

С 345

Б-903

Будкер Г.М.

Б1-1604

ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Б1-1604

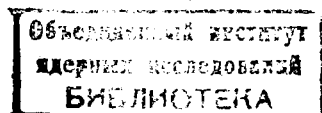
С 345

5-903

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ШИММ ПРИ ИСПРАВЛЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ  
НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Кандидат физико-математических  
наук

Будкер Г.М.



1951 год

2162

## 1. ВВЕДЕНИЕ.

Настоящая работа сделана по просьбе руководства ИЯП с целью подбора шимм для исправления магнитного поля в синхроциклотроне, испорченного в результате внесения в зазор магнита магнитного канала для выпуска частиц.

Имеющиеся в литературе формулы<sup>х)</sup> являются мелопригодными для точного выбора параметров шимм, поскольку в них вычислено только магнитное поле на краю полубесконечной шиммы.

Попытки экспериментального подбора шимм оказались малоуспешными. Это объясняется большим количеством варьируемых параметров, трудностью измерения магнитного поля и перестановки шимм внутри камеры ускорителя.

В настоящей работе вычисляется магнитное поле шиммы произвольной формы. (Если только ее толщина мала по сравнению с высотой). Отдельно вычисляется поле шимм определенной формы (плоская шимма, стержневая шимма).

Далее в работе вычисляются оптимальные параметры шимм т.е. такие толщины, положения и вертикальные зазоры в шиммах, которые при некоторых дополнительных условиях, обеспечивают, в некотором смысле, наилучшее исправление магнитного поля.

В отличие от вычисления величины магнитного поля шимм, которое вычисляется сравнительно просто для шимм произвольной формы, полное решение задачи на оптимальный подбор шимм представляет колоссальные вычислительные трудности. Поэтому при вычислении оптимальных параметров шимм

---

х) См.

приходится прибегать к некоторым упрощениям. В частности, с сравнительно меньшими вычислительными трудностями, удается вычислить оптимальные параметры шимм в том случае, когда возмущение в поле зависит от одной декартовой координаты. Это соответствует шиммированию возмущения, вызываемого в однородном магнитном поле бесконечно-длинным, прямым, железным бруском. Шиммы в этом случае будут также плоскими и бесконечно-длинными. Истинный магнитный канал не представляет собой бесконечно длинный прямой брусок; во-первых, он ограничен, во-вторых, искривлен. Можно, однако, утверждать, что, если мы выберем шиммы оптимальными в плоском случае, а затем обрежем и изогнем их в соответствии с формой и размером канала, то при небольшой кривизне канала параметры шимм окажутся близкими к оптимальным.

Вычислив, или измерив, полученное после изгибания шимм магнитное поле, можно его, в случае необходимости, корректировать небольшими плоскими или стержневыми шиммами, влияние которых особенно просто подсчитывается. Следует отметить, что в этой работе речен только чистый вопрос о шиммировании поля при заданном канале. Задачу об установке магнитного канала и шиммировании надо решать совместно, а также совместно с методом заброса частиц, подбирая параметры так, чтобы коэффициент выпуска был максимальным. Может оказаться, что выгоднее, например, сделать канал меньшего сечения, но, зато, установить его ближе.

## 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ШИММ.

Если размер шиммы вдоль магнитного поля много больше хотя бы одного из размеров поперек поля, то, в достаточно сильных полях, железо шиммы намагничивается до насыщения. Это значит, что намагниченность железа равно его предельному значению

$$M = \left( \frac{B-H}{4\pi} \right)_{H \rightarrow \infty} \quad (1)$$

и не зависит: ни от размеров шимм, ни от величины магнитного поля, если только поле достаточно велико, и шимма достаточно тонкая. (Последнее во всех, представляющих практический интерес случаях, выполняется).

Учитывая, что шимма дает лишь небольшую прибавку к основному полю, можно считать, что вектор намагниченности направлен по оси  $Z$ , по которой направлено основное поле.

Таким образом, шимму можно рассматривать, как равномерно и однородно намагниченный кусок железа. Для мягких сортов железа предельное намагничение порядка  $21000/4\pi$  эрстедт.

Поле магнитного диполя вычисляется из потенциала

$$\Phi = \vec{M} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{M_x(x-x') + M_y(y-y') + M_z(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (2)$$

где  $x; y; z$  - координаты точки наблюдения;  
 $x'; y'; z'$  - координаты точки, где находится диполь.

