

C 344.1

H-99

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

СЗ44.1  
Н-99

Н. Нягу

УЧЕТ КОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ И НЕОДНОРОДНОСТИ МАГНИТНОГО  
ПОЛЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ СТЕРЕОСНИМКОВ МЕТОДОМ РЕПРОЕКТИРОВАНИЯ.

Рукопись поступила  
в издательский отдел  
3 IX 1963 г.

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## Введение.

В настоящем отчете излагается часть задачи восстановления пространственной траектории частиц методом репроектирования снимков. Хотя в последнее время в основном развиваются — как более рациональные методы обработки снимков, основанные на автоматическом измерении координат точек вдоль изображения, метод репроектирования все еще применяется, отчасти, из-за его простоты и наглядности, а , отчасти, из-за технических трудностей, связанных с использованием новых методов. К числу таких трудностей можно отнести, например: высокие требования к качеству оптической системы и её настройке, не очень высокая производительность автоматов, несовершенство программ обработки Ч. Т. г. . Но с другой стороны, и относительно простоты и наглядности метода репроектирования также следует оговориться: по мере того, как увеличивается размер трековой камеры, возрастает и сложность обработки данных, полученных этим методом.

Действительно, обработка снимков методом репроектирования остается простой, только если изображение можно считать ортогональной проекцией траекторий, и если магнитное поле можно считать постоянным по всему объему камеры. Легко понять, что при больших размерах камеры все труднее становится соблюдать эти условия; поэтому при обработке снимков теперь придется считаться со следующими двумя новыми обстоятельствами:

- а) изображение трека является конической проекцией на плоскость снимка пространственной траектории частицы;
- б) траектория описывается не винтовой линией, а более сложной кривой.

Как будет показано, учет этих обстоятельств усложняет не только сам процесс измерения, но также и формулы перехода от

измеренных параметров к импульсу частиц,

Ниже излагается метод, который применялся в течение ряда лет (1960-1963) К<sup>0</sup>-мезонной группой ОИЯИ для обработки снимков треков в камере Вильсона. Положение находят из того, что сам метод репроектирования давно известен и подробно описан в литературе (1), и, поэтому, главное внимание уделяет решению (частных) проблем, связанных с учетом конической проекции и неоднородности магнитного поля.

По сути дела речь идет о довольно простой геометрической задаче: установить явный вид зависимости между радиусом кривизны (R) пространственной кривой и радиусом кривизны ( $\rho_k$ ) ее изображения на пленке. Однако, этой задаче нельзя дать обычного математического решения: полученные формулы должны быть простыми и удобными для численных вычислений. При решении задачи следует руководствоваться следующими соображениями:

- а) желательно свести к минимуму число параметров, через которые выражается зависимость  $R = f(\rho_k)$ ;
- б) выбранные параметры должны быть легко измеримыми на обычном репроекторе;
- в) функция  $f(\rho_k)$  должна быть по возможности простой.

#### Гл. I. Общие сведения и постановка задачи.

Наряду с определением направляющих углов, основная задача измерения треков состоит в определении радиуса кривизны ( ) траектории частицы. Как известно, радиус кривизны любой кривой это положительная величина, с размером длины, определенная в любой точке кривой по формуле.

$$R = \frac{1}{\kappa} = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right|^{-1},$$

где  $\vec{R}$  - радиус вектор кривой и  $s$  - параметр кривой, представляющий длину дуги. Название связано с возможностью аппроксимировать любую кривую вблизи данной точки окружностью, т.е. плоской кривой<sup>х)</sup>, для которой понятие "радиуса кривизны" - вполне определено; интерес к радиусу кривизны траектории объясняется тем, что  $R$  всегда связан - более или менее простым соотношением - с импульсом частицы. В простейшем случае, когда  $\vec{H} = \text{const}$ , траектория частицы описывается винтовой линией с осью параллельной направлению магнитного поля

$$\begin{aligned} x &= a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + x_0 \cos \alpha, \\ y &= a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + y_0 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $s$  - длина дуги, измеренная от точки  $(x_0, y_0, 0)$ . Согласно (1),

$$R = \frac{a^2 + \lambda^2}{a} \quad (3)$$

и связь между импульсом  $p$  и радиусом  $R$  выражается формулой

$$p = \text{const} \cdot H \cdot R \cos \alpha \quad (4)$$

где  $\alpha$  - "угол наклона" винтовой линии, т.е. угол касательной к кривой, с плоскостью перпендикулярной магнитному полю:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \quad (5)$$

---

х) Плоскость, содержащая аппроксимирующую окружность, называется "соприкасающейся" и она представляет собой предельную плоскость, содержащую 3 точки кривой, когда эти точки стремятся друг к другу.

часто определение импульса осуществляется не через радиус кривизны  $R$  самой траектории, а с помощью радиуса кривизны ( $\rho_1$ ) ортогональной проекции траектории на плоскость перпендикулярную магнитному полю. Это связано с тем, что, как правило легче получить ортогональную проекцию, чем кривую в пространстве. Например, если производить фотографирование треков в небольшой и неглубокой камере с большого расстояния (и вдоль магнитного поля,) изображение треков будет с хорошей точностью ортогональной проекцией траектории<sup>к)</sup>. Как известно,  $\rho_1$  связан с импульсом соотношением:

$$p \cos \alpha = m v c \cdot H \cdot \rho_1 \quad (6)$$

Практически, при измерении  $R$  используется тот факт, что он является радиусом кривизны соприкасающейся окружности. Через пространственную кривую проводится плоскость, которая "наилучшим" образом содержит кривую; в этой плоскости определяется окружность, которая "наилучшим" образом аппроксимирует кривую, и измеряется радиус кривизны этой окружности. Точность подобного измерения  $R$  зависит от правильного выбора соприкасающейся окружности, но, в принципе, она может быть предельно хорошей. При этом сам выбор окружности может быть осуществлен разными экспериментальными приемами: методом спрямления кривой, методом наблюдений, методом стрельы прогиба,

Относительно  $\rho_1$  действительным те-же соображения, что и относительно  $R$ , однако, теперь следует оговориться о том, что

---

к) В случае винтовой линии, измерение ортогональной проекции облегчено и тем, что она представляет собой окружность.

строго говоря, любое фотографическое изображение траектории и всякая репроекция изображения является не ортогональной, а конической проекцией. На рис. I показана дуга винтовой линии, ее ортогональная проекция и изображение дуги так, как оно получается при репроектировании фотографии этой дуги. Так как "масштаб" (увеличение) фотографирования (и репроектирования) не меняется от точки к точке дуги, коническое изображение "искажено" по отношению к ортогональному. Из рисунка видно, что искажение тем больше, чем ближе объектив к треку, чем дальше зритель от оптической оси объектива и от плоскости проектирования, и чем "круче" траектория. Вследствие этого, радиус кривизны  $\rho_k$  конической проекции может сильно отличаться от  $\rho_l$  и использование  $\rho_k$  вместо  $\rho_l$  в формуле (6) может оказаться недопустимым. Тем не менее, измерение радиуса кривизны такой "плоской" кривой часто предпочтительнее, чем измерение радиуса кривизны кривой в пространстве. Это связано с удобством и точностью измерения. В таких случаях, прежде чем пользоваться формулой (6), необходимо переходить от  $\rho_k$  к  $\rho_l$ .

Введение поправок, т.е. получение зависимости  $\rho_l = f(\rho_k)$  это чисто геометрическая задача, не зависящая от (конкретного) способа измерения  $\rho_k$ . Как уже было сказано, ей можно дать общее математическое решение, исходя из определения радиуса кривизны с помощью второй производной радиуса-вектора (см. (I)); но при этом придется работать с кривыми третьей и высшей степени<sup>х)</sup>

---

х) Коническая проекция винтовой линии является кривой третьей степени в  $\Delta$ , а ведь винтовая линия - самая "прямая" кривая описывающая реальную траекторию частиц в камере Вильсона.

Более того, полученная зависимость мало пригодна для численных вычислений. Опыт показал, что более уместно использовать при переходе  $s_k \rightarrow s_1$ , геометрическое определение радиуса кривизны. Как известно, радиус кривизны окружности вычисляется по формуле:

$$R = \frac{L^2}{8S} + \frac{S}{2} \quad (7)$$

где  $L$  - длина хорды,  $S$  - стрела прогиба. Если точки  $M_1, M_2, M_3$  (рис. 2) стремятся друг к другу, тогда  $L \rightarrow 0$  и  $S \rightarrow 0$  и получаем:

$$R = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{L^2}{8S} \quad (8)$$

Но когда эти точки стремятся друг к другу, формула (8) определяет радиус кривизны любой (плоской или пространственной) кривой, ибо она дает радиус кривизны соприкасающейся окружности и, по определению, этот радиус равен радиусу кривизны самой кривой. Поэтому, поиск зависимости  $s_1 = \varphi(s_k)$  может быть основан на формуле (8) и может быть осуществлен в следующем порядке:

а) установить явный вид зависимостей

$$\begin{aligned} L_k &= \varphi(L_1), \\ S_k &= \psi(S_1), \end{aligned}$$

где  $(L_k, S_k)$  и  $(L_1, S_1)$  - хорда и стрела прогиба конической и соответственно ортогональной проекции траектории;

б) составить отношение  $L_k^2 / 8S_k$ , как функцию от  $L_1$  и  $S_1$  и в правой части соотношения, перегруппировкой членов образовать выражения типа  $L_1^2 / 8S_1$ ;

в) удостовериться, что когда  $L_k$  и  $S_k$  стремятся к нулю,



$L_1$  и  $S_1$  также стремятся к нулю; после того операцией перехода к пределу, найти интересующее соотношение.

Этим подходом прямой поиск закона "искажения" радиуса кривизны сложной кривой при переходе от ортогональной к конической проекции заменяется поиском законов искажения двух отрезков - хорды и стрелы прогиба, что выгодно отражается на решении задачи [2].

Прежде чем исследовать влияние конической проекции на изображение отрезков (прямых линий), напомним некоторые соотношения и некоторые свойства винтовой линии.

Если ось винтовой линии параллельна оси  $Oz$ , тогда радиус вектор  $\vec{r}$  может быть представлен в виде суммы двух векторов  $\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{r}_0$  где:

$$\vec{r}^* = a \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \vec{i} + a \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \vec{j} + \lambda \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \vec{k},$$

$$\vec{r}_0 = z_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \tag{9}$$

В формулах (9),  $\vec{r}_0$  - радиус вектор точки пересечения оси винтовой линии с плоскостью  $(\alpha Oy)$ ,  $\lambda$  - длина дуги, измеренная от плоскости  $(\alpha Oy)$ ,  $\varphi$  - постоянный угол, играющий роль "фазы",  $a$  и  $\lambda$  - параметры винтовой линии (Рис.3)

Единичный вектор  $\vec{t}$  вдоль касательной дается выражением:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \vec{i} + a \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \vec{j} + \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \vec{k} \tag{10}$$

Угол  $(\alpha)$  касательной с плоскостью  $(\alpha Oy)$  - "глубинный" угол-

определяется уравнением:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \vec{t} \cdot \vec{e} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}},$$

откуда легко получить уже известную формулу (5).

Единичный вектор ( $\vec{n}$ ) вдоль производной  $\frac{d\vec{t}}{ds}$  называется "главной нормалью" кривой; для винтовой линии  $\vec{n}$  - параллелен плоскости ( $oxy$ ):

$$\vec{n} = - \left[ \cos\left(\frac{\lambda s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{\lambda s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \vec{j} \right]. \quad (12)$$

Легко установить, что прямая ( $\Delta$ ) содержащая главную нормаль пересекает ось винтовой линии.

Центр соприкасающейся окружности ( $C$ ) находится на прямой в направлении вектора  $\vec{n}$ , на расстоянии  $R$  от кривой (см. формулы (1) и (3)). В случае винтовой линии, центр  $C$  находится на оси  $OO'$ .

Пусть  $\widehat{ABC}$  (рис. 3) - дуга винтовой линии и  $\vec{n}$  - главная нормаль в середине дуги. По определению, стрела прогиба ( $\xi$ ), дуги любой кривой называется отрезок от хорды до кривой, измеренный вдоль перпендикуляра в середине хорды. Для винтовой линии можно доказать следующее утверждение (Приложение А):

"Хорда  $AB$  - перпендикулярна главной нормали в середине дуги, прямая  $\Delta$  пересекает хорду в ее середине".

Отсюда следует важный для дальнейшего изложения вывод: стрела прогиба винтовой линии параллельна горизонтальной плоскости.

## Глава II. Винтовая линия и коническая проекция.

### § 1. Искажение изображения отрезка при конической проекции.

I.I. Преобразование координат при конической проекции (рис. 4) определяется центром проекции ( $\zeta$ ) и плоскостью проекции ( $Ox_0y_0$ ). Если обозначить ( $x, y, z$ ) координаты точки в пространстве, ( $M$ ), и ( $x_0, y_0, z_0$ ) координаты конической проекции, тогда, в предположении, что центр проекции ( $Ц.П.$ ) находится на оси  $Oz$ , имеют место следующие соотношения:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

$$\frac{z}{\zeta} = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

откуда легко получить:

$$x_0 = \frac{\zeta}{\zeta - z} x,$$

$$y_0 = \frac{\zeta}{\zeta - z} y. \quad (13)$$

Если прямая ( $\Delta$ ) определена точкой ( $x_0, y_0, z_0$ ) и направляющими косинусами  $l, m, n$ :

$$(\Delta) \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (14)$$

ее коническую проекцию можно получить следующим образом. Через центр проекции ( $0, 0, \zeta$ ) и через прямую проведем плоскость ( $\pi$ ) (рис. 5):

$$(\pi) \quad \begin{vmatrix} x & y & z - \zeta \\ x_0 & y_0 & z_0 - \zeta \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0;$$

пересечение ( $\pi$ ) с плоскостью ( $x_0y_0$ ) дает прямую ( $\Delta_0$ ).

$$(\Delta_c) \quad y_{cc} = \frac{n(y_{c0} + m(s-z_0))}{m\alpha_0 + l(s-z_0)} x_c - \frac{m\alpha_0 - l y_{c0}}{m\alpha_0 + l(s-z_0)} \zeta, \quad (14')$$

является конической проекцией прямой  $(\Delta)$ .

Ортогональную проекцию прямой  $(\Delta)$  легко получить из первого равенства (14):

$$(\Delta_{\perp}) \quad y_{\perp} = \frac{m}{l} x_{\perp} + (y_{c0} - \frac{m}{l} \alpha_0). \quad (14'')$$

Если  $\varphi_c$  и  $\varphi_{\perp}$  - углы прямой  $(\Delta_c)$  и  $(\Delta_{\perp})$  с осью  $Ox$ , соотношения (14') и (14'') дают:

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \frac{n y_{c0} + m(s-z_0)}{m\alpha_0 + l(s-z_0)}, \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\perp} = \frac{m}{l},$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{n(y_{c0} + m\alpha_0)}{(l^2 + m^2)(s-z_0) + n(l\alpha_0 + m y_{c0})}, \quad (16)$$

где  $\beta = (\varphi_c - \varphi_{\perp})$ .

