

Емельяненко Г.А., Им ЕИ Сек.

Б1-11-89-574

С 17Г

+

4692/89



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б 1-11-89-574

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1989

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория вычислительной техники и автоматизации

51-11-89-574

Г. А. Емельяненко, Им Ён (сек^х)

КРАТКИЙ ОБЗОР, АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ
МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ
ВЕКТОРОВ ТРЕХ, ПЯТИ, СЕМИДИАГОНАЛЬНЫХ И ХЕССЕНБЕРГОВЫХ
МАТРИЦ.

А н н о т а ц и я

Дается краткий обзор основных методов решения полной спектральной
проблемы матриц.

Рукопись поступила
в издательский отдел

..28.07.89.

^{х)} Университет, Пхеньян, КНДР.

Целью настоящей работы является краткий обзор, анализ проблем и систематизация основных методов нахождения собственных значений и соответствующих им собственных и корневых векторов для (трех, пяти, семи и т.д.) диагональных (или ленточных) и блочно-трехдиагональных матриц общего вида $\mathcal{C}(I)$ и хессенберговских матриц общего вида $H(I)$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} q_1 & \zeta_2 & & & \\ p_2 & q_2 & \zeta_3 & & \\ & & \dots & & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & \zeta_m \\ & & & p_m & q_m & \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & \dots & \dots & \vdots \\ & & & a_{m-1} & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (I)$$

произвольной структуры, а также созданных на их основе стандартных программ.

Поставленная задача актуальна несмотря на то, что в настоящее время алгебраической проблеме собственных значений и исследованию свойств трехдиагональных, ленточных и блочно-трехдиагональных матриц уже уделено большое место в фундаментальных монографиях, обзорах, справочниках и многочисленных оригинальных публикациях. Естественно не претендуя на полный библиографический список, мы укажем лишь следующие из них [I+I49].

На самом деле, интерес к задаче нахождения собственных значений λ и соответствующих им собственных векторов $U(\lambda)$ таких матриц в значительной мере обусловлен следующими обстоятельствами [98, I0I, I23].

Во - первых, нахождение собственных значений и соответствующих им собственных и корневых (в общем случае) векторов матриц $A = \|a_{ij}\|$ общего вида является сложной (по причине характерной неустойчивости) задачей, занимающей ключевое место в вычислительной линейной алгебре. При этом предъявление высоких требований к точности получаемых оценок собственных значений важно не только само по себе, но и для определения приемлемых по точности оценок соответствующих им собственных векторов и в целом для правильного определения структуры пространства этих векторов, т.е. для практического решения вопроса (на основе полученных на ЭВМ численных результатов) о том является ли матрица простой либо наоборот непростой (дефектной) структуры. От правильного ответа на этот вопрос при отсутствии достаточной априорной информации часто зависит качество интерпретации результатов решения конкретной физической задачи. Вычислительные (итерационные по сути см., например, [98, I20+ I2I]) методы, являющиеся основными при решении спектральных задач $A \hat{U} = \hat{\lambda} \hat{U}$, где A - целиком заполненная (в общем случае) несимметрическая матрица, значительно проще реализуются на ЭВМ в случае матриц вида $\mathcal{C}(I)$.

К итерационным методам решения спектральной задачи помимо условия устойчивости предъявляются также жесткие требования и на скорость их сходимости. Кроме того часто требуется иметь оценку точности найденных

собственных значений.

Другими словами при практическом решении указанной выше алгебраической проблемы на ЭВМ под методом (алгоритмом) следует понимать совокупность операций, учитывающих как собственно итерационный процесс так и способы введения в него (и соответственно выбора) итерационных ускоряющих коэффициентов - сдвигов.

Во - вторых, замена спектральной задачи с квадратной матрицей A общего вида спектральной задачей с матрицей вида $C(I)$ привлекательна (в связи с отмеченным выше преимуществом) ещё и потому, что в литературе описан ряд методов, позволяющих выполнить устойчивое преобразование подобия при переходе от A к трехдиагональной матрице [1+20, 92+94, 98, 120, 122, 124, 126]. В частности, в главе 6 из классической монографии [124] Д.К.Фаддеева и В.Н.Фаддеевой и в фундаментальном справочном пособии [126] В.В.Воеводина и Ю.А.Кузнецова описан биортогональный алгоритм Ланцоша, некоторые аспекты которого освещены в работе Ямамото [83]. Вопросам сведения посвящена и 6 - глава другой фундаментальной монографии [122] Дж.Х.Уилкинсона, а также известная работа [92] В.Н.Кублановской (с двукратным применением метода Хессенберга) и работа Рейни [8]. Вальтман и Ламберт [3] преобразование подобия осуществляют на каждом шаге над двумя строками и двумя столбцами матрицы A при помощи матриц более общего вида, чем матрицы вращения. Вещественная матрица A общего вида может быть также подобно преобразована в несимметрическую трехдиагональную матрицу с использованием процесса Бауэра (в модификации Рейни и Хабетлер [13]).