В нашем случае  $M_x = M_y = 0 \quad M_z = M$

$$\Phi = M \frac{z-z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (2a)$$

Проинтегрировав это выражение по всему объему шимм, получим потенциал магнитного поля, создаваемого шиммой

$$\Phi = M \int \frac{(z-z') dV'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Составляющая магнитного поля

$$H = - \operatorname{grad} \Phi$$

по оси  $Z$  - будет

$$H(x, y, z) = M \int \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 - 2(z-z')^2}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{5/2}} dV' \quad (4)$$

где интеграл берется по всему объему шиммы.

Выражение (4) дает возмущение в вертикальной составляющей магнитного поля, вызываемого произвольной тиммой. Рассмотрим несколько частных случаев.

### 1. Тимма в виде длинного тонкого стержня.

В этом случае  $x'$ ;  $y'$  можно считать постоянными и равными соответствующему значению на оси. Интегрирование по  $x'$  и  $y'$  дадут площадь сечения стержня  $\sigma$ . Таким образом для такой тиммы

$$H = M\sigma \int_h^{\infty} \frac{\rho^2 - 2(z - z')^2}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' \quad (5a)$$

где  $\rho$  - расстояние от центральной плоскости  $z = 0$  точки наблюдения от проекции тиммы

$h$  - высота конца тиммы над центральной плоскостью. (второй конец будем считать уходящим в бесконечность). После интегрирования получаем

$$H(\rho; z) = M\sigma \frac{h - z}{[\rho^2 + (h - z)^2]^{3/2}} \quad (5b)$$

(т.е. поле точечного заряда, находящегося на конце тиммы). Для двух тимм, симметричных относительно центральной плоскости

$$H(\rho; z) = M\sigma \left\{ \frac{h - z}{[\rho^2 + (h - z)^2]^{3/2}} + \frac{h + z}{[\rho^2 + (h + z)^2]^{3/2}} \right\} \quad (5m)$$

Наконец, поле двух тимм в центральной плоскости  $z = 0$

$$H(\rho) = 2M\sigma \frac{h}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

На графиках (Ia) и (Ib) нанесены  $H(\rho)$  при разных  $h$ . На первом, в единицах  $2M\sigma$ , на втором, в единицах  $\frac{2M\sigma}{h^2}$ .

### 2. Плоская бесконечная тимма.

Под плоской, бесконечной тиммой будем понимать плоскую тимму, простирающуюся по оси  $z$  от  $h$  до бесконечности, по оси  $y$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и по оси  $x$  от  $-\delta$  до  $+\delta$ .

В этом случае

$$\begin{aligned}
 H(x; y; z) &= M \int_{-\delta}^{+\delta} dx' \int_h^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 - 2(z-z')^2}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{5/2}} dy' = \\
 &= M \int_{x-\delta}^{x+\delta} d\xi \int_{h-z}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{5/2}} d\eta
 \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользуемся соотношениями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 - 2\zeta^2 + \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{5/2}} d\eta = 2 \frac{\xi^2 - \zeta^2}{[\xi^2 + \zeta^2]^2} \tag{7a}$$

$$2 \int_{h-z}^{\infty} \frac{\xi^2 - \zeta^2}{[\xi^2 + \zeta^2]^2} d\zeta = - \frac{2(h-z)}{(h-z)^2 + \xi^2} \tag{7b}$$

$$2(h-z) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{d\xi}{(h-z)^2 + \xi^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{x+\delta}{h-z} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x-\delta}{h-z} \tag{7c}$$

Таким образом, поле одной плоской, бесконечной шиммы

$$H_{(1)} = 2M \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x+\delta}{h-z} - \operatorname{arctg} \frac{x-\delta}{h-z} \right\} \tag{8a}$$

Пользуясь формулами суммы тангенсов получим

$$H_{(1)}(x; z) = 2M \operatorname{arctg} \frac{2\delta(h-z)}{(h-z)^2 + x^2 - \delta^2} \tag{8b}$$

Для тонкой шиммы, на большом расстоянии  $\delta \ll x$

$$H_{(1)}(x; z) = 4M \frac{h\delta}{(h-z)^2 + x^2} \tag{8c}$$

(т.е. поле заряженной нити).