Угол  $\beta$ , как будто, "измеряет" степень отклонения конической проекции от ортогональной. С помощью формул (16) легко установить следующие 3 случая, когда проекции "совпадают" ( $\beta = 0$ ):

- 1)  $n = 0$ : прямая  $(\Delta)$  параллельна плоскости проекции;
- 2)  $\frac{m}{l} = \frac{y_{c0}}{\alpha_0}$  : прямая  $(\Delta)$  пересекает ось  $Oz$ ;
- 3)  $\zeta \rightarrow \infty$  : центр проекции находится на бесконечности.

1.2. В дальнейшем условимся выбирать всегда (III) на оси  $Oz$

ориентировать ось  $Oz$  по направлению от плоскости проецирования (III) к (II). Оси  $Ox$  и  $Oy$  ничем не выделены операцией проецирования (конической или ортогональной) и, поэтому, для  $t_{\beta}$  можно найти выражение не зависящее от координат  $Ox$  и  $Oy$ .

Используя обычные приемы аналитической геометрии, легко найти расстояние  $\delta$  от прямой  $(\Delta)$  до "оси проецирования" ( $Oz$ ), и расстояние  $\bar{z}$  до (III) точки прямой  $(\Delta)$  ближайшей к оси  $Oz$ :

$$\delta = \frac{|mz_0 - lz_0|}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad (17)$$

$$\bar{z} = \frac{z_0(l^2 + m^2) - n(-lz_0 + mz_0)}{(l^2 + m^2)}. \quad (18)$$

Если теперь обозначить  $\alpha_{\Delta}$  - угол  $(\Delta)$  с  $(II)$ , получим

$$t_{\alpha_{\Delta}} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad (19)$$

и наконец:

$$t_{\beta} = t_{\alpha_{\Delta}} \cdot \frac{\delta}{\delta - \bar{z}}. \quad \text{xx)} \quad (20)$$

x) "связывают" в смысле что одну прямую можно получить из другой с помощью параллельного перемещения (трансляции).

xx) При этом, в определении угла  $\beta$ , мы ограничиваемся углами

$$\beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Выражение (20) не зависит от выбора осей  $Ox$  и  $Oy$ ; в частности, оно остается в силе, даже если условимся выбрать оси  $Ox$  и  $Oy$  так, чтобы имело место  $l=0$ , т.е., так, чтобы прямая  $\Delta$  была параллельна плоскости  $(yOz)$ . В этом случае происходят некоторые упрощения в формулах (14-19), которые будут учтены в дальнейшем.

Из (20) видно, что  $\tan \beta$  зависит существенно образом от положения (III). При измерениях на репресекторе, выбор (III) произволен, а осуществляется всегда согласно определенному приему. В дальнейшем, будем предполагать что (III) - это горизонтальная плоскость  $(xOy)$  проходящая через "начало" трека, причем "начало" трека определяется по отношению к движению частицы вдоль траектории.

Учитывая эти два соглашения, во всех предыдущих формулах следует ставить  $l=0$ ,  $z_0=0$ ; тогда получаем, в частности:

$$\begin{aligned} \delta &= |x_0|, \\ \xi &= -y \tan \alpha_{\Delta}, \\ \tan \alpha_{\Delta} &= \frac{n}{m}. \end{aligned} \tag{21}$$

1.3. Вычислим теперь длину  $L_k$  конической проекции отрезка  $L$ .

Пусть прямая  $(\Delta)$  -содержащая отрезок  $L$ , задана через направляющие косинусы  $(l, m, n)$  и координаты  $(x_0, y_0, 0)$  начала отрезка. Тогда "конец" отрезка имеет координаты  $(x_0 + L$

---

х) В реальных условиях ( измерениях на репресекторе) это условие всегда выполнимо ( см. стр. 20 ).

$y_0 + Lm, Ln$ ) и коническая проекция отрезка представляет собой новый отрезок соединяющий точки  $\{x_0, y_0, 0\}$  и  $\{(\alpha_0 + L\ell) \frac{S}{S-Ln}, \frac{S}{S-Ln}, 0\}$  (см. формулу 13).

Легко получить

$$L_k^2 = \left[ (\alpha_0 + L\ell) \frac{S}{S-Ln} - x_0 \right]^2 + \left[ \frac{S}{S-Ln} - y_0 \right]^2 = \frac{L^2}{(S-Ln)^2} \left[ (\ell S + n\alpha_0)^2 + (mS + ny_0)^2 \right] \quad (22)$$

В то-же время, длина  $L_{\perp}$  ортогональной проекции отрезка имеет значение

$$L_{\perp}^2 = L^2 (\ell^2 + m^2) = L^2 \cos^2 \alpha_{\Delta} \quad (22')$$

Нас интересует общий вид зависимости  $L_k = \frac{\rho}{L_{\perp}} (L_{\perp})$  (см. стр. 6), он получается сразу из (22) и (22') в виде:

$$L_k = L_{\perp} \cdot \frac{\rho}{L_{\perp}} (\ell, m, n, \alpha_0, y_0, \varepsilon_0, \dots)$$

где 
$$\frac{\rho}{L_{\perp}} = \frac{[(\ell S + n\alpha_0)^2 + (mS + ny_0)^2]^{-1/2}}{(S-Ln) \cos \alpha_{\Delta}}$$

Функция  $\frac{\rho}{L_{\perp}}$  может быть сведена к более удобному для вычисления виду, если вводить  $\cos \beta$ . Учитывая (20), после нескольких преобразований получаем:

$$L_k = \frac{L_{\perp}^2}{(S-Ln)^2} \frac{\left[ S + \frac{n(\ell\alpha_0 + m y_0)}{\ell^2 + m^2} \right]^2}{\cos^2 \beta}, \quad (23)$$

$$\text{где: } \cos^2 \beta = \frac{[(l^2 + m^2) \zeta + n(lx_0 + my_0)]^2}{(l^2 + m^2) [(l\zeta + mx_0)^2 + (m\zeta + ny_0)^2]} \quad (24)$$

Рассмотрим теперь коническую проекцию  $L_k$  отрезка  $L$ , в случае  $z_0 \neq 0$ ,  $n = 0$  (отрезок параллельный III, на расстоянии  $z_0$  от III).

Отрезок  $L$  соединяет между собой точки  $\{x_0, y_0, z_0\}$  и  $\{x_0 + l, y_0 + m, z_0\}$ ; отрезок  $L_k$  соединяет точки  $\left\{\frac{\zeta}{\zeta - z_0} x_0, \frac{\zeta}{\zeta - z_0} y_0, 0\right\}$  и  $\left\{\frac{\zeta}{\zeta - z_0} (x_0 + l), \frac{\zeta}{\zeta - z_0} (y_0 + m), 0\right\}$ , отсюда получаем:

$$L_k^2 = \left(\frac{\zeta}{\zeta - z_0}\right)^2 \cdot L^2 \cdot (l^2 + m^2),$$

и, т.к. при  $n = 0 \rightarrow (l^2 + m^2) = 1$ , получаем окончательное:

$$L_k = \frac{\zeta}{\zeta - z_0} L. \quad (25)$$

Теперь можно неизвестные некоторые итоги:

1) Угол  $\beta$  между конической и ортогональной проекциями прямой ( $\Delta$ ) дается формулами (20) или (24);

2) "Искажение" длины отрезка  $L$  при конической проекции дается формулой (23) в случае  $z_0 = 0$ ,  $n \neq 0$  и формулой (25) в случае  $z_0 \neq 0$ ,  $n = 0$ .

3) В применении к винтовой линии, хорда преобразуется по формуле (23), а стрела прогиба - по формуле (25).

1.4. При определении зависимости  $\rho_k = f(\rho_1)$  с помощью фор-



кули (8) следует учесть следующее важное обстоятельство: стрела прогиба ( $S_k$ ) конечного изображения кривой  $\sigma$  не является преобразованием стрелы прогиба ( $S$ ) кривой. Действительно  $S_k$  и  $S$  является стрелами прогиба двух разных кривых, одна на (III), другая в пространстве; по определению, стрела прогиба это отрезок перпендикулярный вдоль перпендикуляра в середине хорды, откуда следует, что в общем случае,  $S_k$  не является изображением  $S$ <sup>\*)</sup>. В этом можно убедиться, хотя бы на следующем рассуждении: при конеческой проекции любой отрезок сохраняет свой угол с осью  $Ox$  на угол  $\beta$  (см. § I.I), причем  $\beta$  зависит от ориентации отрезка; в частности, если  $n=0$  тогда  $\beta=0$ . Поэтому, перпендикулярно в пространстве отрезки преобразуются в неперпендикулярные; в частности, изображение ( $\sigma$ ) стрелы прогиба ( $S$ ) не перпендикулярно к изображению ( $L_k$ ) хорды ( $L$ ) и, поэтому,  $\sigma$  не может быть стрелой прогиба изображения (рис.6). Более того, в пространстве стрела прогиба ( $S$ ) пересекает хорду ( $L$ ) в середине; но при конеческой проекции средняя точка отрезка не преобразуется в среднюю точку изображения. Смещение средней точки хорды можно определить аналитически, однако, наложенный здесь способ определения радиуса кривыми исключает операции перехода к пределу  $L \rightarrow 0$  (см. (8)); при этом, смещение также стремится к нулю и мы не можем пренебречь. Что касается угла между  $S_k$  и  $\sigma$ , он равен соответственно углу  $\beta$ . Действительно, при конеческой проекции инвертируется на угол  $\beta$  не отклонение к  $Ox$ , а  $S$ , в случае  $n=0$ , такой поворот не протеривает.

---

\*) Не всегда, хорда изображения ( $L_k$ ) является изображением хорды ( $L$ ).

Из рис. 6 видно, что имеет место следующее приближенное соотношение

$$\frac{S_k}{a} \approx \cos \beta \quad (26)$$

Соотношение (26) тем точнее, чем ближе дуга к касательной ( $\vec{t}$ ), и в пределе  $L_k \rightarrow 0$ , становится строгим равенством. Теперь можно составить отношение  $L_k^2 / 8S_k$  или функцию  $L$  и  $S$ :

$$\begin{aligned} \frac{L_k^2}{8S_k} &= \frac{L^2}{(S-Ln)^2} \frac{\left[ S + \frac{n(ez_0 + m^2 y_0)^2}{l^2 + m^2} - (l^2 + m^2) \right]}{\cos^2 \beta} \frac{S}{8S \cdot \cos \beta \cdot (S-z_0)} \\ &= \frac{L^2}{8S} \frac{1}{\cos^3 \beta} \frac{(l^2 + m^2) \left[ S + \frac{n(ez_0 + m^2 y_0)^2}{l^2 + m^2} \right]^2}{(S-Ln) S} \end{aligned} \quad (27)$$

Чтобы перейти к радиусам кривизны, необходимо определить  $\lim_{L \rightarrow 0} (L_k^2 / 8S_k)$ ; эта операция эквивалентна той, при которой точки  $A, B, C$ , (рис. 3), стремятся к одной "общей" точке  $M$ ; в зависимости от расположения точки  $M$ , получаем радиус кривизны в той или иной точке кривой. В частности, если  $B \rightarrow A$  и  $C \rightarrow A$ , получаем радиус кривизны в "начале" трена.

Для этого:

- а) дуга  $\widehat{AC}$  стремится к касательной  $\vec{t}$  в точке  $A$ ,
- б)  $l, m, n$  становится направлением касательной  $\vec{t}$  и  $\vec{t}$ ;
- в) угол  $\beta$  становится углом наклона касательной  $\vec{t}$ ;
- г) расстояние  $z_0$  от точки  $M$  до (или) стремится к нулю.

В этих условиях, (27) даст:

$$R_k = R \frac{1}{F_k} = R \frac{1}{\cos^3 \beta} \frac{(l^2 + m^2) \left[ S + \frac{n(ez_0 + m^2 y_0)^2}{l^2 + m^2} \right]^2}{S^2} \quad (28)$$

где  $F_k$  - коэффициент перехода от  $\rho_k$  к  $\rho$ .

Коэффициент  $F_{\perp}$  перехода от  $\rho_k$  к  $\rho_{\perp}$  получается аналогичным образом, учитывая что при конической пресечении, стрела прогиба  $S$  преобразуется согласно (25):

$$\rho_k = \rho_{\perp} \frac{1}{F_{\perp}} = \rho_{\perp} \frac{1}{2n^2 \beta} \frac{\left[ \zeta + \frac{n(e\alpha_0 + m^2 \alpha_0)}{\zeta^2 + m^2} \right]^2}{\zeta^2} \quad (29)$$

1,5. Формулы (28) и (29) дают связь радиусов кривизны  $R$ ,  $\rho_k$  и  $\rho_{\perp}$  кривой в пространстве и ее изображений (конической и ортогональной). Эти зависимости выражаются с помощью факторов  $F_k$  или  $F_{\perp}$ , которые следует вычислить на основе измеренных данных, в той точке трека, в которой определяется зависимость. В частности, формулы (28) и (29) дают явные выражения  $F_k$  и  $F_{\perp}$  для "начальной" точки трека. Нетрудно убедиться, что выражения  $F_k$  и  $F_{\perp}$  для любой другой точки трека отличаются от приведенных лишь тем, что вместо  $\zeta^2$ , в знаменателе следует ставить  $\zeta(\zeta - \alpha_0)$ .

Определение радиуса кривизны  $\rho_k$  в начальной точке трека практически не выполнено обычно используемыми приемами измерения на репресекторе. Например, измеренный методом наблюдений радиус  $\rho_k$ , следует приписывать не начальной точке, а некоторой "средней" точке  $\tilde{M}$  дуги, вдоль которой оператор добился совпадения наблюдения с треком. Однако, вычисление фактора  $F_k$  в точке  $\tilde{M}$  потребовало бы вычисления многочисленных операций на репресекторе, дополнительно к тем операциям, которые необхо-

x) точка трека, которая находится на ИЦ.  
 xx) При этом,  $\zeta, m, n$  будут относиться не к "начальной" точке, а к последующей.

длин для определения направляющих углов самого трека. Поэтому, ни в дальнейшем будем считать, что (28) и (29) являются рабочими формулами и это, повидимому, вполне оправдано; ведь, когда коническая проекция даст существенное отклонение от ортогональной, изображение сильно отличается от круга и добиться хорошего совпадения наблюдения и изображением на большой дуге дуги нельзя; а когда изображение близко к окружности, фактор мало отличается от единицы.