Обсуждение численных проблем сведения произвольной несимметрической матрицы A к трехдиагональной матрице имеет место и в § 1.7 специализированной монографии [120] В.П.Ильина и Ю.И.Кузнецова, а также в известной монографии [127] В.В.Воеводина. В случае же симметрических матриц $A = A^T$ информацию о методах сведения A к симметрической трехдиагональной матрице можно найти, например, в [9+20, 59, 93, 94, 120+122, 124], а также в монографиях [127] В.В.Воеводина и [126] Воеводина В.В. и Ю.А. Кузнецова и справочном пособии [132] Уилкинсона Р., а также в [131, 133] и в других работах.

В - третьих, трехдиагональные, ленточные и блочно-трехдиагональные матрицы играют и самостоятельную (выделенную) роль при решении многих задач вычислительной математики и математической физики (см., например, [140+145]).

На самом деле. Численное решение краевых задач математической физики (см., например, [141, 145]) приводится, в общем случае, к решению алгебраических задач с трехдиагональными, ленточными и блочно-трехдиагональными матрицами. В [142] и [143] показано, что исследование процессов ядерных взаимодействий и структуры атомного ядра (см., например,

§3.2 [142]) и процессов электрофизики (см., например, §4.2 [143]) приводит к решению полной алгебраической проблемы собственных значений матриц вида $\mathbb{C}(I)$. Как показано в [140] и [144], факторизованное представление матрицы ошибок с учетом многократного кулоновского рассеяния, энергетических потерь, а также аппаратных погрешностей и произвольного разбиения треков при обработке информации в экспериментах по физике высоких энергий, содержит матрицы – сомножители вида $\mathbb{C}(I)$.

Выше мы уже указали, что (по сути) методы вычисления собственных значений и собственных векторов являются итерационными. Однако следует отметить всё же для полноты картины, что по содержанию и назначению они делятся на две большие группы: прямые и итерационные [125,131].

В прямых методах обычно строится правило вычисления коэффициентов $\det(A - \lambda E) = 0$ – характеристического многочлена матрицы, а затем уже λ – собственные значения находятся как корни этого характеристического многочлена по какому-либо численному методу. После этого вычисляются собственные векторы. Теоретически обычно считается вторая задача более простой, хотя практически это утверждение не всегда оправдано.

К числу прямых методов, например, относятся методы Данилевского [124, 125,131], Крылова [122,124,125], Самуэльсона [125] и т.д.

Прямые методы имеют широкую область их формального применения и отличаются высоким быстродействием [125]. Однако для матриц A высокого порядка (т.е. $m \gg 10$) прямые методы оказываются чувствительными к ошибкам округления результатов промежуточных вычислений [125,131]. В частности, если заданная матрица вырожденная или почти вырожденная или непростой структуры (см., например, [98,101,129,122,128,124]), то эти методы дают неточные решения [125]. Таким образом действительная область применения прямых методов не столь широка, как это допускают теоретические предпосылки [125].

В итерационных же методах коэффициенты характеристического многочлена непосредственно не вычисляются, а строятся некоторые итерационные последовательности, позволяющие найти одно или несколько, либо все собственные значения рассматриваемой матрицы A [125,131].

Итерационные методы более трудемки чем прямые, однако, они менее чувствительны к ошибкам округлений и поэтому в общем случае надежнее прямых методов [125,131]. К числу итерационных методов, например, относятся метод вращений (Якоби), треугольный степенной метод, LR – алгоритм, QR – алгоритм и т.д. [122,124,125,127,131].

Кроме того проблему собственных значений матриц разделяют в свою очередь на полную и частичную проблемы собственных значений [122,125]. Частичная проблема собственных значений (т.е. поиск отдельных собственных значений и им соответствующих собственных векторов) часто возникает, например, при изучении устойчивости (или неустойчивости) про-

цессов, или при поиске собственного значения близкого к известному числу (как это имеет место, например, в задачах изучения явления резонанса [I25, I43]).

Проблема собственных значений, как уже отмечали выше, во многих случаях сильно чувствительна к ошибкам округлений и это особо следует учитывать при выборе соответствующего численного метода [I25, I31].

Полная и частичная проблемы собственных значений сильно различаются как по методам их решения, так и по области приложений. Поэтому, если решение полной проблемы собственных значений (даже в случае матриц не очень высокого порядка) обычно связано с большим объемом вычислительного труда, то возможность решения частичной проблемы собственных значений другими методами, минуя вычислительные трудности, характерные для решения полной проблемы, является очень ценной для практики.