Поле двух шимм, симметричных относительно центральной плоскости

$$H(x, z) = 2M \left\{ \alpha z c \operatorname{tg} \frac{2\delta(h-z)}{(h-z)^2 + x^2 - \delta^2} + \alpha z c \operatorname{tg} \frac{2\delta(h+z)}{(h+z)^2 + x^2 - \delta^2} \right\} \quad (9a)$$

при  $\delta \ll h$

$$H(x, z) = 8M\delta h \frac{h^2 + x^2 - z^2}{(h^2 + x^2 - z^2)^2 + 4x^2 z^2} ; \quad (9b)$$

В центральной плоскости  $z = 0$

$$H(x) = 4M \alpha z c \operatorname{tg} \frac{2\delta h}{h^2 + x^2 - \delta^2} ; \quad (9c)$$

и для тонкой шиммы

$$H(x) = \frac{8Mh\delta}{h^2 + x^2} ; \quad (9)$$

На гр. 2 начерчено  $H(x)$  для тонкой шиммы при разных  $h$  в единицах  $8M\frac{\delta}{h}$ .  
(Напомним, что  $h$  - половина зазора между шиммами;  
 $\delta$  - половина толщины шиммы.)

### 3. Плоская конечная шимма.

Плоской конечной шиммой будем называть шимму, простирающуюся по оси  $z$  от  $h$  до  $\infty$ , по оси "  $y$  " от нуля до "  $l$  " и по оси  $x$  от  $-\delta$  до  $+\delta$ .

Потенциал такой шиммы

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\delta M \int_0^l \int_h^\infty \frac{z-z'}{[x^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} dy' dz' = \\ &= 2M\delta \int_0^l \frac{dy'}{\sqrt{x^2+(z-h)^2+(y-y')^2}} = 2M\delta \int_{-y}^{l-y} \frac{dh}{\sqrt{x^2+(z-h)^2+h^2}} = \\ &= 2M\delta \left\{ \ln[l-y+\sqrt{(l-y)^2+x^2+(z-h)^2}] - \ln[\sqrt{(l-y)^2+x^2+(z-h)^2}-y] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$



Дифференцируя по  $Z$ , получаем

$$H = 2M\delta \left\{ \frac{h-z}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2} [\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}-y]} - \frac{h-z}{\sqrt{x^2+(l-y)^2+(h-z)^2} [\sqrt{x^2+(l-y)^2+(h-z)^2}+(l-y)]} \right\} \quad (11)$$

Для двух симметричных тимм к этому выражению нужно прибавить такое же с заменой  $h-z$  на  $h+z$ .  
При  $l \rightarrow \infty$ , то есть вблизи края достаточно длинной тиммы, формула (11) переходит

$$H = \frac{2M\delta(h-z)}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2} [\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}-y]} \quad (12)$$

и для двух симметричных, относительно центральной плоскости

$$H = 2M\delta \left\{ \frac{h-z}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2} [\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}-y]} + \frac{h+z}{\sqrt{x^2+y^2+(h+z)^2} [\sqrt{x^2+y^2+(h+z)^2}-y]} \right\} \quad (12B)$$

Наконец, поле двух тимм в центральной плоскости

$$H = \frac{4M\delta h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2} [\sqrt{x^2+y^2+h^2}-y]} \quad (13)$$

Рассмотрим 2 случая. 1.  $y^2 \gg h^2+x^2$  тогда

$$H = \frac{8M\delta h}{h^2+x^2}$$

т.е. поле плоской бесконечной тиммы

$$2. \quad y = 0 \quad H = \frac{4M\delta h}{h^2+x^2}$$

т.е. в два раза меньше.

На гр. 3 нарисованы кривые равного значения поля на плоскости  $X; y$ . На гр.4 нарисовано значение поля как функция расстояния от шиммы при разных расстояниях от края шимм (вдоль шиммы).

#### 4. Пилиндрическая шимма.

Если ограниченная шимма, которую мы рассматривали выше, искривлена с радиусом  $R$ , то потенциал ее магнитного поля будет

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\delta M \int_0^{\varphi_{np}} \int_0^{\infty} \frac{z-z'}{[\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos(\varphi-\varphi')+(z-z')^2}]} R d\varphi dz = \\ &= 2\delta RM \int_0^{\varphi_{np}} \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos(\varphi-\varphi')+(h-z)^2}} \end{aligned} \quad (14a)$$

где  $z$  и  $\varphi$  - полярные координаты точки.