1.6. Подводя итог, можно сказать, что учет конической проекции сводится к замене формул (4) и (6) формулами

$$p = \text{const.} \cdot H \cdot F_k \cdot \rho_k \cdot \cos \alpha, \quad (4^X)$$

$$p \cos \alpha = \text{const} \cdot H \cdot F_{\perp} \cdot \rho_k, \quad (6^X)$$

т.е. сводится к введению фактора  $F_k$  ( $F_{\perp}$ ). Если теперь перечислить все параметры, которые необходимы для определения кинематики частицы, получим следующий список:

- а) радиус кривизны ( $\rho_k$ ) конической проекции траектории
- б) фактор перехода ( $F_k$  или  $F_{\perp}$ ) от  $\rho_k$  к импульсу ( $p$ )
- в) направляющие углы импульса, т.е. направляющие углы касательной к траектории в начале трека.

Отсюда видно, что дополнительно к "классическому" случаю, когда изображение можно было отсчитывать ортогональной проекции, необходимо определить лишь фактор  $F_k$  ( $F_{\perp}$ ). Для него можно привести более наглядные выражения, чем (28) или (29):

$$F_k = \frac{\cos^3 \beta}{\cos^2 \alpha} \frac{s^2}{(s-z)^2},$$
$$F_{\perp} = \cos^3 \beta \frac{s^2}{(s-z)^2}, \quad (30)$$

где  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\delta}{\zeta - \bar{z}}$  ( см. (18), (19), (20). Остается лишь выразить  $F_k$  и  $F_L$  с помощью измеренных на репроекторе величин. При этом желательно планировать как можно более рациональные операции измерения для того, чтобы свести к минимуму затраченное для этого время.

Обычно направляющие касинусы трека определяются с помощью "глубинного" угла ( $\alpha'$ ) и угла вылета в ортогональной проекции ( $\alpha''$ ), ( см. рис. 7); исходя из этого, операции по определению этих углов будем считать необходимыми, и будем согласовать с ними измерения всех дополнительных параметров  $x$ ).

Согласно ( 20 ), угол  $\beta$  зависит от  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\bar{z}$  и  $\zeta$ . Выражения для  $\delta$  и  $\bar{z}$  особенно просты, если оси  $Ox$  и  $Oy$  выбраны так, чтобы имело место  $b=0$  ( см. (21) ). В этом случае получаем:

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\alpha^2}{[\delta + \gamma_0 \operatorname{tg} \alpha]^2}, \quad (31)$$

$$\frac{\zeta^2}{(\zeta - \bar{z})^2} = \frac{\delta^2}{[\delta + \gamma_0 \operatorname{tg} \alpha]^2}, \quad (32)$$

$$F_k = \frac{b}{[1 + \operatorname{tg}^2 \beta]^{3/2}} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\zeta^2}{[\zeta + \gamma_0 \operatorname{tg} \alpha]^2}, \quad (33)$$

$$F_L = \frac{1}{[1 + \operatorname{tg}^2 \beta]^{3/2}} \frac{\zeta^2}{[\zeta + \gamma_0 \operatorname{tg} \alpha]^2}, \quad (34)$$

x) Следуя обычной практике измерения, угол  $\alpha$  отсчитывается от горизонтальной плоскости ( т.е. от  $HN$ ) вверх или вниз, и пишется ему при этом знак (+) или (-); угол ( $\alpha''$ ) отсчитывается от некоторого "нулевого" направления в  $HN$ , направо и налево, также принимая ему знак (+) или (-).

где обозначения те-же как в § 1.2. Надо только описать каким образом можно добиться того, чтобы измерения на репресекторе соответствовали случаю  $l=0$ . Ниже приведем в виде "краткой инструкции" перечень операций, с помощью которых оператор получает полный набор нужных параметров, соблюдая при этом условие  $l=0$ .

а) Включаем оба объектива. Ставим экран в горизонтальное положение и двигая его по горизонтали и по вертикали добиваемся "совпадения" в центре экрана двух изображений "начала" трека после этого застопорим горизонтальное и вертикальное движение экрана.

б) Вращаем экран, пока на нем получаем "совпадение" как можно большей части трека; при этом пользуемся степенями свободы (1) и (2) экранов (рис. 8), пока реверсная линия (ав) экрана совпадает с касательной к треку в начальной точке.

в) Вращаем экран вокруг оси (cd) обратно, до горизонтального положения; угол поворота равен углу  $\alpha$  (со знаком (+) или (-)); угол оси (ав) с выбранным "нулевым" направлением, равен углу  $\beta$  (со знаком (+) или (-)).

г) Будем считать (ав) ось  $0^*y^*$  и (cd) ось  $0^*x^*$ ; такой выбор осей  $0^*x^*y^*$  соответствует как раз тому случаю, когда для данной касательной  $l=0$  (сравни рис.8 и рис.1). Условно, будем считать положительным направлением  $0^*y^*$  от начала трека по направлению импульса (т.е. по направлению касательной к треку); соответственно этому, ось  $0^*x^*$  следует ориентировать так, чтобы ревер  $0^*x^*y^*z^*$  был "правым реверсом".

---

и) Согласно § 1.2., ось  $0^*z^*$  всегда направлена от (НЦ) к фотосаннтарату.

- д) С помощью отвеса или другим способом <sup>х)</sup>, определяем точку пересечения оптической оси одного (любого!) об'ектива с экраном и измеряем ее координаты  $(x_0^*, y_0^*)$ . Значения  $x_0^*, y_0^*$  с обратным знаком  $(x_0 = -x_0^*, y_0 = -y_0^*)$  дают координаты начала трека в системе  $Oxyz$ , в которой  $l = 0$ .
- е) Выключаем свет через другой об'ектив и, с помощью наблюдения измеряем радиус кривизны  $R_k$ , "одиночного" изображения.
- ж) На вертикальной стойке репроектора, измеряем расстояние  $\zeta$  от экрана до об'ектива фотоаппарата.

---

к) Так как при определении  $x_0^*, y_0^*$  не требуется совсем большой точности, практически можно определить точку пересечения с помощью каких-либо реперов в камере.

Гл. II.

Учет неоднородности магнитного поля.

Хотя в предыдущей главе нами изучалось "искажение" винтовой линии при конической проекции, более внимательное рассмотрение материала показывает, что полученные формулы остаются в силе для любой кривой, стрела прогиба которой параллельна плоскости проектирования. Действительно, во всех рассуждениях вид траекторий (кривой) повлиял только на то, что хорда ( $L$ ) преобразовалась по формуле (23), а стрела прогиба ( $S$ ) по формуле (25), ( см. § I.4, гл. I.). А так как вид траектории частицы зависит от распределения магнитного поля в камере, из этого замечания следует один обобщающий вывод: каково бы ни было распределение магнитного поля, если стрела прогиба траектории параллельна (III), то зависимость  $\varphi_L = \varphi(R)$  выражается формулой (28),. В частности, для того чтобы (28) осталось верной достаточно, чтобы во всех точках камеры направление вектора  $\vec{H}$  было перпендикулярно (III).

Снять и это ограничение относительно распределения поля означает, по сути дела, разрешить стреле прогиба занимать любую ориентацию в пространстве, тогда все предыдущие рассуждения приобретут самый общий характер и, тем самым, изложенный в гл. II, § I.6 метод определения импульса автоматически обобщается на случай неоднородного магнитного поля.

В дальнейшем мы будем предполагать, что распределение магнитного поля ( $\vec{H}$ ) т.е. распределение его интенсивности ( $H$ ) и его ориентации,  $\vec{\xi}$  (известно и задано либо в виде аналитической функции, либо в виде карты или таблиц.

Что касается кривой, описывающей трек будем предполагать лишь, что она генерируется вследствие искривления траектории



согласно закону Лоренца. Наконец, при исследовании поведения стрелы прогиба, будем пользоваться лишь ее общим свойством: стрела прогиба любой кривой параллельна главной нормали<sup>x)</sup>, т.е. перпендикулярна касательной.

Общий вид законов преобразования углов, отрезка и радиуса кривизны мы установим, следуя приемам, изложенным в гл. I и II.

### I. I. Преобразование углов.

Если  $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$  - версор касательной в точке  $(x, y, z)$ , и  $\vec{\xi} = \epsilon_1\vec{i} + \epsilon_2\vec{j} + \epsilon_3\vec{k}$  - версор магнитного поля в той же точке, тогда версор главной нормали ( $\vec{\lambda} = \lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k}$ ) определяется из векторного произведения:

$$\vec{\lambda} = \frac{(\vec{v}, \vec{\xi})}{\sin(\vec{v}, \vec{\xi})}; \quad (35)$$

направляющие косинусы стрелы прогиба имеют, поэтому следующий общий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m\epsilon_3 - n\epsilon_2}{\sin(\vec{v}, \vec{\xi})}, \\ \lambda_2 &= \frac{n\epsilon_1 - l\epsilon_3}{\sin(\vec{v}, \vec{\xi})}, \\ \lambda_3 &= \frac{l\epsilon_2 - m\epsilon_1}{\sin(\vec{v}, \vec{\xi})}. \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть  $(\Delta)$  и  $(\Delta_0)$  - две прямые, пересекающиеся в точке  $(x, y, z)$ , а  $(l, m, n)$ , и  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  их направляющие косинусы. (рис. 10). Для любой прямой, угол между ее ко-

---

ж) если длина хорды стремится к нулю.

нической проекцией и ось  $Oz$  выражается формулой (15), поэтому между коническими проекциями прямых ( ) и ( ) образуется угол  $(\varphi_c - \varphi_{cs}, x)$  где:

$$\tan(\varphi_c - \varphi_{cs}) = \left| \frac{\frac{ny + m(\zeta - z)}{nx + l(\zeta - z)} + \frac{l_3 y + l_2(\zeta - z)}{l_3 x + l_1(\zeta - z)}}{1 + \frac{ny - m(\zeta - z)}{nx + l(\zeta - z)} \cdot \frac{l_3 y + l_2(\zeta - z)}{l_3 x + l_1(\zeta - z)}} \right| \quad (37)$$

или:

$$\tan(\varphi_c - \varphi_{cs}) = \frac{(\zeta - z) \{ x(m l_3 - n l_2) + y(n s_1 - l s_3) - (\zeta - z)(l s_2 - m s_1) \}}{n s_3(x^2 + y^2) + (\zeta - z) [n(x l_1 + y l_2) + l_3(l x + m y) + (\zeta - z)^2(l l_1 + m l_2)]} \quad (38)$$

В векторной форме формула (38) принимает вид:

$$\tan(\varphi_c - \varphi_{cs}) = \left| \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2) [\vec{e}_1 (\vec{v} \times \vec{z})]}{(\vec{e}_1 \times \vec{v}) \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{z}) - [\vec{e}_2 (\vec{e}_1 \times \vec{v})] [\vec{e}_1 (\vec{e}_2 \times \vec{z})]} \right|, \quad (39)$$

где  $\vec{e} = \vec{r} - \vec{s}$  (рис. 10).

Из (39) видно, что угол  $(\varphi_c - \varphi_{cs})$  зависит главным образом, от двух факторов:

а) от ориентации вектора  $(\vec{v} \times \vec{z})$  относительно (III), т.е. от ориентации плоскости  $(\pi)$  прямых  $(\Delta)$  и  $(\Delta_s)$ ;

б) от вектора  $\vec{e}$ , т.е. от расположения точки  $(x, y, z)$  относительно (Ц.Н.).

В частности,  $(e_c - e_{cs}) = 0$ , если  $(\pi)$  содержит ось  $O_2$  или содержит хотя бы центр проектирования (ЦП)

Предположим теперь, что  $(\Delta)$  совпадает с конической и  $(\Delta_S)$  - со стрелой прогиба траектории частицы; тогда  $(\Delta)$  и  $(\Delta_S)$  и для направляющих косинусов  $(\Delta_S)$  действительными формулы (36), что приводит (38) к следующему виду:

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \quad (40)$$

где:  $\beta^* = (e_c - e_{cs})$

$$\mathcal{N} = (eE_2 - mE_1) [n(\alpha^2 + \gamma^2) - n(S-z)^2 + (S-z)(e\alpha + m\gamma)] + \\ + (mE_3 - nE_2) n\alpha(S-z) + (mE_1 - eE_3)(S-z)m\gamma$$

$$\mathcal{M} = (S-z) [(eE_2 - mE_1)(m\alpha - e\gamma) + (mE_3 - nE_2)(m\gamma + n(S-z)) - (mE_1 - eE_3)(n\alpha + e\gamma)]$$

Формула (40) представляет собой обобщенную формулу (16) на случай произвольной ориентации магнитного поля. Если обозначить  $\beta_0$  значение  $\beta$  в случае однородного поля ( $E_1 = E_2 = 0, E_3 = 1$ )<sup>x)</sup> тогда для разности  $\mu = (\beta^* - \beta_0)$  получаем:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{[e\alpha + m\gamma - n(S-z)] [eE_2 - mE_1]}{(S-z)(e^2 + m^2)E_3 - [nm(S-z) + e^2\gamma - em\alpha]E_2 - [m^2\alpha - m\gamma + en(S-z)]E_1} \quad (41)$$

Вычислим теперь  $\cos \beta^*$  как функцию  $\cos \beta_0$ , по формуле:

$$\cos \beta^* = \cos(\beta_0 + \mu) = \cos \beta_0 \cos \mu (1 - \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \mu)$$

После несложных преобразований получаем:

$$\cos \beta^* = \frac{A}{3} \cos \beta_0$$

<sup>x)</sup> см. сноски № стр. 25

где :

$$A = (\zeta - z)^2 (\ell^2 + m^2) \left\{ [n(\ell x + m y) + (\zeta - z)(\ell^2 + m^2)] \varepsilon_3 - [-\ell(m x - \ell y) + n(m y + m(\zeta - z))] \varepsilon_2 - [m(m x + \ell(\zeta - z)) + n(m x + \ell(\zeta - z))] \varepsilon_1 \right\},$$

$$B = (\zeta - z) [n(\ell x + m y) + (\zeta - z)(\ell^2 + m^2)] \left\{ [\ell x + m y - n(\zeta - z)]^2 (\ell \varepsilon_2 - m \varepsilon_1)^2 + [(\zeta - z)(\ell^2 + m^2) \varepsilon_3 - n(\zeta - z)(m \varepsilon_2 + m \varepsilon_1) + (m x - \ell y)(\ell \varepsilon_2 - m \varepsilon_1)]^2 \right\}^{1/2}.$$

### 1.2. Преобразование стрелки прогиба.

В случае произвольной ориентации магнитного поля, стрелка прогиба ( S ) больше не представляет собой отрезок параллельный (Ш) и, поэтому, при конической проекции, S и L преобразуется по одной и той же формуле (22):

$$S_k^2 = S^2 \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^2} \frac{[\alpha \alpha_3 + (\zeta - z) \alpha_4]^2 + [\gamma \alpha_3 + (\zeta - z) \alpha_2]^2}{[(\zeta - z) - S \alpha_3]^2} \quad (43)$$

заменяем (36) в (43) и получаем:

$$S_k^2 = S^2 \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^2} \times \frac{[\alpha(\ell \varepsilon_2 - m \varepsilon_1) + (\zeta - z)(m \varepsilon_3 - n \varepsilon_2)]^2 + [\gamma(\ell \varepsilon_2 - m \varepsilon_1) + (\zeta - z)(n \varepsilon_1 - \ell \varepsilon_3)]^2}{[(\zeta - z) \sin(\vec{\nu}, \vec{\xi}) - S(\ell \varepsilon_3 - m \varepsilon_1)]^2} \quad (44)$$

§ 2. формулы (22), (42) и (44) полностью определяют зависимость

$S_k = f(R)$  в общем случае, включая как учет конической проекции, так и произвольную ориентацию магнитного поля.