Отмеченные особенности проблемы собственных значений для A - произвольных матриц в полной мере свойственны и для матриц $C(I)$ общего вида. Поэтому ниже мы кратко остановимся на анализе основных итерационных методов, применяемых на практике, для решения проблемы собственных значений лишь для матриц вида $C(I)$.

LR - алгоритм для вычисления собственных значений трехдиагональной матрицы $C(I)$ имеет вид (см., например, [I20, I22])

$$[C^{(k)} = L^{(k)} R^{(k)} \rightarrow C^{(k+1)} = R^{(k)} L^{(k)}]; \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{где} \quad (2)$$

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \gamma_2 & 1 & & & & \\ & \gamma_3 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & \gamma_{n-1} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(k)} = \begin{bmatrix} r_1 & z_2 & & & & \\ & r_2 & z_3 & & & \\ & & r_3 & z_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r_{m-1} & z_m \\ & & & & & r_m \end{bmatrix}, \quad C^{(k)} = \begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & & & \\ & q_2 & z_3 & & & \\ & & q_3 & z_4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & q_{m-1} & z_m \\ & & & & & q_m \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C^{(k)} = C. \quad (3)$$

При этом, если матрица $C(I)$ имеет собственные значения, удовлетворяющие условиям

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_{m-1}| > |\lambda_m| > 0 \quad (4)$$

и ненулевые ведущие угловые миноры, то разложение вида (2) существует, а также выполняются следующие предельные (при $k \rightarrow \infty$) соотношения [I20]

$$L^{(k)} \rightarrow E; \quad r_i^{(k)} \rightarrow \lambda_i; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad p_j^{(k)} \rightarrow 0; \quad j = 2, 3, \dots, m; \quad (5)$$

При доказательстве сходимости алгоритма используется [I25] соотношение (теорема Бауэра)

$$r_i^{(k)} = \Delta_i^{(k)} / \Delta_i^{(k-1)}; \quad \Delta_i^{(k)} = 1; \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где $\Delta_i^{(k)}$ - i -ый верхний ведущий угловой минор матрицы $C^{(k)}$ (3). Сходимость алгоритма (2)+(5) определяется [I22] следующими соотношениями

$$p_i^{(k)} \rightarrow K_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \right)^k; \quad i = 2, 3, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где K - число итераций, K_i - постоянные числа, которые в общем случае в литературе явно не определяются, λ_i - искомые собственные значения матрицы $C(I)$.

Переход от $C^{(k)}$ к матрице $C^{(k+1)}$ (без применения перестановок, что обеспечивается условиями (4), и сдвигов) требует порядка 6^m арифметических операций (см., например, II8с. [I20]).

Если собственные значения матрицы $C(I)$ различны, то в общем случае матрица $C^{(\infty)}$ стремится к верхней треугольной, диагональные элементы которой суть собственные значения, расположенные в порядке убывания их модулей [I32, I31, I22, I27]. Если матрица $C(I)$ имеет комплексные или кратные собственные значения, то матрица $C^{(\infty)}$ стремится к треугольной матрице с блоками на диагонали. Причем комплексному или кратному собственному значению (кратности S) соответствует диагональный блок порядка S (см., например, 348с. [I32] и §4 [I31]).

Но приведенный выше LR - метод при практических вычислениях на ЭВМ, как правило, не используется в силу его медленной сходимости при наличии у $C(I)$ близких собственных значений, а также плохой (в общем случае) устойчивости из - за большой чувствительности к характеру поведения ведущих угловых миноров у $C(I)$ - матриц (см., например, §3.10 [I20]).

Поэтому на практике используются следующие модифицированные (ускоренные) LR - алгоритмы [I20, I22, I24, I27, I31, I32]

$$\left. \begin{aligned} (C - WE) &= L R \rightarrow R L = C \\ C &= L^{-1} \dots L^{-1} \left(C - \sum_{p=1}^k \frac{C^{(p)}}{W} \right) L \dots L \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

либо

$$\left. \begin{aligned} (C - WE) &= L R \rightarrow R L + WE = C \\ C &= L^{-1} \dots L^{-1} C L \dots L \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

сходимость которых определяется соотношениями

$$R_i^{(k)} \rightarrow K_i \prod_{p=1}^k \left(\frac{\lambda_i - W^{(p)}}{\lambda_{i+1} - W^{(p)}} \right); \quad i = 2, 3, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $W^{(p)}$ - итерационные ускоряющие коэффициенты, а K_i имеет указанный выше смысл.