Введя величины  $\xi = \frac{R-z}{R} = \frac{x}{R}$ , получим

$$\Phi = M\delta \int_{-\varphi}^{\varphi_{np}-\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{4\sin^2(\frac{\varphi'}{2})(1-\xi)+(\frac{h-z}{R})^2+\xi^2}} \quad (14b)$$

Если все расстояния малы по сравнению с  $R$ , то

$$\Phi = -M\delta \left\{ \int_{-y}^{l-y} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}} - \frac{1}{2} \xi \int_{-y}^{l-y} \frac{y^2 dy}{(\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2})^3} \right\} \quad (14c)$$

Таким образом поправка к потенциалу, учитывающая кривизну в первом порядке:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = -\frac{M\delta x}{2R} \left\{ -\frac{l-y}{\sqrt{(l-y)^2+x^2+(h-z)^2}} + \frac{\ln(l-y+\sqrt{(l-y)^2+x^2+(h-z)^2})}{-y+\sqrt{y^2+x^2+(h-z)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2+(h-z)^2}} \right\}; \end{aligned} \quad (15)$$

и соответственно

$$\Delta H = \frac{M\delta}{2} \frac{x}{R} \left\{ \frac{(\ell-y)(h-z)}{[(\ell-y)^2+x^2+(h-z)^2]^{3/2}} + \frac{h-z}{[\ell-y+\sqrt{(\ell-y)^2+x^2+(h-z)^2}]\sqrt{(\ell-y)^2+x^2+(h-z)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{y(h-z)}{\sqrt{y^2+x^2+(h-z)^2}} - \frac{h-z}{[\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}-y]\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}} \right\} \quad (16c)$$

Для двух симметричных шимм большой длины  $\ell \rightarrow \infty$  в центральной плоскости  $z = 0$ , получаем

$$\Delta H(x, y) = \frac{M\delta h x}{R} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{y^2+x^2+h^2}-y)\sqrt{x^2+y^2+h^2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2+h^2}} \right\} \quad (16b)$$

Таким образом, поле изогнутой шиммы, получается из поля прямой заменной  $x=R-\rho$ ;  $y=R\varphi$  и прибавкой поправки.

В заключение посмотрим, чему равно изменение поля в центральной плоскости, вызываемое перемещением шиммы. При перемещении тонкой, плоской шиммы (2-х симметричных относительно центральной плоскости) по  $x$  получаем

$$\Delta_x H = H(x_2) - H(x_1) = \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x = -16M \frac{h\delta x}{(h^2+x^2)^2} \Delta x \quad (17)$$

При изменении зазора между шиммами

$$\Delta_h H = \frac{\partial H}{\partial h} \Delta h = -16M\delta \frac{h^2-x^2}{h^2+x^2} \Delta h \quad (18)$$

Для стержневой шиммы

$$\Delta_h H = \frac{\partial H}{\partial h} \Delta h = 2M\delta \frac{\rho^2-2h^2}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \\ \Delta_x H = \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial H}{\partial z} \Delta x \cos \vartheta, \text{ где } \vartheta \quad (19)$$

-это угол между перемещением и радиусом точки наблюдения

$$\Delta_x H = -6Mh \frac{\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \Delta x \cos \vartheta \quad (20)$$

Учет отражения в крышках.

До сих пор мы рассматривали шиммы, как уходящие до бесконечности по вертикали. Теперь рассмотрим: конечность их и роль отражения в крышках. Если принять  $\kappa = \infty$  для крышек, то задача сведется к нахождению поля диполя между двумя металлическими поверхностями.

Поле всех отраженных диполей слабо зависит от  $\lambda$  (или  $\rho$ ), покуда последнее много меньше ширины зазора  $\mathcal{L}$ , так, что его можно считать равным полю при  $\lambda=0$  ( $\rho=0$ ).

Поле одного диполя в центральной плоскости для стержневой шиммы

$$\Delta H_k \sim \frac{4M\delta h}{(\kappa \mathcal{L})^3}$$

и для плоской шиммы:

$$\Delta H_k \sim \frac{16M\delta h}{(\kappa \mathcal{L})^2}$$

Откуда получаем<sup>х)</sup>

---

х) Пользуясь соотношением  $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$  и  $\sum \frac{1}{k^3} \sim 1,2$

Для стержневой шиммы  $\Delta H = 4,8 \frac{M \delta h}{L^3}$

Для плоской шиммы  $\Delta H = \frac{4}{3} \pi^2 \frac{\delta h}{L^2}$

Таким образом дополнительное поле всех отражений составляет для стержневой шиммы

$$\frac{\Delta H}{H} = 1,2 \left[ \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{L} \right]^3 \quad (21a)$$

и для плоской шиммы

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\pi^2}{6} \frac{h^2 + x^2}{L^2} \quad (21b)$$

Во всех практически интересных случаях это будут малые поправки.