х) Угол  $\beta$ . совпадает с вычисленным на стр. 10 углом  $\beta$ .

Действительно, рассуждения, подобные изложенным в гл. II, § 1.4. приводит к:

$$\Sigma = S_k \cdot \cos \beta^* = S_k \cos \beta_0 \cos \mu (1 - \tan \beta_0 \tan \mu), \quad (45)$$

где  $\Sigma$  - стрела прогиба изображения и  $S_k$  - коническая проекция стрелы прогиба траектории. Теперь легко составить соотношение  $L^2/8\Sigma$  и переходить к пределу  $L \rightarrow 0$ . При этом, как и в изложенном в гл. II более простом случае, нас будет интересовать значение функции  $\bar{F}(R)$  в начале трека; это означает, что одновременно с переходом к пределу  $L \rightarrow 0$ , следует осуществлять и переход к пределу  $z \rightarrow 0$  (см. гл. II § 1.4). Тем самым формулы несколько упрощаются. На этих формулах можно также убедиться в том, что переходы  $L \rightarrow 0$  и  $S \rightarrow 0$  сопровождаются переходами  $L_k \rightarrow 0$ ,  $S_k \rightarrow 0$  и  $\Sigma \rightarrow 0$ , что показывает, когда отношение  $L^2/8\Sigma$  стремится к радиусу  $R$ , соотношение  $L^2/8\Sigma$  стремится к  $S_k$ .

Для  $S_k$  получаем соотношение:

$$S_k = R \frac{[S(\rho^2 + m^2) + n(\rho \cos \theta + m \eta)]^3}{S^2(\rho^2 + m^2)^{3/2} \cos^3 \beta} \cdot |\bar{F}| \quad (46)$$

где

$$\bar{F} = \frac{\sqrt{(\rho e_2 - m e_1)^2 + m e_3 - n e_2)^2 + (n e_1 - \rho e_3)^2}}{\{[n(\rho \cos \theta + m \eta) + S(\rho^2 + m^2)] e_3 - [\rho(m \cos \theta + n \eta) + m(S \rho + n \eta)] e_2 - [m(m \cos \theta + n \eta) + n(n \eta + S \rho)] e_1\}} \quad (47)$$

Из этих формул видно, что ориентация стрелы прогиба (другими словами - версор магнитного поля  $\vec{\xi} = e_1 \vec{i} + e_2 \vec{j} + e_3 \vec{k}$ ) входит в явном виде только в фактор  $\bar{F}$ . Тем не менее, от  $\vec{\xi}$  зависит не только  $\bar{F}$ , но и сам радиус  $R$ ; ведь формула (46) выражает

только закон "искажения" радиуса  $R$  при конической проекции, но совершенно очевидно, что  $R$  также зависит от ориентации магнитного поля.

Легко убедиться, что в однородном магнитном поле имеет место

$$\lim_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0 \\ \epsilon_3 \rightarrow 1}} \bar{F}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = F_0 = \frac{\sqrt{l^2 + m^2}}{\xi(l^2 + m^2) + n(\epsilon_0 + m\gamma)},$$

и формула (46) переходит в (28), как и следовало ожидать.

2.1. Зависимость  $\bar{F}$  от  $\vec{\xi}$  довольно сложна и, поэтому, желательно привести ее к более пригодной для численных вычислений форме. Нетрудно доказать, что  $\bar{F}$  можно записать в виде:

$$\bar{F} = \frac{(\vec{v} \times \vec{\xi})}{(\vec{\xi} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{\xi})}; \quad (48)$$

теперь разложим  $\vec{\xi}$  на две составляющие, одна вертикальная ( $\vec{\xi}_z$ ), другая горизонтальная ("радиальная") ( $\vec{\xi}_r$ ):

$$\vec{\xi} = (\epsilon_1 \vec{i} + \epsilon_2 \vec{j}) + \epsilon_3 \vec{k} = \vec{\xi}_r + \vec{\xi}_z \quad (49)$$

Если подобные разложения производим и для векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{\xi}$ ,

$$\vec{v} = (l\vec{i} + m\vec{j}) + n\vec{k} = \vec{v}_r + \vec{v}_z,$$

$$\vec{\xi} = (\alpha\vec{i} + \gamma\vec{j}) + z\vec{k} = \vec{\xi}_r + \vec{\xi}_z,$$

после простых, но довольно длинных преобразований получаем форму

ли:

$$|\vec{v} \times \vec{\xi}|^2 = \xi_z^2 \cdot \cos^2 \alpha \left[ 1 + \left( \frac{\xi_r}{\xi_z} \right)^2 \tan^2 \alpha + \left( \frac{\xi_r}{\xi_z} \right)^2 \sin^2(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\xi_r}{\xi_z} \cos(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r) \tan \alpha \right], \quad (50)$$

$$(51) (\vec{e}_x \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{\xi}) = E_3 \left[ \zeta (\ell^2 + m^2) + n (\ell x + m y) \right] \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{\xi_r}{\xi_z} \frac{-\left(\frac{\xi_r}{v_r}\right)^2 \frac{\xi_r}{\zeta} \cos(\vec{e}_r, \vec{\xi}_r) - \frac{n}{v_r} \cos(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r) \pm \frac{\xi_r}{\zeta} \sin(\vec{e}_r, \vec{v}_r) \sin(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r)}{1 + \frac{n}{v_r} \frac{\xi_r}{\zeta} \cos(\vec{e}_r, \vec{v}_r)} \right],$$

где  $|\cos \alpha| = \sin(\vec{v}, \vec{\xi}_z) = \sqrt{\frac{\ell^2 + m^2}{\zeta}}$ . Что касается двойного знака ( $\pm$ ), здесь следует руководствоваться следующим правилом (см. рис. II), если наложение векторов  $\vec{e}_r$  на  $\vec{v}_r$  и  $\vec{v}_r$  на  $\vec{\xi}_r$  можно осуществить поворотами векторов в одном и том-же направлении, необходимо брать знак (+), если нет - знак (-).

Наконец, если учесть что  $\xi_r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\frac{n}{v_r} = \text{tg } \alpha$  где знак угла  $\alpha$  определяется согласно гл. II, § 1.4, тогда можно написать следующее выражение инвариантное по отношению к выбору осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$F = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\xi_r}{\xi_z}\right)^2 \text{tg}^2 \alpha + \left(\frac{\xi_r}{\xi_z}\right)^2 \sin^2(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r) - 2 \left(\frac{\xi_r}{\xi_z}\right) \text{tg} \alpha \cos(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r)}}{1 + \frac{\xi_r}{\xi_z} \frac{-\text{tg}^2 \alpha \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\zeta} \cos(\vec{e}_r, \vec{\xi}_r) - \text{tg} \alpha \cos(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r) \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\zeta} \sin(\vec{e}_r, \vec{v}_r) \sin(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r)}{1 + \text{tg} \alpha \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\zeta} \cos(\vec{e}_r, \vec{v}_r)}} \quad (52)$$

В то же время аналитическое выражение для  $\mathcal{W}$  имеет вид

$$F = \frac{\mathcal{W}^*}{\mathcal{U}^*},$$

$$\mathcal{W}^* = \sqrt{1 + \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_3^2} \frac{1 - \frac{(\ell E_1 + m E_2)^2}{E_1^2 + E_2^2}}{\ell^2 + m^2} - 2 \frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{E_3} \frac{n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \frac{\ell E_1 + m E_2}{\sqrt{\ell^2 + m^2} \sqrt{E_1^2 + E_2^2}}} \quad (53)$$

$$\gamma_6^* = 1 + \frac{\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \left\{ - \frac{n^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{\ell^2 + m^2} \frac{x\epsilon_1 + y\epsilon_2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} - \frac{n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \left[ \frac{\ell\epsilon_1 + m\epsilon_2}{\sqrt{\ell^2 + m^2} \sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \frac{m\epsilon_1 - \ell\epsilon_2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{\ell^2 + m^2}} \frac{\ell\epsilon_2 - m\epsilon_1}{\sqrt{\ell^2 + m^2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\ell\epsilon_1 + m\epsilon_2}{\sqrt{\ell^2 + m^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}$$

2.2. При практическом применении формулы (46) придется пользоваться одним из выражений (52) или (53); в связи с этим следует однако заметить следующее.

Измерения параметров трека особенно удобно производить в системе координат, в которой  $\ell=0$  ( см. гл. II § 4.5 ); но тогда применение аналитической формулы (53) становится непрактичным, т.к. она предполагает знание составляющих вектора именно в этой системе координат; и т.к. эта система изменяется от трека к треку, задание магнитного поля в виде карты или таблицы значений оказывается недостаточным.

Формула (53) имеет практическое значение лишь тогда, когда распределение магнитного поля задано в аналитическом виде; тогда безразлично в какой системе координат определяются  $(\ell, m, n)$ , ибо всегда можно вычислить в той же системе  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ .

В отличие от (53), формулу (52) можно применить и когда  $\vec{H}$  задан в виде таблицы или карты. Предположим, что в любой точке камеры известно направление вектора  $\vec{\xi}_v$ , а также значения  $|\vec{\xi}_v|$  и  $|\vec{\xi}_2|$ . Тогда с помощью операций на репроекторе можно определить все входящие в (52) величины. Для этого достаточно дополнить описанные в гл. II § 4.6 операции следующими:

3) Поворачиваем экран вокруг вертикальной оси ( см. рис. 8 пока ось  $O^*y^*$  проходит через точку  $(x^*, y^*)$ ; тогда ли-



$$\alpha_3^* = \left( + \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{\epsilon_3} \left\{ - \frac{m^2}{l^2 + m^2} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{x\epsilon_1 + y\epsilon_2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} - \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} \left[ \frac{l\epsilon_1 + m\epsilon_2}{\sqrt{l^2 + m^2} \sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \frac{m\epsilon_1 - l\epsilon_2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{l^2 + m^2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \right] \right\} \right. \\ \left. + \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{l\epsilon_2 + m\epsilon_1}{\sqrt{l^2 + m^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

2.2. При практическом применении формулы (46) придется пользоваться одним из выражений (52) или (53); в связи с этим следует однако заметить следующее.

Измерения параметров трека особенно удобно производить в системе координат, в которой  $l=0$  ( см. гл. II § 4.5 ); но тогда применение аналитической формулы (53) становится непрактичным, т.к. она предполагает знание составляющих вектора именно в этой системе координат; и т.к. эта система изменяется от трека к треку, задание магнитного поля в виде карты или таблицы значений оказывается недостаточным.

Формула (53) имеет практическое значение лишь тогда, когда распределение магнитного поля задано в аналитическом виде; тогда безразлично в какой системе координат определяются  $(\epsilon_1, m, n)$ , ибо всегда можно вычислить в той же системе  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ .

В отличие от (53), формулу (52) можно применить и когда  $\vec{H}$  задан в виде таблицы или карты. Предположим, что в любой точке камеры известно направление вектора  $\vec{\xi}_y$ , а также значения  $|\vec{\xi}_y|$  и  $|\vec{\xi}_z|$ . Тогда с помощью операций на репроекторе можно определить все входящие в (52) величины. Для этого достаточно дополнить описанные в гл. II § 4.6 операции следующими:

3) Поворачиваем экран вокруг вертикальной оси ( см. рис. 2 пока ось  $O^*y^*$  проходит через точку  $(x^*, y^*)$ ; тогда ли-

ния (ав) совпадает с направлением  $\vec{e}_r$  и угол поворота равен углу  $(\vec{e}_r, \vec{v}_r)$  (рис. 12).

и) Поворачиваем дальше экран, пока та-же линия (ав) совпадает с направлением  $\vec{e}_v$ ; тем самым измеряем угол  $(\vec{v}_r, \vec{e}_v)$ .

к) Сравниваем между собой направления поворотов  $\vec{e}_r \rightarrow \vec{v}_r$  и  $\vec{v}_r \rightarrow \vec{e}_v$ ; если они одинаковы, в формуле (52) следует брать знак (+), etc.

Совокупность операций (А-К) исчерпывает все измерения, необходимые для определения радиуса  $R$  с помощью  $\rho_k$ .

2.3. Распространение формулы (4) и (6) на случай неоднородного магнитного поля не представляет трудности.

В общем случае, согласно закону Лоренца имеет место

$$\rho = \text{const.} \cdot H \cdot R \sin(\vec{v}, \vec{E}) = \text{const.} \cdot H \cdot R \cdot |\vec{v} \times \vec{E}|. \quad (54)$$

Учитывая (46) и (51) и обозначая  $H_z = H \cdot \epsilon_3$ , получаем:

$$\rho = \text{const.} \cdot \frac{H_z}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \frac{\zeta^2 \cos^3 \beta}{\left[ \zeta + \frac{m(\ell x + m^2 \alpha)}{\ell^2 + m^2} \right]^2} \rho_k \cdot Z \quad (55)$$

где  $Z$  - знаменатель в формуле (52). Наконец, в системе координат в которой  $\ell = 0$ , получаем:

$$\rho = \text{const.} \cdot H_z \frac{\rho_k}{\cos \alpha} \frac{\zeta^2 \cos^3 \beta}{[\zeta + y \tan \alpha]^2} \left[ 1 + \frac{H_r}{H_z} \frac{\tan^2 \alpha \frac{\ell^2 + m^2}{\zeta} \cos(\vec{e}_r, \vec{e}_v) - \tan \alpha \cos(\vec{v}_r, \vec{e}_v) \pm \frac{\sqrt{\ell^2 + m^2}}{\zeta} \sin(\vec{e}_r, \vec{v}_r) \sin(\vec{v}_r, \vec{e}_v)}{1 + \tan \alpha \frac{\ell^2 + m^2}{\zeta} \cos(\vec{e}_r, \vec{v}_r)} \right] \quad (56)$$

Как видно, импульс вычисляется по той же формуле (4\*, 6\*) с добавлением фактора  $Z$ , зависящего от радиальной составляющей  $H_r$  от взаимного расположения векторов  $\vec{e}_r, \vec{v}_r$  и  $\vec{e}_v$

2.4. Важным для практики является случай радиального распределения составляющей  $\vec{H}_r$  (магнитное поле-цилиндрической симметрии) т.е. случай когда  $(\epsilon_1 \vec{e}_1 + \epsilon_2 \vec{e}_2)$  направлен вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$  точки  $(x, y)$  по отношению к "центру"  $C$  (рис. 13)

Тогда в любой системе координат имеет место

$$\begin{aligned} \vec{E}_r - \vec{r} &= \alpha \\ \vec{E}_r &= \lambda^2 \vec{r} \end{aligned}$$

где  $\lambda$  - реальное число.