При этом оптимальная (т.е. обеспечивающая минимальное число итераций и приемлемую точность оценок $\hat{\lambda}$) стратегия выбора сдвигов $W^{(p)}$ должна одновременно удовлетворять как условиям ускорения (10) и хорошей обусловленности (т.е. устойчивости и отличия от нуля) всех ведущих угловых миноров матриц $C^{(k)}$ (что позволяет сохранить для $C^{(\infty)}$ ленточную форму $C(I)$ и численную устойчивость (см., например, §3.10 [I20] и 487с. [I22]) LR - алгоритма) так и требование сохранения вещественности матриц $C^{(k)}$, если $C(I)$ вещественная. Но на практике при использовании известных (см., например, [I31], [I32]) стратегий выбора $W^{(p)}$ оптимальность (в указанном выше смысле) LR - метода для $C(I)$ - вещественных матриц обе-

спечивается не всегда, если не прибегать к перестановкам строк и столбцов у матриц $\overset{ck}{C}$. В частности, если использовать обычную (приведенную выше) LR - технику без перестановок, то ленточная форма исходной матрицы сохраняется, но численная устойчивость уже может быть не обеспечена (см., например, 487с.[122]). Если же используется LR - алгоритм с перестановками, то вообще говоря, ленточная форма над диагональю исходной $C(I)$ матрицы у матриц $\overset{ck}{C}$ постепенно портится (см., например, 487с.[122]) и матрицы $\overset{ck}{R}$ - обретают общий треугольный вид. Но для исходных матриц в форме Хессенберга их вид сохраняется [122, 131, 132].

Поэтому на практике (см., например, [132]) обычно при вычислении λ - спектра $C(I)$ - трехдиагональных матриц общего вида использует LR - алгоритм для H - матриц Хессенберга.

Ниже мы приведем (для полноты) краткий анализ известных методов решения спектральной задачи для $C(I)$ и выбора $\overset{ck}{W}$ - ускоряющих коэффициентов.

В [21] рассмотрен LR - алгоритм со сдвигом Лагерра для симметричной трехдиагональной матрицы и приводилась АЛГОЛ - программа и результаты тестовых расчетов.

В [102] приведены АЛГОЛ - программа модифицированного LR - алгоритма для нахождения двухстороннего приближения к собственным значениям трехдиагональной симметричной матрицы и тестовые примеры.

В [122] рассмотрен QD - алгоритм для вычисления собственных значений несимметричных трехдиагональных матриц и отмечено, что QD - алгоритм играет значительно большую роль в общей проблеме вычисления нулей мероморфных функций. Но QD - алгоритм оказывается неподходящим в общем случае для вычисления всех λ , так как он соответствует исключению элементов без перестановок (см., 488с.[122]). В [122] отмечено (см., 489с.[122]), что, если A_1 - положительно определенная симметричная трехдиагональная матрица, то можно модифицировать LR - алгоритм, используя симметричную факторизацию Холецкого (см., например, §42 гл.4 [122]). При этом не только вдвое уменьшается объем вычислений, но факторизация Холецкого обеспечивает высокую численную устойчивость и не требует перестановок (см., 472с.[122]). Если A_1 - неположительно определенная, то факторизация Холецкого приводит к комплексным числам, и численная устойчивость не обеспечивается (см., 473с.[122]). Для обеспечения же в общем случае устойчивости надо использовать перестановки, а это нарушает симметрию (см., 214с.[122]).

QL (или QR) - алгоритм сохраняет ленточную форму лишь для симметричных (эрмитовых) матриц (см. 123с.[120] и 487с.[122]). Верхняя же и нижняя формы Хессенберга инвариантны по отношению к QR и соответственно QL - алгоритмом (см., например, 457с.[122]).

QR - факторизация имеет то преимущество перед LR , что обращение

в нуль ведущего главного минора у A^{∞} (итерационной матрицы) не вызывает (см., например, 450с. [I22]) нарушения QR - алгоритма, как это было в обычном LR - разложении (см., например, 27с. [I2I]). Свойства сходимости QR - алгоритма также значительно лучше чем LR - алгоритма. Например, в общем случае число итераций при QR - преобразованиях оказалось значительно меньше по сравнению с модифицированным LR - процессом при использовании сдвигов, определенных в каждом случае по одному и тому же принципу (см., например, 458с. [I22]).

QR - алгоритм для симметричной положительно определенной матрицы имеет тесную связь с LR - алгоритмом. На самом деле, матрица $A^{(k+1)}$ $2k+1$ -го шага LR - алгоритма равна матрице $k+1$ -го шага QR - алгоритма (см., например, 125с. [I20] и 473с. [I22]). Итак, QR - алгоритм сходится вдвое быстрее LR - алгоритма (без учета сдвигов).

Если заданная матрица имеет комплексные или кратные собственные значения, то свойства сходимости QL (QR) - алгоритма сходны с LR - алгоритмом, указанным выше (см., например, [9I], [I32], [I3I], [I22]).

В [22+37, I03] исследованы алгоритмы для вычисления собственных значений симметричных трехдиагональных матриц на основе $QR(QL)$ - алгоритма, а в [89] для ленточных симметричных матриц.