Если шимма не доведена до крышек на величину  $h_1$ , то, вследствие отражения от соответствующей крышки, образуется пара диполей. Поле такого диполя приблизительно постоянно на длине порядка  $\frac{L}{2}$  и его отношение к полю основного диполя для стержневой шиммы

$$\frac{\Delta H}{H} = 16 \frac{h_1}{h} \left( \frac{h^2 + x^2}{L^2} \right)^{3/2} \sum \frac{1}{K^3} \approx 19,2 \frac{h_1}{h} \left( \frac{h^2 + x^2}{L^2} \right)^{3/2} \quad (22a)$$

и для плоской шиммы

$$\frac{\Delta H}{H} = 8 \frac{h_1}{h} \frac{h^2 + x^2}{L^2} \sum \frac{1}{K^2} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{h_1}{h} \frac{h^2 + x^2}{L^2} \quad (22b)$$

Уравнение (22) определяет зазор  $h_1$ , допустимый между шиммой и крышкой. Возможность пользоваться шиммами для исправления локальной неоднородности существенно определяется условием  $\eta \gg 1$  для крышек полюсов. Только в этом случае действие верхних краев шимм полностью компенсируется за счет отражения в крышках. В противном случае, кроме основного диполя ширины  $h$ , появляется дополнительный диполь от не-

компенсированных концов шириной  $\mathcal{L}$  и толщиной в  $\mu$  раз меньше основного. Поле такого диполя спадает очень медленно. Тиммы возможно применять только тогда, когда это дополнительно поле мало. Это поле для стержневой тиммы для  $x \ll \mathcal{L}$  равно

$$\Delta H = \frac{16M\delta}{\mu} \frac{1}{\mathcal{L}^2} \quad (23a)$$

и для плоской тиммы

$$\Delta H = \frac{32M\delta}{\mu} \frac{1}{\mathcal{L}} \quad (23b)$$

Условие того, чтобы это поле было мало по сравнению с основным для стержневой тиммы

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{8}{\mu} \frac{\sqrt{(h^2 + \rho^2)^3}}{h\mathcal{L}^2} \ll 1$$

и для плоской тиммы

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{4}{\mu} \frac{h^2 + x^2}{h\mathcal{L}} \ll 1$$

Например, при  $h = 5$  см;  $\rho = 30$  см;  $\mathcal{L} = 80$  см. это условие приводит к  $\mu > 7.8$ .

### 3. Расчет оптимальных параметров тимм.

Задача о вычислении оптимальных параметров представляет трудности не только с вычислительной стороны, но и с точки зрения постановки вопроса. При тиммировании можно добиваться, например, минимального среднеквадратичного отклонения поля в рабочей области от необходимого или того, чтобы максимальное отклонение поля от расчетного было не больше некоторой величины. Требуется также соблюдать условие, чтобы величина  $n = -\frac{d \ln H}{d \ln z}$  лежала в допустимых пределах. Оптимум приходится искать при некоторых дополнительных условиях например, при условии, чтобы зазор между тиммами, если последняя находится внутри рабочей области, был не меньше ширины пучка.

Очень важным дополнительным условием, налагаемым на выбор шимм, является требование минимального усиления поля шиммой в центре канала. В противном случае действие шиммы будет компенсировать действие магнитного канала не только в рабочей области, но и внутри канала.

Общими методами вариационного исчисления в данном случае не удастся определить оптимальные параметры и форму шимм. Поэтому приходится задавать форму шиммы в виде заданной функции с неопределенными параметрами, в частности, в виде тонкой плоской шиммы, с неопределенной толщиной и неопределенным зазором.