Если обозначим  $(x_c, y_c)$  координаты центра  $C$ , тогда легко получить

$$\vec{E}_r = \frac{(x-x_c)\vec{e}_1 + (y-y_c)\vec{e}_2}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}} \cdot |\vec{E}_r|,$$

т.е.

$$\epsilon_1 = |\vec{E}_r| \frac{(x-x_c)}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}}$$

(57)

$$\epsilon_2 = |\vec{E}_r| \frac{(y-y_c)}{\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}}$$

Формулы (57) определяют составляющие вектора  $\vec{E}_r$  как функции координат точки в камере, причем определяют их в любой системе координат. Кроме того тем самым отпадает необходимость измерения на репректоре углов  $(\vec{e}_r, \vec{e}_1)$  и  $(\vec{e}_r, \vec{e}_2)$ , и изложенные в § 2.8 формулы принимают более простой вид. Действительно, если выбранная система координат соответствует случаю  $\lambda = 0$  тогда, согласно (53) получаем:

$$Z = 1 + \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{\epsilon_3} - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \frac{x\epsilon_1 + y\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}}{\left(5 + \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\epsilon_3}\right)} - \frac{n}{m} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} - \frac{x\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}$$

(58)

Далее, вместо формулы (52) получаем

$$Z = 1 - \frac{H_0}{H_2} \frac{1}{(R_1)^2} \left\{ \frac{x(x_0 - x_0)}{\cos^2 \alpha (s + y^2 \tan^2 \alpha)} + (y_0^2 - z_0^2) \tan^2 \alpha \right\},$$

$$R_1 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2}. \quad (59)$$

Здесь уместно напомнить следующее: формула (59) написана в системе координат с началом (0) на оси объектива, в то время как измерения на репроекторе желательно производить в системе  $(O^*x^*y^*z^*)$  с началом в начале трека (рис. 14). Если обозначить  $(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$  координаты центра C в системе  $O^*x^*y^*z^*$ , легко найти, что:

$$\begin{aligned} x_0 - x_0 &= x_0^*, \\ y_0 - y_0 &= y_0^*, \end{aligned}$$

после чего (59) становится

$$p = \text{const.} \cdot H_2 \cdot \frac{S_K}{\cos \alpha} \frac{S^2 \cos^3 \beta}{[s - y^2 \tan^2 \alpha]^2} \left\{ 1 - \frac{H_0}{H_2} \frac{1}{\sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2}}} \left[ \frac{x^* x_0^*}{\cos^2 \alpha [s - y^* \tan^2 \alpha]} + y_0^* \tan^2 \alpha \right] \right\},$$

где  $\cos^3 \beta = \left[ 1 + \frac{x^{*2}}{(s - y^* \tan^2 \alpha)^2} \tan^2 \alpha \right]^{-3/2}. \quad (60)$

2.6. Подводя итог, решение задачи определения импульса  $p$  с учетом конической проекции и неоднородности магнитного поля <sup>x)</sup> можно сформулировать следующим образом:

Пусть известно - в виде таблицы - распределение значений вертикальной составляющей магнитного поля ( $H_z$ ) и распределение значений  $n = \frac{H_0}{H_2}$  как функции координат  $(X, Y, Z)$  точек в камере;

Импульс  $p$  вычисляется по формуле (60), где величина входящая в правую часть, определяется из таблиц или измеряется

<sup>x)</sup> см. сноску на стр. 35.

на репроекторе; при этом, список и описание операций, приведенные в гл. II § 1.6. следует дополнить следующими пунктами:

з) В системе координат  $O^*x^*y^*$  (см. пункт А, стр. 21), измеряем координаты  $(x^*, y^*)$  "центра" (С) магнитного поля;

и) Вращаем экран вокруг вертикальной оси, пока линии (ab) и (cd) становятся параллельными осями  $Ox$  и  $Oy$  системы

$OXYZ$ , к которой относятся таблицы распределения магнитного поля, и измеряем координаты  $\bar{x}, \bar{y}$  начала (O) системы  $OXYZ$ .

Значения  $\left\{ \begin{array}{l} x = -\bar{x} \\ y = -\bar{y} \\ z \end{array} \right\}$  <sup>xx)</sup> дают координаты точки, в которой следует определить с помощью таблиц значения  $H_z$ .

#### Глава IV.

§ 1. В настоящем параграфе мы ставим перед собой задачу оценить насколько существенен учет конической проекции и неоднородности магнитного поля при вычислении импульса. Другими словами, вопрос состоит в следующем: насколько сильно отличается импульс вычисленный по формуле (6) - в предположении что  $\varphi_1 \approx \varphi_2$ , от импульса вычисленного по формуле (6<sup>\*</sup>) или по формуле (60)

Ответ на этот вопрос в общем виде, является трудной задачей, т.к. для этого было бы необходимо решить задачу с девятью параметрами; координаты трека  $(x, y, z)$ , ориентация трека  $(\varphi, \theta)$ , ориентация магнитного поля  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  и значения составляющих магнитного поля  $(H_1, H_2)$ . Однако, следует заметить, что "общий ответ" не представляет особенного интереса (хотя бы из-за того, что его можно предвидеть из самого вида уравнения (28): пренебрежение исследованными эффектами может привести как к занижению, так и к завышению значения  $H$ ,

\*\*\*) см. сноску на стр. 35

причем отношение (  $F_{\text{измеренный}} / F_{\text{истинный}}$  ) может иметь , в принципе, любое значение от нуля до бесконечности. Кстати заметим, что эти "крайние случаи" реализуются не только в сингулярных точках, аналогично случаю  $\zeta \rightarrow z$  и т.п. , но так же и когда соприкасающаяся ся плоскость ( см. стр. 3, спуска ) содержит (ЦИ).

В реальных условиях "искажения" бывает далеко не так сильны, т.к. фотографирование следов производится все же в геометрических условиях не очень далеких от "классических" : фотографирование со сравнительно большого расстояния, магнитное поле приблизительно однородно и т.д.

Как оценить эти "искажения"?

Из формулы (56) видно, что следует учесть влияние двух множителей: один, (  $F_k$  ), ( см. формулу 33) зависящий только от свойств конической проекции, другой, (  $z$  ), ( см. формулу (55) ), зависящий как от этих свойств, так и от неоднородности магнитного поля.

Если заменить (31) в (33), получаем следующее выражение для  $F_k$  :

$$F_k = \frac{\left[ 1 - \frac{z^*}{\zeta} \operatorname{tg} \alpha \right]}{\left\{ \left[ 1 - \frac{z^*}{\zeta} \operatorname{tg} \alpha \right]^2 + \frac{\alpha^{*2}}{\zeta^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right\}^{3/2}}, \quad (61)$$

откуда видно, что  $F_k \rightarrow 0$  когда  $\left\{ \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \frac{\zeta}{z^*}, \alpha^* = 0 \right\}$ .

Оценим вклад этого множителя в камере средних размеров, (  $50 \times 100$  ) см<sup>2</sup>. Здесь уместно вспомнить, что оператор может ис-

- 
- x) В случае радиального распределения составляющей  $H_r$  .
  - xx) Координата  $z$  вычисляется с помощью значения  $\zeta$  .

пользовать для измерения  $\rho_k$  любой из двух кадров стереопары; как правило, рекомендуется выбирать тот кадр, для которого коррекции будут минимальными, т.е. тот кадр, на котором изображение трека находится ближе к оптической оси "активного" объектива. В этих условиях ясно, что  $|y^*| \lesssim 50$  см и  $|x^*| \lesssim 50$  см. Если предположим, что  $\zeta = 100$  см, находим, что  $F_k \rightarrow 0$  когда  $\alpha \approx \pm 65^\circ$ , однако, при таких больших значениях угла  $\alpha$ , измерения редко бывают надежными. Из опыта известно, что максимально допустимо значение угла  $\alpha$  порядка  $\pm 45^\circ$ , что дает  $0,5 \lesssim [1 - \frac{y^*}{\zeta} \operatorname{tg} \alpha] \lesssim 1,5$  и  $0 \lesssim \frac{x^{*2}}{\zeta^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \lesssim 0,25$ . Таким образом получаем следующие частные результаты:

$$\left. \begin{array}{l} x^* = 0 \\ |y^*| = 45 \end{array} \right\} 0,45 \lesssim F_k \lesssim 1, \quad (a)$$

$$\left. \begin{array}{l} y^* = 0 \\ |x^*| = 45 \end{array} \right\} 0,7 \lesssim F_k \lesssim 1, \quad (b)$$

и дальше, как и следовало ожидать,  $F_k \rightarrow 1$  когда  $\alpha \rightarrow 0$ .

Вклад второго множителя,  $(Z)$ , более сложно оценить т.к. необходимо учесть взаимное расположение векторов  $\vec{v}_r, \vec{e}_r, \vec{\xi}_r$ . Предположим, что поле обладает цилиндрической симметрией и, для начала, займемся треками, для которых  $\alpha = 0$ . В этих условиях из (56) получаем

$$Z = 1 \pm \frac{H_r}{H_2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\zeta} \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad (62)$$

где  $\beta_1 = \angle(\vec{e}_r, \vec{v}_r)$  и  $\beta_2 = \angle(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r)$ .

При фиксированных значениях  $(\alpha, y)$ , переменным в (62) является

$\varphi = \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2$ . Если обозначить  $\omega$  - угол  $(\vec{E}_Y, \vec{E}_V)$  из рис. 15, видно, что следует различить 4 случая (если ограничимся углами меньше  $180^\circ$ ):

1.  $\beta_1 - \beta_2 = \omega$
2.  $\beta_1 + \beta_2 = \omega$
3.  $\beta_2 - \beta_1 = \omega$
4.  $\beta_1 + \beta_2 = 2\pi - \omega$  (когда  $\beta_1 > \pi - \omega$ ).

Соответственно случаям 1-4, получаем 4 разные выражения функции  $\varphi$ :

1.  $\varphi(\beta_1, \beta_2) = \sin \beta_1 \sin(\beta_2 - \omega)$ ,
2.  $\varphi(\beta_1, \beta_2) = \sin \beta_1 \sin(\omega - \beta_1)$ ,
3.  $\varphi(\beta_1, \beta_2) = \sin \beta_1 \sin(\beta_1 + \omega)$ ,
4.  $\varphi(\beta_1, \beta_2) = -\sin \beta_1 \sin(\beta_1 + \omega)$ .

Исследуя поведение функции  $\varphi$  при разных значениях  $\beta_1$ , нетрудно доказать, что  $Z$  достигает "экстремальных" значений, при следующих значениях переменных  $\beta_1$  и  $\beta_2$ :

$$1. \beta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2},$$

$$Z_{(1)} = 1 \pm \frac{H_1}{H_2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S} \cos^2 \frac{\omega}{2};$$

$$2. \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\omega}{2},$$

$$Z_{(2)} = 1 \pm \frac{H_1}{H_2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S} \sin^2 \frac{\omega}{2};$$

$$3. \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2},$$

$$Z_{(3)} = 1 \pm \frac{H_1}{H_2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S} \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$



$$4. \quad \beta_1 = \pi - \frac{\omega}{2}; \quad \beta_2 = \pi + \frac{\omega}{2},$$

$$Z(\gamma) = 1 \pm \frac{H_r}{H_z} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Итак, в зависимости от ориентации трека, ( $\vec{e}_r$ ), значение множителя ( $Z$ ) осциллирует между 1 и двумя экстремальными значениями:  $M_1 = 1 \pm \frac{H_r}{H_z} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S} \cos^2 \frac{\omega}{2}$  и  $M_2 = 1 \pm \frac{H_r}{H_z} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S} \sin^2 \frac{\omega}{2}$ .

По мере того как точка ( $\alpha, \gamma$ ) удаляется от начала координат ( $0, 0$ ), угол  $\omega$  стремится к нулю и  $M_1$  стремится к  $M_{1(\min)} = 1 \pm \frac{H_r}{H_z} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{S}$ ; что касается второго "минимального" значения ( $M_2$ ) оно стремится к 1. Отсюда следует, что множитель  $Z$  осциллирует между 1 и  $M_{1(\min)}$ , причем значение  $M_{1(\min)}$  достигается для треков перпендикулярных направлению  $\vec{\xi}_r$  (см. случай I и III).

В условиях приведенного выше численного примера, если ограничимся точками  $\alpha = 0$ , минимальное значение  $\omega$  равно  $\sim 20^\circ$  что приводит к

$$Z_{(\min)} \sim \left( 1 \pm 0,45 \frac{H_r}{H_z} \right). \quad (c)$$

Если  $\alpha \neq 0$ , оценить  $Z$  становится еще труднее, но ясно что коррекция тем значительнее; чем дальше трек от оси объекта. Грубую оценку можно получить следующим образом. На большом расстоянии от начала координат,  $\vec{e}_r$  приблизительно параллелен  $\vec{\xi}_r$ , и для треков  $\vec{v}_r \perp \vec{\xi}_r$  это приводит к

$$\cos(\vec{e}_r, \vec{\xi}_r) = 1; \quad \cos(\vec{e}_r, \vec{v}_r) = 0; \quad \cos(\vec{v}_r, \vec{\xi}_r) = 1$$

с помощью (52) получаем (для  $\alpha \approx 45^\circ$ ). Тогда

$$Z \sim \left( 1 \pm 2,045 \frac{H_r}{H_z} \right), \quad (d)$$

т.е. коррекция становится в  $\sim 2$  раза значительнее.

Наконец, комбинируем формулы (а) и (д), получаем:

$$0,45 \leq F_k \cdot Z \leq 4 \left( 1 \pm 0,9 \frac{H_r}{H_2} \right) \quad (64)$$

Приведенные оценки показывают, что коррекции могут достигнуть значительных значений даже в камерах не очень больших размеров. Правда, приведенные выше конкретные случаи представляют собой "редкие события", (круто наклонные треки, у краях камеры), однако, как показывает опыт, большинство треков, (80%) регистрируемых в упомянутой камере<sup>x)</sup> приводят все же к значениям  $0,75 \leq F_k \cdot Z \leq 1,25$ , что указывает на необходимость учета этих коррекций.