В [34+37] рассмотрен QL - алгоритм для симметрической положительно определенной трехдиагональной матрицы, а в [22, 23] обсуждалась техника сдвигов для ускорения сходимости QR - алгоритма. В [32, 33] описаны две процедуры для вычисления всех собственных значений и собственных векторов симметричных трехдиагональных матриц (с.т.м.) на основе неявного QL - алгоритма и QL - алгоритма со сдвигом. В [3I, 29] предложен QR - алгоритм для вычисления собственных значений (с.з.) эрмитовой трехдиагональной матрицы, у которого каждый шаг процесса требует $4n^2$ сложений, $4n$ умножений и $3n$ делений (n - порядок матрицы). В [30] показано, что могло нарушить численную устойчивость процесса, предложенного в [3I] и [35], а также предложен новый рациональный вариант QR , требующий больше арифметических операций на каждом шаге процесса, но обладающий более быстрой сходимостью и лучшей устойчивостью. В [28] анализировалась одна итерация QR - алгоритма для с.т.м. порядка n с точки зрения реализации на параллельном компьютере. В [27], установив связь QL - алгоритма с методом обратных итераций и используя выведенную авторами новую оценку ошибок первых шагов метода обратных итераций, дано новое более простое доказательство глобальной сходимости QL - алгоритма для с.т.м. В [26, 24] рассмотрена скорость сходимости QL - алгоритма со сдвигами для с.т.м., а в [25] обсужден вопрос о расхождении QL - алгоритма и указан класс матриц, для которых алгоритм расходится. В [I03] выполнено сравнение быстродействия и точности двух алгоритмов, предложенных авторами, и алгоритмов QR - метода со сдвигами Релея, Уилкинсо-

на и алгоритма Ортеги - Койзера со сдвигом Релея. В [I20] и [I22] отмечено, что в QL - алгоритме для вычисления с.з. с.т.м., у которого не нужно ни одного извлечения квадратного корня, каждая итерация требует вычисления $3n$ делений и $3n$ умножений (см., например, I25с.[I20]).

В [21], [38+44] и [I04] обсуждены некоторые стратегии выбора ускоряющих коэффициентов. В [21] использован LR - алгоритм со сдвигом Лагерра для вычисления с.з. положительно определенной трехдиагональной матрицы. В [44] рассмотрено применение QR - алгоритма со сдвигом к решению проблемы с.з. с.т.м., т.е. $Q(A - WE) = R$, $RQ + WE = A$, $k=1,2,\dots$. Но здесь в качестве W_k - сдвига выбирается элемент ($\tilde{a}_k = \tilde{w}_k$) - линейный сдвиг, либо ($\tilde{w}_k =$ собственному значению матрицы $\begin{bmatrix} \tilde{a}_{k-1} & \tilde{e}_k \\ \tilde{e}_k & \tilde{a}_k \end{bmatrix}$, ближайшему к \tilde{a}_k) - квадратичный сдвиг. В статье [43] рассмотрены 2 стратегии выбора сдвигов в алгоритме QR со сдвигом для эрмитовых матриц. Из них первая стратегия применяется практически к с.т.м. и описана в литературе (например, [I22]), а вторая стратегия вводится авторам. Здесь также доказана связь выбора сдвигов при второй стратегии с поправкой по методу Ньютона - Рафсона применительно к некоторой последовательности рациональных функций, а также с нулями полиномов Ланчоса. Кроме того показана сходимость QR - алгоритмы со сдвигом для эрмитовых матриц при выборе сдвигов согласно второй стратегии.

В LR - алгоритме со сдвигом $A - WE = L R$, $A - WE = R L$, $A = A$ на практике обычно в качестве W берут или последний диагональный элемент \tilde{a} (линейный сдвиг) [39], [42, I22, I27] или собственное значение (в общем случае это значение будет комплексным) нижней квадратной подматрицы 2×2 для \tilde{A} , ближайшее по величине к \tilde{a}_n (квадратичный сдвиг) [39], [42, I22, I31+I33]. Отметим, что сходимость модифицированного алгоритма с выбранными выше сдвигами не поддается точному количественному анализу, но его экспериментальная проверка дает весьма удовлетворительные результаты (см., например, 348+350с. [I32]). В [42] автор вводил семейство обобщенных сдвигов. Здесь под сдвигом порядка i понимается $\tilde{w}_i = W_i$, удовлетворяющее уравнению $\det [C_i(A_i - \lambda E) B_i] = 0$, где $\{C_i\} = \{C_i\}$ и $\{B_i\} = \{B_i\}$ - последовательности матриц размеров $i \times n$ и $n \times i$ соответственно. В [41] анализировались вопросы рационального выбора сдвигов для случая трехдиагональных матриц. Предлагалось несколько приемов выбора сдвига, а также довалась оценка скорости сходимости. В [40] в QR - алгоритме для действительной с.т.м. предлагается сдвиг $\tilde{w} = \mu - \psi(\mu) / \psi'(\mu)$; где μ - собственное значение нижней квадратной подматрицы 2×2 для \tilde{A} , ближайшее по величине к \tilde{a}_n , а $\psi = \det(A - \lambda E) / \det(A_{n-1} - \lambda E)$ и A_{n-1} - ведущая главная подматрица порядка $n-1$ в матрице A . При этом показано, что для этого сдвига \tilde{w} алгоритм имеет сходимость порядка 7. В этой работе также рассматриваются еще три предписания подобного рода. В [I04] рассматривается вопрос о выборе стратегии сдви-