При сравнении разных методов постановки задач мы пришли к одному, практически удовлетворительному и легко осуществляемому, с практической точки зрения, методу определения оптимального шиммирования. При этом шиммирование производится следующим образом: подбирается одна, так называемая, основная шимма, которая почти полностью корректирует поле. Дальнейшие исправления легко производятся тоненькими шиммами методом подбора. (Отметим, что определение методом подбора параметров основной шиммы, является исключительно сложной задачей). Задача по определению параметров основной шиммы ставится следующим образом. Ищется оптимальное значение зазора, толщиной и положение шиммы, обеспечивающее минимальное усиление поля внутри канала при условии, что на границе рабочей области шимма полностью компенсирует действие канала как по величине поля, так и по его производной (по величине  $n$ ). При этом внутри рабочей области поле будет не полностью скомпенсировано, однако, оказывается, что там отклонение будет невелико. Пусть  $H(\delta, h, t - x)$  действие шиммы как функция координаты  $x$  и параметров шиммы; толщины  $2\delta$ , зазора  $2h$  и положения  $t$ . Выберем за начало координат границы рабочей области. Пусть канал находится в точке  $x = -t$ . Ищется минимум функции параметров  $h, \delta, t$ .

$$J_0 = H[h, \delta, (t_0 + t)]. \quad (24)$$

т.е. минимум действия шиммы внутри канала при следующем дополнительном условии:

$$H(h, \delta, t) = f(0) \quad (25)$$

при этом будет варьировать только  $h$  и  $\delta$ , а положение шиммы  $t$  определим из условия

$$\frac{\partial H(h, \delta, t)}{\partial x} = f'(0) \quad (26)$$

где  $f(x)$  возмущение, вызываемое каналом.

Умножаем (25) на  $\lambda$ , и ищем абсолютный минимум по  $h$  и  $\delta$  следующего выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= H(h, \delta, t+t_0) + \lambda H(h, \delta, t) \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h} &= 0 \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \delta} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим случай плоских шимм

$$H(h, \delta, t-x) = \frac{8M\delta h}{h^2 + (t-x)^2}$$

Уравнение (26) дает

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \delta} = 8Mh \left\{ \frac{1}{h^2 + (t+t_0)^2} + \lambda \frac{1}{h^2 + t^2} \right\} = 0 \quad (27a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h} = 8M\delta \left\{ \frac{h^2 - (t+t_0)^2}{[h^2 + (t+t_0)^2]^2} + \lambda \frac{h^2 - t^2}{[h^2 + t^2]^2} \right\} = 0 \quad (27b)$$

Из первого уравнения определяем величину

$$\lambda = - \frac{h^2 + t^2}{h^2 + (t+t_0)^2}$$

Подставляем значение  $\lambda$  во второе - получаем:

$$\frac{(t+t_0)^2 - h^2}{h^2 + (t+t_0)^2} = \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2} \quad (28a)$$



~~(28a)~~

К этому уравнению добавляются следующие уравнения

$$\frac{8M\delta h}{h^2+t^2} = f(0) \quad \cdot \quad \frac{16M\delta^2 ht}{[h^2+t^2]^2} = f'(0) \quad (28c)$$

Из уравнений (28) определяются три неизвестные величины  $t$ ,  $h$ ,  $\delta$ . Рассмотрим пример: Если высота и толщина канала много меньше расстояния канала до равновесной орбиты  $t_0$ , то возмущение, вызываемое каналом, с хорошей степенью точности аппроксимируется выражением

$$f(x) = \frac{P}{[x+t_0]^2} \quad (29)$$

При таком значении  $f(x)$  система уравнений (28) принимает вид:

$$\frac{(t+t_0)^2 - h^2}{h^2 + (t+t_0)^2} = \frac{t^2 - h^2}{h^2 + t^2}, \quad \frac{8M\delta h}{h^2 + t^2} = \frac{P}{t^2} \quad (30)$$

$$\frac{8M\delta ht}{[h^2 + t^2]^2} = -\frac{P}{t^3};$$

Нетрудно видеть, что решением системы уравнений (30) является:

$$t = -\frac{t_0}{2}; \quad h = \frac{t_0}{2}; \quad \delta = \frac{P}{8Mt_0^2} t_0.$$

На графике ( ) показано действие подобным образом подобранной шиммы для  $t_0 = 8$  см  $\frac{P}{t_0^2} = 2560$  гаусс. Для плоской шиммы результат нужно удвоить (8% возмущение поля на краю рабочей области у края шиммы).

При этих значениях шимму нужно устанавливать на 4 см от рабочей области с зазором между шиммами  $2h = 8$  см и, если индукция насыщения железа  $21 \cdot 10^3$ , то толщина шиммы должна

быть выбрана равной  $2\delta = 24,4$  мм.

Как видно из графика, такая шимма почти полностью решает задачу. Небольшое улучшение можно получить установкой небольшой шиммы в районе наибольшего провала поля.