§ 2. Полученные в данном отчете формулы  $S_k = f(R)$  и соответствующие им формулы перехода  $S_k \rightarrow P$  следует считать математически-удовлетворительными, в пределах того приближения, о котором говорилось на стр. 17-18. Некоторое улучшение этого приближения достигается, если в расчетах вводятся не значения  $H_r, H_2$  в начале трека, а некоторые "средние" значения вдоль трека. В качестве таковых можно использовать например, значения  $\tilde{H}_r, \tilde{H}_2$  в точке на расстоянии  $l/2$  вдоль касательной в начале трека - где  $l$  - длина трека использованного при измерении  $S_k$  следуя Баркеру (2), можно также использовать значения

$$\tilde{H}_r = \frac{H_r(k) + H_r(k)}{2}$$

$$\tilde{H}_2 = \frac{H_2(k+1) + H_2(k)}{2}$$

x) Речь идет об измеренных треках при исследовании  $V^0$ -событий от  $K_2^0$ -распада.

т.е. среднее арифметическое значений  $H_1$  и  $H_2$  в начале и в конце трека; однако, при этом необходимо измерить на репроекторе и координаты конца трека, что приводит к некоторому удлинению времени обработки.

Прямая экспериментальная проверка "эффективности" указанного метода введения поправок представляет собой довольно трудоемкую задачу, если основывать ее на измерениях "калиброванных" треков. Нам привелась лишь косвенная, но довольно показательная проверка. Руководящая идея-следующая: для одного и того же трека, на репроекторе можно измерить не только радиус кривизны конической проекции ( $R_k$ ), но и радиус кривизны траектории в пространстве ( $R$ ). С другой стороны формулы (28) или (46) позволяют также вычислить на основе  $R_k$  радиус в пространстве ( $R_{\text{внз}}$ ), так как он получается с использованием указанного способа введения поправок. Если теперь считать измерения  $R_k$  и  $R$  независимыми и равноценными, сравнение значений  $R_{\text{внз}}$  и  $R$  может служить критерием оценки интересующей нас эффективности.

Из экспериментального материала мы выделили, безотносительно к каким-либо "признакам" группу из 768 треков. Для каждого из них, на репроекторе были измерены  $R_k, R, \alpha$  и затем вычислялись  $R_{\text{внз}}$  и параметр  $\mu = R_k / \cos^2 \alpha$ . Из непосредственных измерений или с помощью вычислений известны ошибки определения всех этих величин. В качестве параметров характеризующих эффективность введения поправок мы выбрали

$$\eta = (R / R_{\text{внз}}) \quad \text{и} \quad \mu = (R_k / R \cos^2 \alpha).$$

Предположим сначала, что все измерения предельно точны и что поправки правильно вводились; тогда очевидно, для всех треков мы должны получить  $\eta = 1$ . В реальных условиях  $\eta$  имеет

---

х) т.е. треков с известными радиусами кривизны.

определенный разброс, который можно объяснить двумя причинами: неточность измерений и неправильность введения поправок. Первая причина несет явно случайный характер, и, если поправки корректно вводились, параметр  $\eta$  должен иметь гауссовское распределение. Второй параметр ( $\mu$ ) равен единице, когда измерения предельно точны и поправки пренебрежимо малы  $x$ .

Относительно величины поправки ( $F_{k.z}$ ) и относительно "направления" ее действия (т.е. относительно знака разности ( $\rho_k - R_{\text{выч}}$ )) из предыдущего изложения следует, что они несут "случайный" характер; в дальнейшем мы предположим и для них гауссовское распределение.

Чтобы оценить эффективность введения поправок, необходимо разобрать два вопроса.

а) Если поправки вводятся правильно, тогда в пределах статистической точности, следует ожидать, что значение  $R_{\text{выч}}$  ближе к  $R$ , чем значение  $\rho_k$ , другими словами, если  $R > \rho_k$  следует ожидать что  $R_{\text{выч}} > \rho_k$  и если  $R < \rho_k$ , тогда  $R_{\text{выч}} < \rho_k$ . Направление введенной поправки можно оценить лучше всего на основе тех треков, для которых известно с большой достоверностью, каково должно быть это направление. Такими являются треки удовлетворяющие  $|\rho_k - R| > \Delta \rho_k + \Delta R$ , где  $\Delta \rho_k$  и  $\Delta R$  - ошибки измерения  $\rho_k$  и  $R$ . Из исходной совокупности, удовлетворяющих этому условию оказались 298 треков, а среди них только для 34 треков (т.е. в  $\sim 11\%$  случаев) поправка еще больше "удалала"  $\rho_k$  от  $R$ . Тщательное рассмотрение этих

---

х) т.е. в "идеальном" случае когда траектория является винтовой линией и изображение - ортогональной проекцией, (см. стр. 3)

34 треков показало, они ничем не выделяются из совокупности 298 треков<sup>х)</sup>; это указывает на то, что несогласованность поправки с ожидаемым направлением появлялась случайно в совокупности треков и она обусловлена, повидимому, неправильным определением знака разности  $(R_k - R)$ . Это утверждение подтверждается тем, что отбор треков с помощью неравенства  $|R_k - R| > \Delta R_k + \Delta R$  может быть ошибочным в  $\sim 7\%$  из случаев.

б) Если поправки правильны не только по направлению, но и по величине, тогда, в среднем должно иметь место  $R_{\text{выч}} \approx R$ . Но с другой стороны из того что величина поправки,  $(F_k \cdot Z)$  принимает "случайные" значения следует, что среднее значение параметра  $\mu$  также близка к единице, так что прямое сравнение средних величин  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\mu}$  еще не показательное. Но если поправки вводятся правильно, следует ожидать, что разброс значений  $\eta$  вокруг  $\bar{\eta}$  должен быть меньше, чем разброс  $\mu$  вокруг  $\bar{\mu}$ . На рис. 17 представлены две гистограммы, из них видно, что  $\bar{\eta} \approx \bar{\mu} \approx 1$ , но распределение  $\eta$  действительно уже ( $\sigma_\eta \approx 0,18$ ,  $\sigma_\mu \approx 0,44$ ).

Представляет интерес подробнее исследовать, какие именно треки приводят к образованию "хвоста" в распределении (рис. 17), и насколько эффективно вводятся поправки в случае треков, для которых заведомо можно ожидать большие отклонения конической проекции от ортогональной.

Известно, что поправки вообще возрастают вместе со значением  $|\alpha|$ , причем значения  $|\alpha| \sim 30^\circ$  следует считать "большими".

---

х) Речь идет о выделениях по таким признакам, как длина проекции, длина трека, распределение в об'еме камеры, угол  $\alpha$ .

ними". Из совокупности 298 треков, только 120 имели  $|a| > 30^\circ$ .

Из рис. 18 видно, что, хотя "об"ем" статистики уменьшился больше чем в два раза; "хвост" ( $\mu > 1,5$ ) остался почти неизменным (30 треков вместо 34). Это показывает, что, как и следовало ожидать, большие отклонения  $\mu$  от  $\bar{\mu}$  обусловлены в основном большими значениями угла  $\alpha$ . Примечательно однако, что поправки работают весьма эффективно и для этих "плохих" треков: разброс  $\eta$  составляет всего  $\sigma_\eta \approx 0,22$  - что сравнимо с полученным ранее значением  $\sigma_\eta = 0,18$ . И если учесть, что в данном случае разброс  $\mu$  весьма большой ( $\sigma_\mu \approx 1,8$ ), отсюда следует, что поправки вводятся вполне удовлетворительно как при маленьких, так и при больших значениях  $|a|$ .

Как уже было сказано, можно предполагать, что разброс в значениях  $\eta$  обусловлен в основном ошибками измерения. В связи с этим ясно, что настоящее изложение является не только критическим исследованием метода введения поправок, но и дискуссионной относительно ошибок измерения при обработке маркера в наших условиях методом ретроектирования.

Очевидно, ошибки измерения зависят от "признаков" трека ( см. сноска на стр. 42 ); среди них, самыми показательными являются стрела прогиба ( $S$ ) и угол ( $\alpha$ ).

Из таблицы I видно, что  $\bar{\eta}$  близок к единице для всех (любых) значений  $S$ , но  $\sigma_\eta$  существенно уменьшается, если  $S \geq 0,4$  мм. Однако при этом об"ем" статистики уменьшается почти в 2 раза!

В таблице II треки разделены на две категории согласно значениям  $\eta$ , причем, "хорошими" считаются те, которых  $0,90 \leq \eta \leq 1,1$ . Таблица показывает, что для  $\alpha \geq 60^\circ$  сильно падает доля треков, для которых измерения  $R$  и вычисления

$R_{\text{вкл}}$  хорошо согласуются между собой.

Обе таблицы показывают, что в наших условиях, несмотря на довольно большое значение базиса фотосанарата ( $\approx 30\text{см}$ ), измерения на репресктере имеют значительный разброс и что снизить этот разброс можно лишь ценой исключения из рассмотрения большой доли экспериментального материала ( $S < 0,4 \text{ мк}$ ,  $|\alpha| > 45^\circ$ ) или улучшением метода измерения.

Что касается самого разброса  $\Delta R_k / R_k$ , его можно оценить исходя из  $\sigma_\eta \approx 0,18$  и  $\bar{\eta} \approx 1$ . Действительно, если предположим, что  $\sigma_{R_{\text{вкл}}} \approx \sigma_R$  и что  $R_{\text{вкл}}$  и  $R$  "измеряются" независимо друг от друга, легко получить соотношения:

$$\sigma_\eta \approx \sqrt{2} \frac{\Delta R}{R}$$

$$\frac{\Delta R_{\text{вкл}}}{R_{\text{вкл}}} \approx \frac{\Delta R}{R} \approx \frac{0,18}{\sqrt{2}} \approx 13\%$$

Несколько десятков численных примеров показали, что вклад в разбросе  $\Delta R_{\text{вкл}} / R_{\text{вкл}}$  от неточности измерения углов - порядка (3-5%), так что для  $\Delta R_k / R_k$  получаем величину  $\sim 0,10$ .

\*  
\* \*

До настоящего времени, изложенный метод определения импульса применялся при обработке  $\sim 3000$   $V^\circ$ -событий от распада  $K^0_2$ -мезонов. Интересно заметить, что операции связанные с введением поправок ( измерения координат  $x^*, y^*, z^*, \eta^*$  ) лишь незначительно удлиняют время обработки трека на репресктере ( $\sim 30\%$ ). Более подробно, практическая сторона вопроса изложена в отчете(3).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.Т.Василенко и др. Материалы совещания по камерам Вильсона, диффузионным и пузырьковым камерам, Выпуск У, Дубна 1959 .
2. К.Н.Васильев, Вестник, 11, Вып. 2, 309-310, 1954.
3. Р.В.Малышев, Д.Нягу: Методика обработки  $V^0$ -событий на электронно-вычислительной машине (ЭВМ), Дубна 1963 .

*(Handwritten signature)*



## Д о к а з а н и е

Векторное уравнение хорды АВ имеет вид:

$$(\overline{AB}) \quad \vec{\xi} = \vec{r}(0) + \mu [\vec{r}(2s) - \vec{r}(0)], \quad (11)$$

где  $0 \leq \mu \leq 1$  - параметр,  $[\vec{r}(2s) - \vec{r}(0)]$  - вектор параллельный хорде, а  $\vec{\xi}$  - радиус-вектор точки на отрезке  $\overline{AB}$ .

Учитывая формулы (9) и (12), получаем:

$$\begin{aligned} [\vec{r}(2s) - \vec{r}(0)] \cdot \vec{n}(s) &= [\vec{r}(2s) - \vec{r}(0)] \cdot \vec{n}(s) = \\ &= a \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) + a \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) - \\ &- a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \cos \varphi - a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) \sin \varphi \equiv 0, \end{aligned}$$

что доказывает, что хорда  $\overline{AB}$  перпендикулярна главной нормали в середине хорды.

Векторное уравнение прямой ( $\Delta$ ) содержащей главную нормаль  $\vec{n}(s)$  имеет вид:

$$(\Delta) \quad \vec{\xi} = \vec{r}(s) + \nu \cdot \vec{n}(s) \quad (13)$$

где  $\nu$  - параметр прямой.

Если хорда  $\overline{AB}$  пересекает прямую ( $\Delta$ ), тогда существуют значения  $\mu_0, \nu_0$  для которых имеет место:

$$\vec{\xi}(\mu_0) = \vec{\xi}(\nu_0). \quad (14)$$

Векторное уравнение (14) можно заменить системой трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} a(1-\mu) \cos \varphi + a \mu \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) &= (a-\nu) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right), \\ a(1-\mu) \sin \varphi + a \mu \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right) &= (a-\nu) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} + \varphi\right), \\ \mu \lambda \frac{2s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} &= \lambda \frac{s}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем корни:

$$\mu_0 = \frac{1}{2}$$

$$v_0 = a \left[ 1 - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right],$$

Т.е. пересечение имеет место и точка пересечения совпадает с серединой хорды. Этим доказано утверждение о том, что стрела прогиба винтовой линии параллельна плоскости ( $xOy$ ), и получена попутно длина стрелы прогиба:

$$S = \left| \vec{\xi}(v=v_0) - \vec{\xi}(v=0) \right| = a \left[ 1 - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right]. \quad (2)$$

Проверим теперь формулу (8) в применении к винтовой линии.

Длина хорды  $L$  вычисляется по формуле:

$$L^2 = \left| \vec{\xi}(\mu=1) - \vec{\xi}(\mu=0) \right|^2 = \left| \vec{r}(2\lambda) - \vec{r}(0) \right|^2 = 2a^2 \left[ 1 - \cos \frac{2\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right] + \lambda^2 \frac{4\lambda^2}{(\sqrt{a^2 + \lambda^2})^2};$$

Учитывая (2), получаем:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{L^2}{8S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2a^2 \left[ 1 - \cos \frac{2\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right] + \lambda^2 \frac{4\lambda^2}{(\sqrt{a^2 + \lambda^2})^2}}{8a \left[ 1 - \cos \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \right]}; \quad (9)$$

Однако, при  $\lambda \rightarrow 0$ , получаем  $\cos \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{a^2 + \lambda^2}$ ,

$$\cos \frac{2\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \approx 1 - \frac{4\lambda^2}{a^2 + \lambda^2} \quad \text{что дает}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{L^2}{8S} = \frac{a^2 + \lambda^2}{a}$$

Т.е. получаем снова, уже известное по формуле (3) значение  $R$ .