гов матрицы на каждом шаге QR-процесса решения полной проблемы с.з. Здесь показывается, что в качестве сдвигов можно использовать результаты реализации любого сходящегося метода определения корней многочлена и доказывается глобальная сходимость алгоритма при такой стратегии сдвигов. В [39] автор построил пример матрицы 4-го порядка

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{21} \\ a_{21} & x & 0 & a_{24} \\ 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & y & x \end{bmatrix}, \text{ где } x = a_{11} + a_{24}, y^2 = a_{21}^2 + a_{24}^2,$$

показывающий, что для нормальных хессенберговых матриц A_0 QR-алгоритм со сдвигами не имеет сходимости при указанных выше выборах линейного или квадратичного сдвигов. А также показано, что если \tilde{W}_j - сдвиг j -го порядка, где K - число итераций, взять равным собственному значению нижней угловой подматрицы порядка j итерационной матрицы \tilde{A} , то, привлекая сдвиги с порядком $j > 2$, можно получить монотонную сходимость к нулю элемента $a_{n,n-1}$ и в этом случае. В [38] описывается новый способ выбора сдвигов в QL-алгоритме для трехдиагональной матрицы, который по сути основан на вычислении корней кубического уравнения (т.е. кубический сдвиг). Для данного способа выбора сдвигов доказывается глобальная кубическая асимптотическая скорость сходимости QL-алгоритма.

В [84+88] рассмотрены алгоритмы для вычисления с.з. хессенберговых матриц на основе модифицированных LR(RL) или QL(QR) - методов и в [131+133] рекомендованы подпрограммы, в которых эти алгоритмы реализованы с использованием квадратичных сдвигов, указанных выше. В [87] предложен алгоритм QR с двойным сдвигом. Способ выбора двойного сдвига обсуждается также и в фундаментальной монографии [122] Уилкинсона.

Применение линейного или квадратичного сдвигов показывает, что среднее число итераций на каждое с.з., как правило, не превосходит 5 [122, 127], если учитывать в итерационных методах принцип исчерпания (или фиксации).

Исчерпание эффективно для вычисления с.з. матриц на основе LR или QR(QL) - методов, поскольку оно позволяет продолжать применение LR- или QR(QL) - алгоритмов к матрицам меньших размерностей, что уменьшает время вычисления на ЭВМ и улучшает точность (см., например, 236с. [127], гл.7 и 8 [122]).

В [69] и [108+112] рассмотрены алгоритмы исчерпания для трехдиагональных матриц и обсуждены вопросы вычислительных погрешностей. В [111], [112] и [110] предлагаются новые варианты формул для алгоритмов исчерпания с.т.м. и двухдиагональных матриц, а в [110] и [109] приводится оценка погрешности, допускаемой при реализации этих алгоритмов на ЭВМ. Работа [108] посвящена также выводу новых формул и анализу погрешностей, возникающих при реализации на ЭВМ алгоритмов исчерпания с.т.м. В

[120] также даются рекомендации по использованию исчерпания в QR - или LR - алгоритмах для вычисления с.з. трехдиагональных матриц.

Метод бисекций особенно эффективен при нахождении отдельных либо нескольких последовательно расположенных собственных значений (см., например, [127], [132] или IOIs.[120]) симметричных вещественных трехдиагональных матриц $C(I)$.

Метод бисекций (включая анализ ошибок округления на ЭВМ) был тщательно разработан в трудах В.В.Воеводина (см., например, [105,146]), а также Гивенса (см., например, [120,124], а также, РЖМ, 1956, 8347).

В [45+56] и [105,146] рассмотрено решение проблемы с.з. для с.т.м. методами бисекций, а в [75+81] для пятидиагональных и ленточных симметричных матриц.

