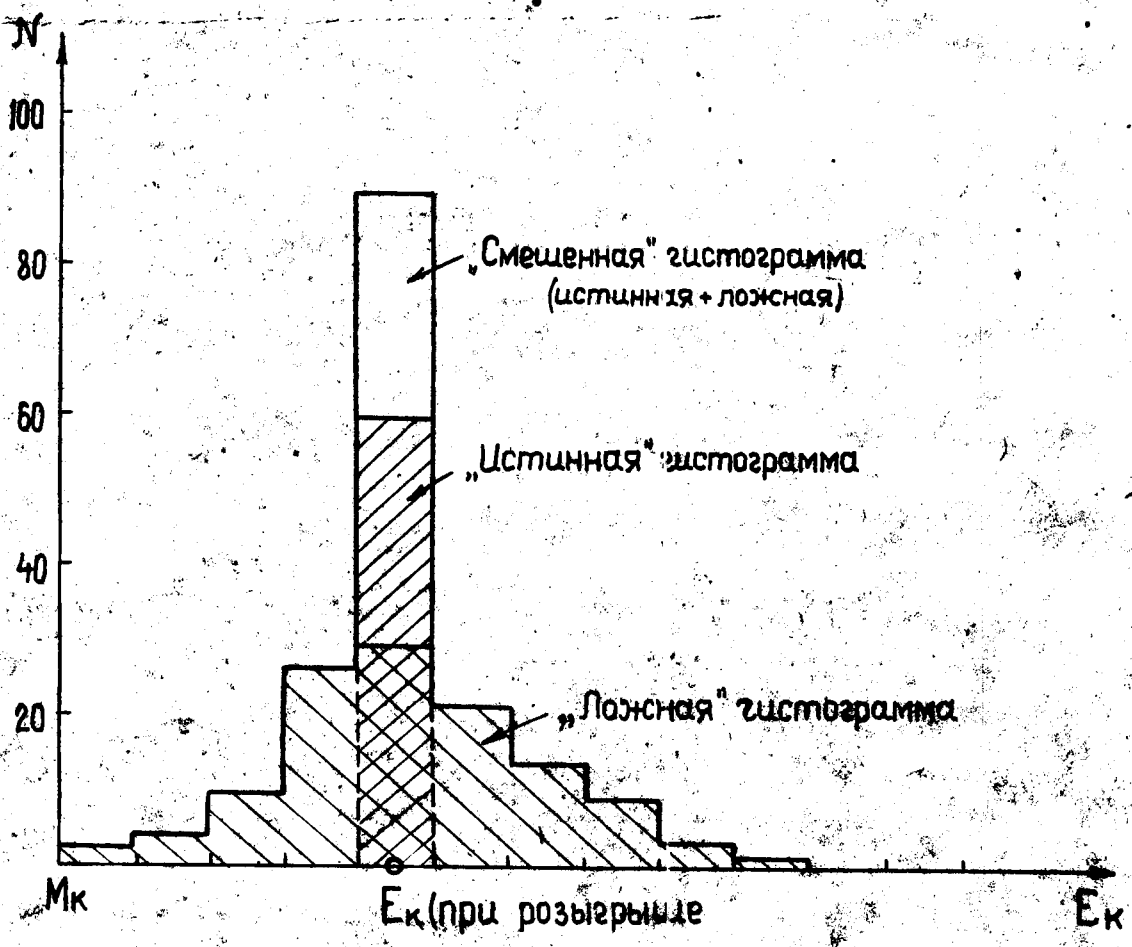


Рис. 3