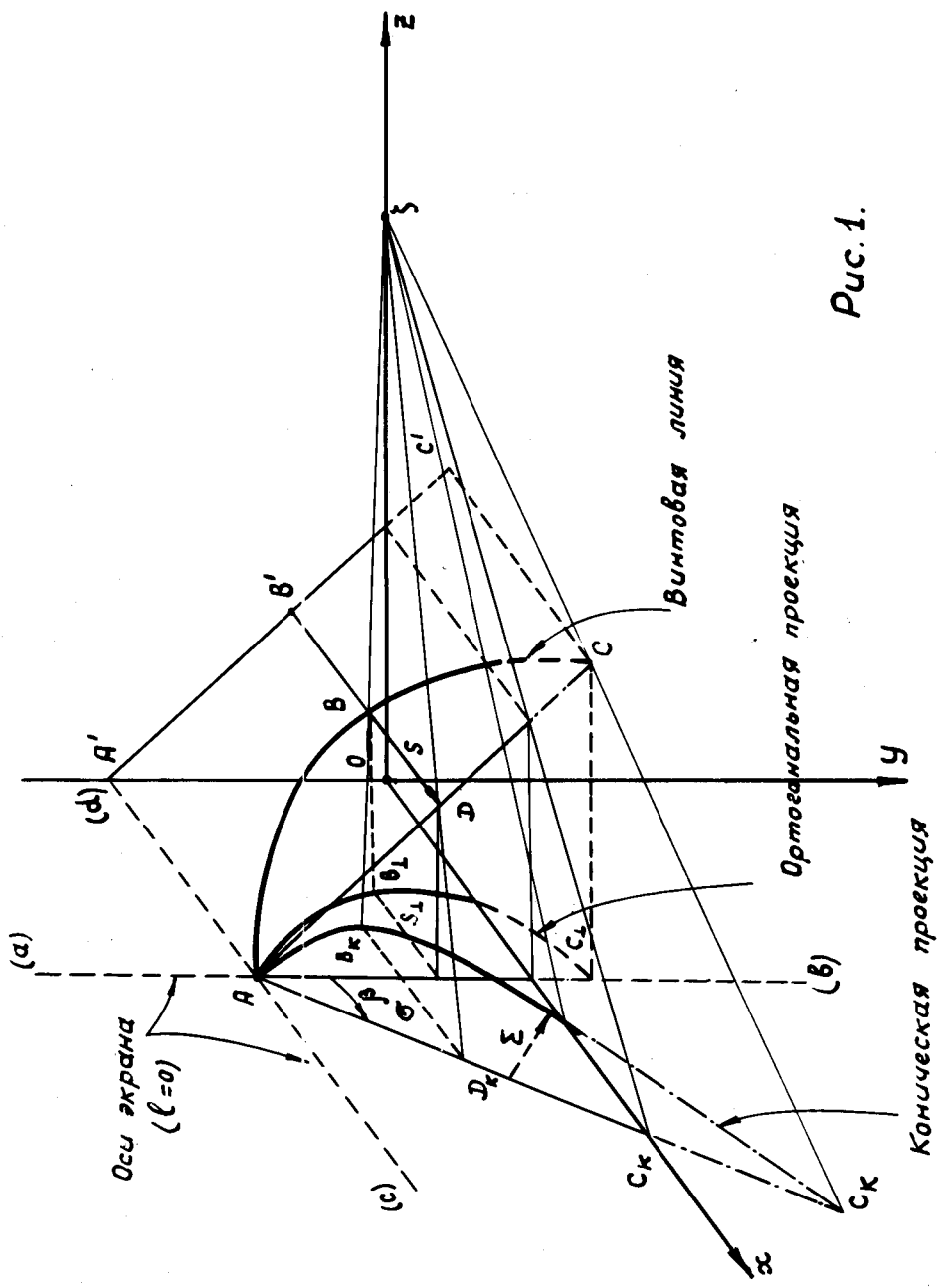
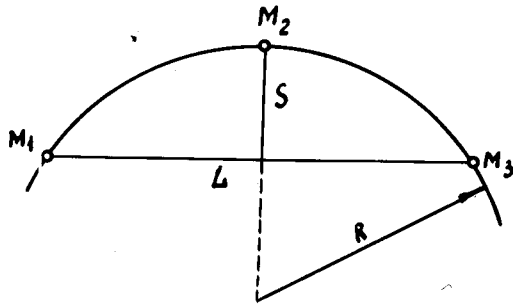
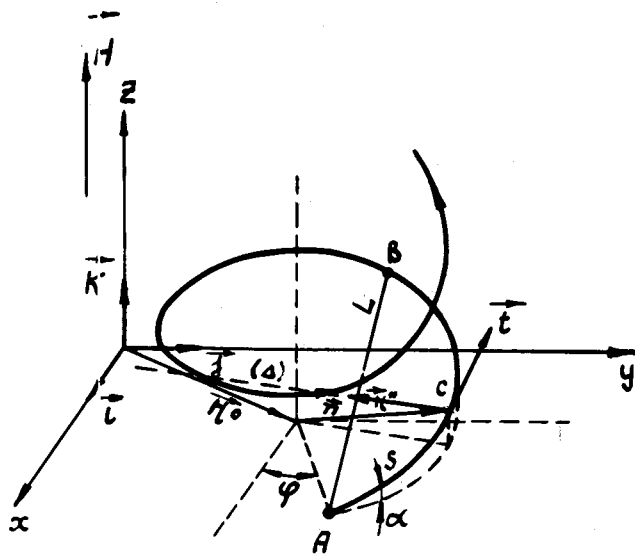


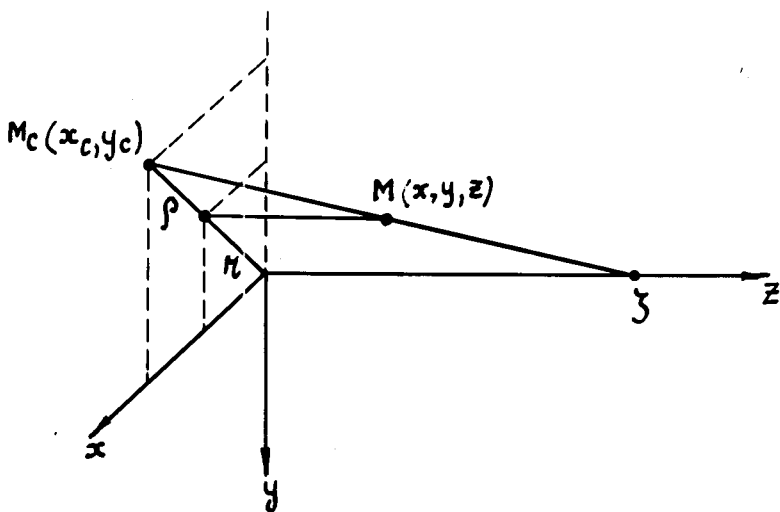
Рис. 1.



Puc. 2.

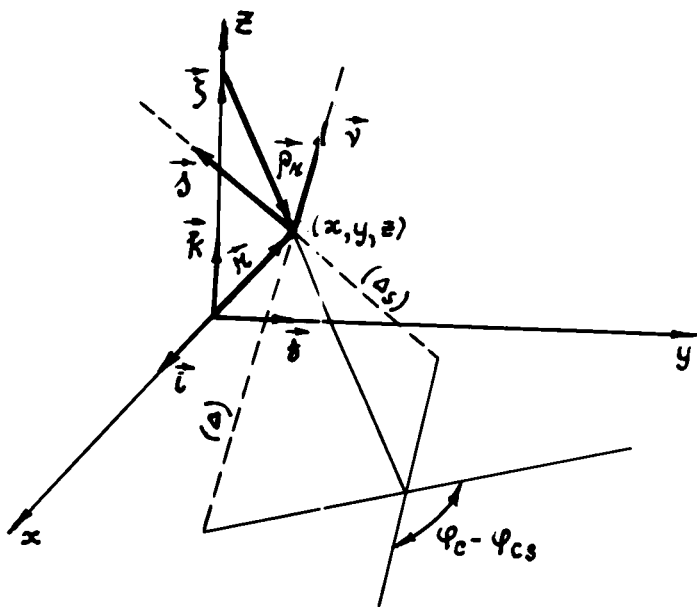
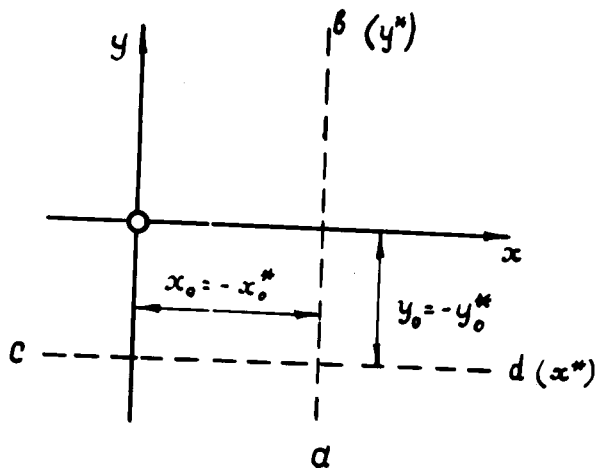
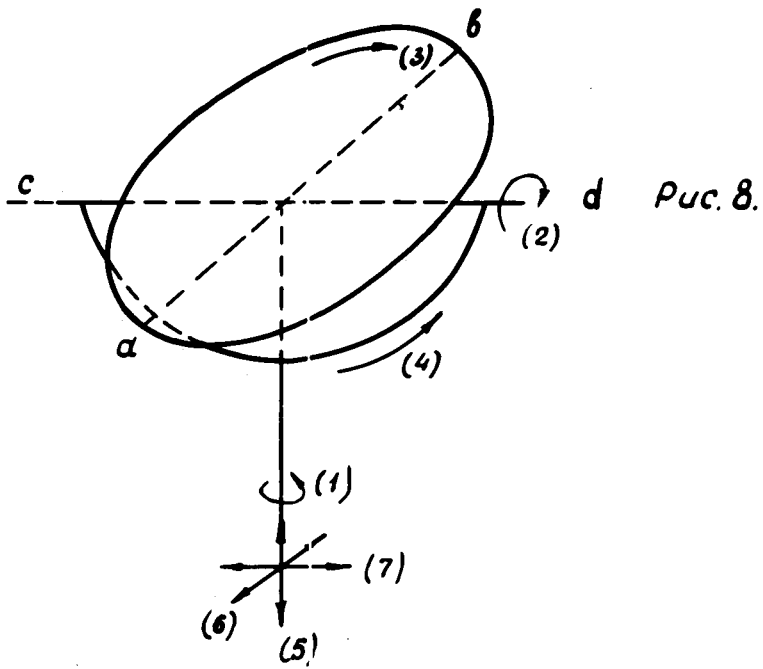


Puc. 3.



Puc. 4.





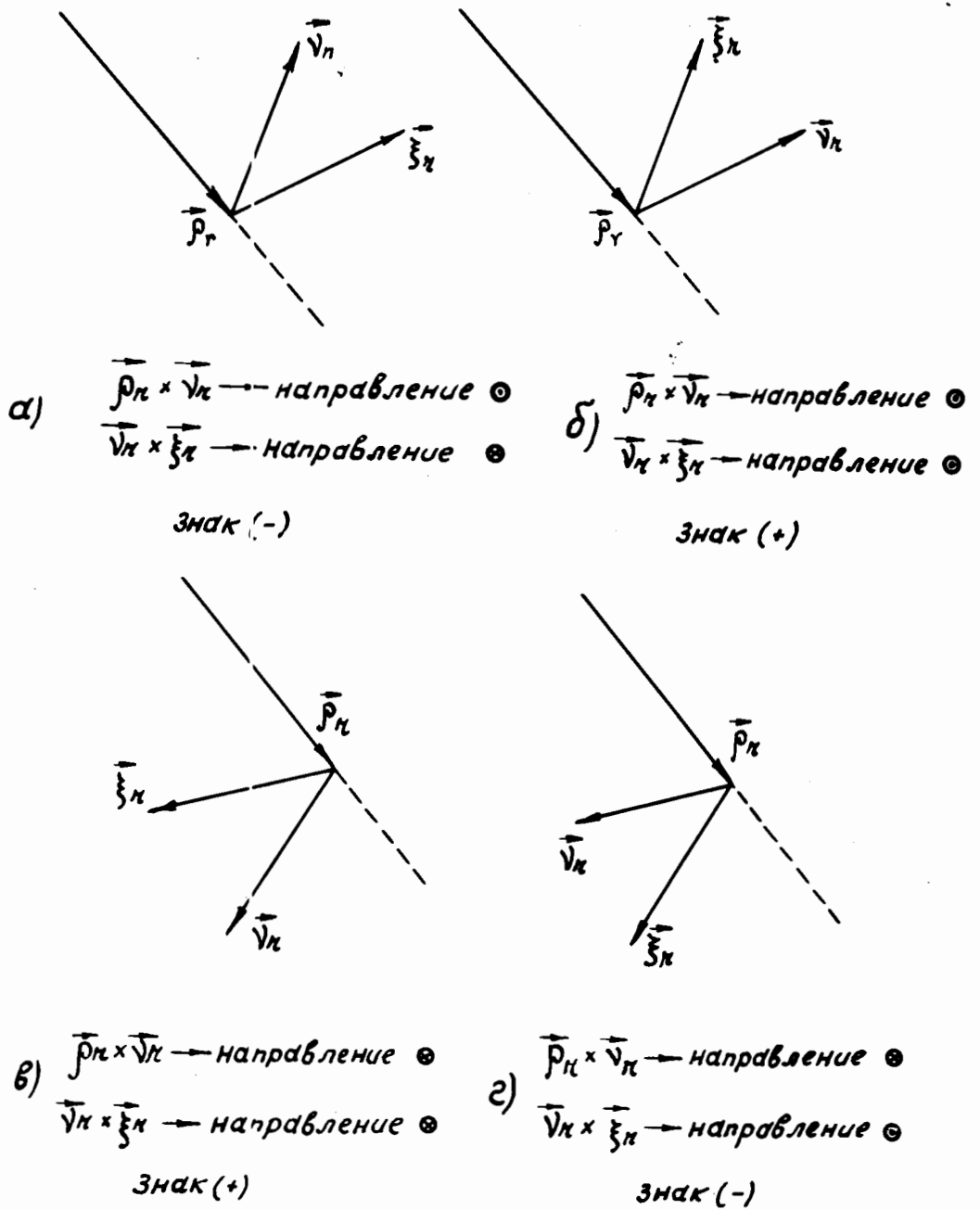


Рис.11.

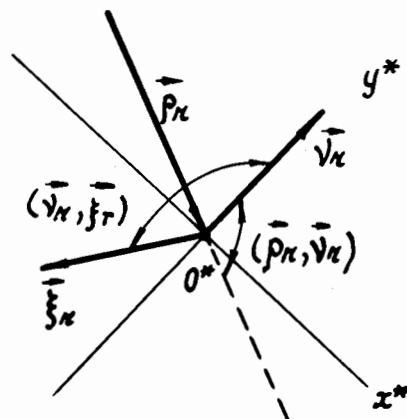


Рис.12.