В [56] показано на примерах, что построение последовательностей Штурма с учетом правила знаков в некоторых случаях приводит к неверным результатам. В [55] приведен алгоритм, у которого число операций на каждом шаге процесса в 2 раза меньше по сравнению с [56]. В фундаментальном обзоре [123] Д.К.Фаддеева и В.Н.Фаддеевой (см., например, 87с.) дана обширная библиография по работам, связанным с методом бисекций. Мы не приводим здесь полный список всех из них, а остановимся лишь на некоторых. В частности в [123] отмечено, что в [54] Уилкинсон продолжил исследование метода и дал процедуру *bisect*, впоследствии усовершенствованную им, Бартом и Мартином в [52]. В [53] даны некоторые замечания, относящиеся к вычислению с.з. методом бисекций, а также к вычислению им соответствующих собственных векторов (с.в.) трехдиагональной матрицы. В работе Перейна и Шерера [51] предложен комбинированный метод бисекций с методом Ньютона. В работах В.В.Воеводина и В.М.Воловича [146, 105] была дана отличная от традиционной вычислительная схема метода бисекций, положенная в основу соответствующего макромодуля для решения проблемы с.з. трехдиагональной матрицы. В [50] дана модификация метода бисекций для определения с.з. действительной с.т.м., состоящая в том, что члены последовательности Штурма вычисляются тогда, когда определяется соответствующая информация о требуемом с.з. В [48] предлагается заменить бисекции более быстрым способом разыскания корней многочлена, а в [46] описан вычислительный алгоритм для нахождения нескольких или всех с.з. и соответствующих им с.в. с.т.м. на основе комбинации методов бисекций и обратных итераций. В [49], [47] и [45] обсуждалась параллельная реализация метода бисекций для вычисления с.з. с.т.м. В [70] и [13] метод бисекций сравнивается с QR - алгоритмом, LL^T - алгоритмом и т.д. В [132] показано, что общее число итераций для вычисления собственных значений симметрической трехдиагональной матрицы $C(I)$ вида

$$C = \left\{ q_i = \begin{cases} 110 - 10 \cdot i, & 1 \leq i \leq 11 \\ 10i - 110, & 12 \leq i \leq 21 \end{cases}, p_n = 1 - \varepsilon_n; n = 2, \dots, 21 \right\},$$

у которой имеются очень близкие с.з., на основе метода бисекции составило 345, т.е. в среднем 16-итераций на одно собственное значение.

В [79+81] приведены рекуррентные формулы, позволяющие вычислять определитель пятидиагональной матрицы через её главные миноры, и разработан алгоритм для вычисления её с.з., который по сути опирается на метод бисекций с использованием этих рекуррентных формул. Приведены также их программные реализации на АЛГОЛ - языке и обобщения на случай блочно-трехдиагональной матрицы. В [77] указаны опечатки и ошибки в процедуре Эванса, которая опубликовала им в 1975 году [81], и приведен текст исправленной программы. В [76] предложен метод вычисления с.з. пятидиагональных матриц. Он основан на существовании функций, значение которых в некоторой точке интервала, содержащего с.з., дает информации о количестве с.з., лежащих левее этой точки. Вид этих функций для пятидиагональной матрицы приведен в работе Сентанса и Клиффа [77]. А также здесь описана модификация этого алгоритма, удобная для реализации на параллельном процессоре типа SIMD. В [75] дается новый эффективный метод решения обобщенной задачи нахождения λ - с.з. и U - с.в. для систем большой размерности $AU = \lambda BU$, где A и B - действительные симметричные матрицы блочно-диагонального или ленточного вида, а B положительно определена. Собственные значения вычисляются с помощью метода бисекций. В [78] предложен метод, сводящий вычисление с.з. пятидиагональной симметричной теплицевой матрицы к вычислению корней полиномов невысокой степени, а вычисление компонент с.в. к вычислению несложных функций от соответствующих с.з. В [118] рассмотрен алгоритм решения полной проблемы с.з. для пятидиагональных матриц, соответствующих колебаниям стержней с регулярно расположенными точечными массами и с произвольными закреплениями концов. В [119] приводится анализ законов распределения с.з. пятидиагональных матриц специального вида.

Метод Якоби (вращений) [122, 124, 127, 131, 132, 60, 61, 106 и т.д.] - наиболее изящный [132] из всех итерационных методов решения полной спектральной проблемы действительных симметрических матриц. Хотя метод Якоби достаточно компактен (изящен) и вычисление с его помощью собственных значений и векторов не представляет затруднений, он требует большего времени для вычислений, чем сочетание процедуры преобразования сначала к трехдиагональной форме с последующим вычислением с.з. и с.в. трехдиагональной матрицы (см., например, 183с. [132]). Поэтому при больших порядках исходных матриц предпочтительнее использовать эти смешанные процедуры вместо чистых процедур Якоби особенно для симметрических ленточных матриц, ширина ленты которых мала по сравнению с их порядком n . Однако для ленточных матриц лучше применять LR-алгоритмы, потому что метод Якоби не использует преимуществ таких матриц (см., например, 183с. [132], §4 гл. I [131]).