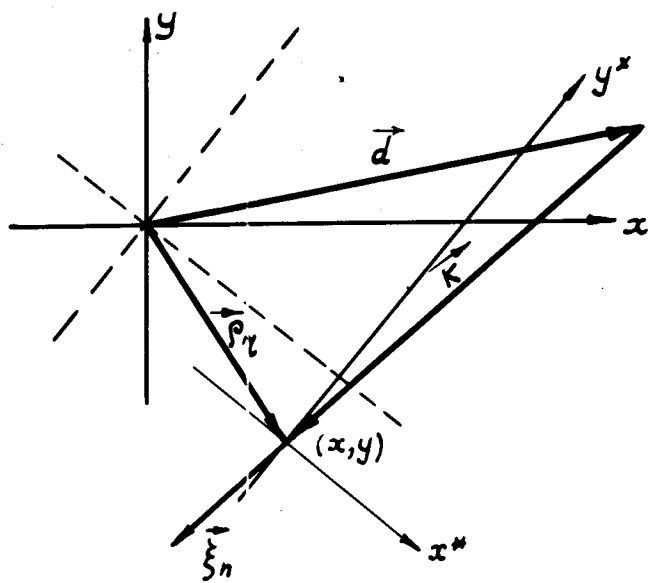


Рис. 13.

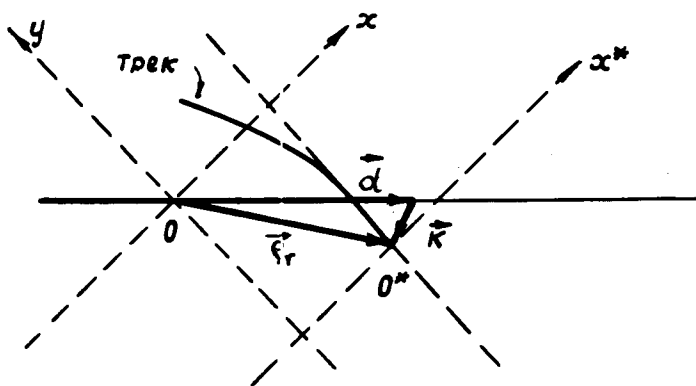


Рис. 14.

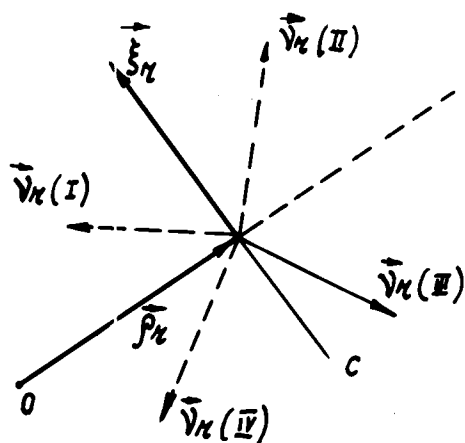


Рис. 15.



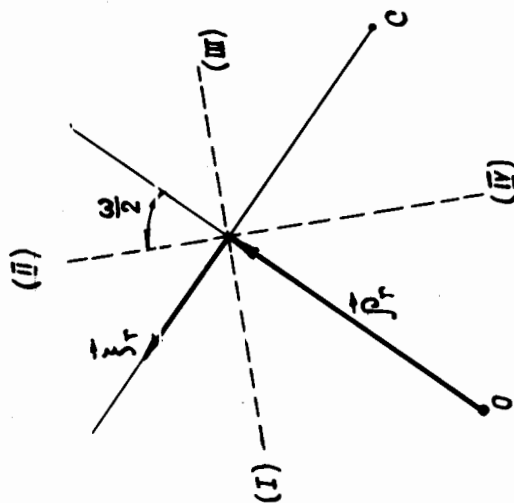
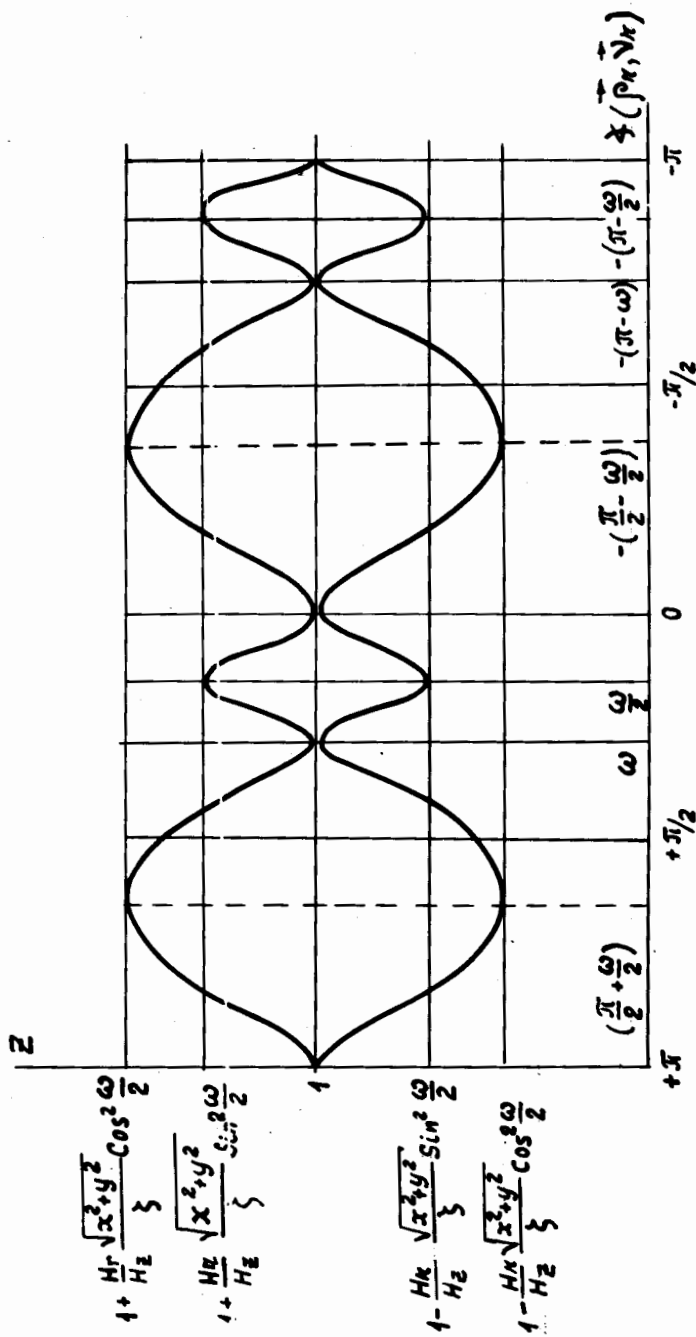


Рис. 16.

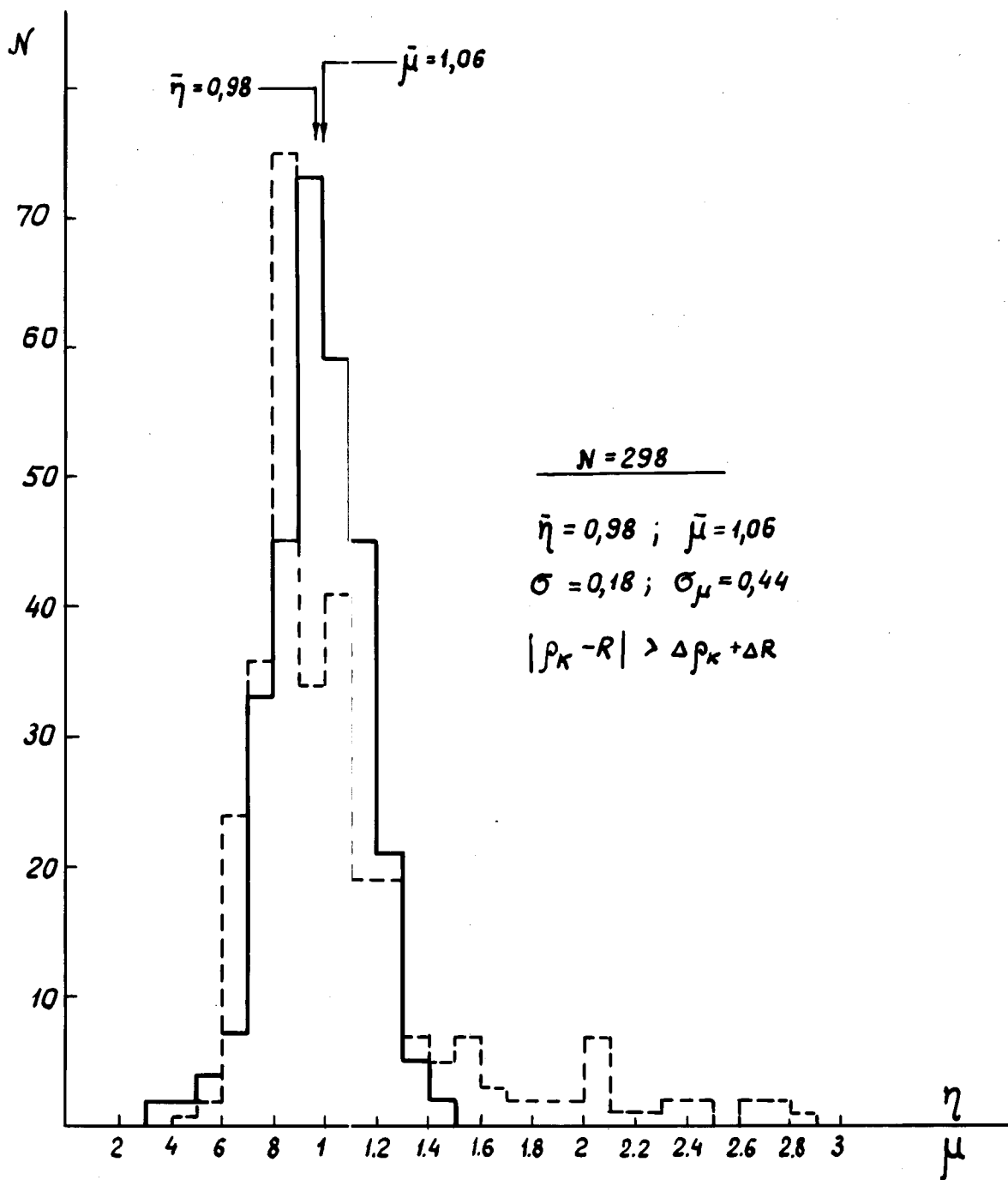


Рис. 17.

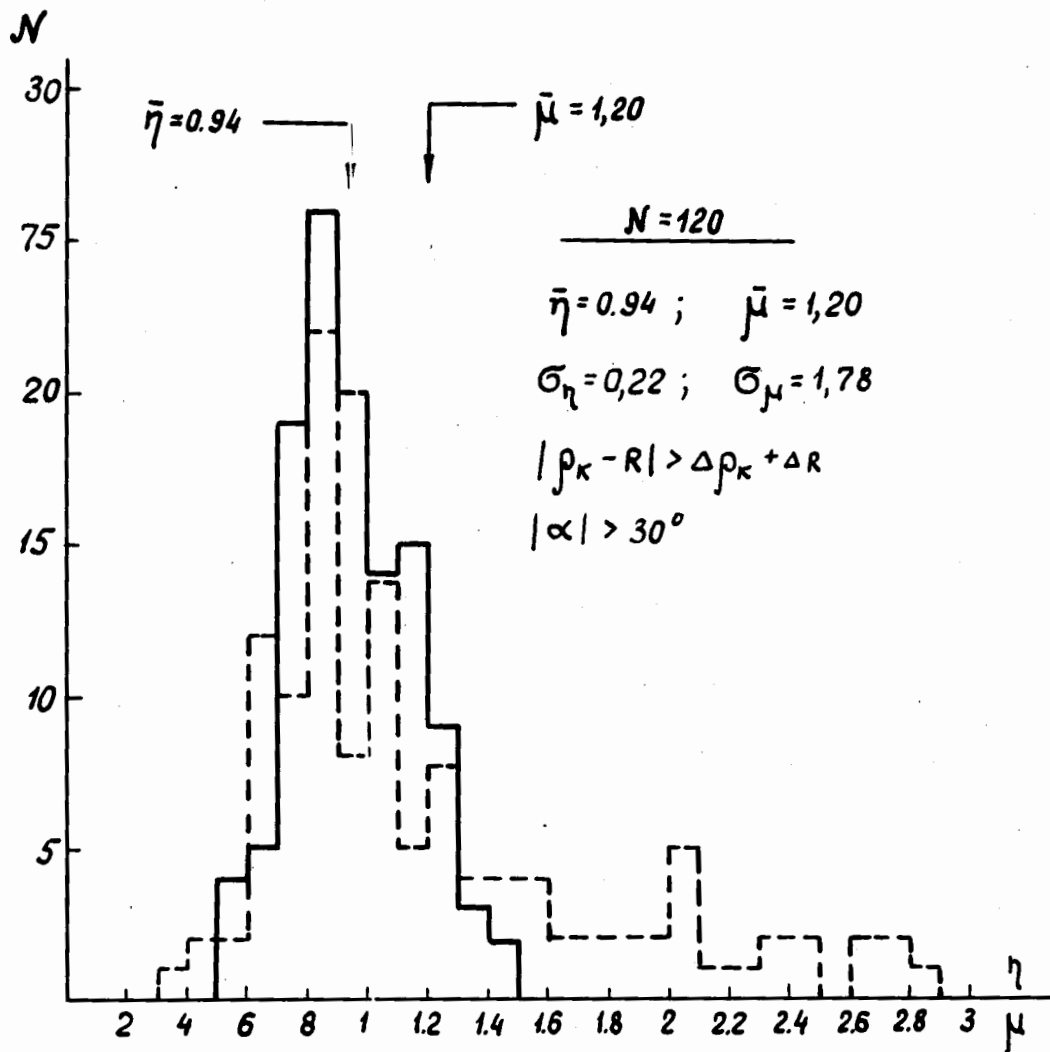


Рис. 18.

Таблица I

$S$ (мм)	число треков	$\bar{\eta}$	$\sigma_{\eta}$
0 - 0,2	238	0,97	0,22
0,2 - 0,4	130	0,97	0,22
0,4 - 0,6	79	0,99	0,12
> 0,6	321	1,02	0,13

Таблица II

$\alpha$	0°-30°	30°-60	60°-90°	0°-90°
„хорошо“	466	102	?	74%
„плохие“	90	110	?	26%