В [107] дано описание алгоритма, представляющего собой модификацию метода парабол, для нахождения большого количества действительных и комплексных собственных значений трехдиагональных матриц высокого порядка с нелинейным входением спектрального параметра и большого количества корней нелинейных уравнений. В [62] рассмотрены вопросы о решении проблемы с.з. и о решении систем уравнений для с.т.м. и приводятся алгоритмы расчетов для параллельных ЭВМ.

В [63] предложен метод вычисления с.з. с.т.м. $L(a, b) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ 0 & & \dots & \\ 0 & b_{n-1} & & a_n \end{pmatrix}$ с помощью решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$da_k/dt = 2(b_k^2 - b_{k+1}^2), db_k/dt = b_k(a_{k+1} - a_k); k=1, \dots, n \quad (b_n = 0 = b_{n+1}).$$

Авторы показали, что эта система обыкновенных дифференциальных уравнений обладает свойством изоспектральности, т.е. с.з. матрицы $L(a(t), b(t))$ не зависят от t , а также $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} b_k(t) = 0, k=1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, $L(t) = L(a(t), b(t))$ сходится при $t \rightarrow \pm\infty$ к диагональной матрице, у которой на диагонали стоят с.з. матрицы $L(0)$. С помощью предложенного метода (за счет использования стандартного алгоритма тридиагонализации) можно вычислять с.з. действительной симметрической матрицы общего вида. Рассматриваемый метод допускает блочное обобщение.

В [64] автор применял алгоритм перестройки спектрального разложения симметричной матрицы при возмущении её симметричной матрицей ранга I, который предложили Банч, Нильсен и Соренсен (*Numer. Math.*, 1978, 31, 31-48), к вычислению всех с.з. с.т.м.

В [65] рассмотрено применение методов теории возмущений к нахождению с.з. трехдиагональных матриц. В [74] показано применение метода Лагерра для вычисления с.з. таких матриц.

В [68] исследована возможность построения включающих множеств для вычисления с.з. симметрической матрицы в процессе приведения её к трехдиагональной форме на основе основной теоремы, связанной с биортогональным алгоритмом Ланцоша. В [58, 57, 82] анализируются проблемы сведения матриц общего вида к трехдиагональным, а также соответствия собственных значений этих матриц в результате применения метода Ланцоша [126]. В [67] рассмотрены границы для с.з. трехдиагональных матриц, удовлетворяющих некоторым условиям. В [66] установлены границы для действительной и мнимой части с.з. трехдиагональных матриц порядка n с комплексными элементами такими, что $a_k \cdot c_k$ — действительное число, где a_k и c_k — её внедиагональные элементы, $k=1, 2, \dots, n-1$.

Применение метода Якоби (вращений) или QR-алгоритма для нахождения с.в. заставляет дополнительно вычислять и запоминать матрицу результирующего преобразования подобия. Эта операция оказывается очень невыгодной, если нужно определить лишь несколько векторов (см., например, 264с. [127]). К тому же вычисление матрицы преобразования усложняет

численный метод. Особенно усложняется QR - алгоритм, так как теперь в нём гораздо труднее осуществлять переход к матрицам меньших размеров при появлении нулевых поддиагональных элементов (т.е. при применении метода исчерпания, например, 265с. [127], а также §31 гл.2 [126]). Применение метода бисекций вообще не дает никакой явной информации относительно с.в., а в LR - алгоритме матрицы L_k играют побочную роль и их также нельзя использовать для вычисления с.в. исходной матрицы (см., например, 264с. [127] и 124с. [125]).

Все эти причины приводят обычно к необходимости более пристального рассмотрения задачи практического определения с.в. по предварительно вычисленным собственным значениям.

Метод обратных итераций (см., например, [124], [122], [126] и т.д.) является в настоящее время одним из самых эффективных, используемых на практике, численных методов определения с.в. матрицы как по предварительно вычисленным её отдельным с.з. так и при их уточнении.

Ниже мы укажем лишь несколько из работ, проанализированных в [123], в которых обсуждается метод обратных итераций.

В частности в [123] указано, что в [73] Уилкинсон дал процедуру *tristram* для применения метода обратных итераций к трехдиагональным матрицам, а позднее эта процедура была улучшена им совместно с Петерсом [71] (а также см., 367+384с. [132]). В работе Хиракава Косабуро [72] делаются некоторые замечания, касающиеся влияния точности приближения, взятого за с.з. В.В.Воеводин и В.М.Волович [146,105] дают алгоритмы для вычисления с.в. и с. з. трехдиагональной матрицы, используя оригинальное видоизменение метода обратных итераций. В [114] также рассматривалось применение метода обратных итераций для нахождения с.з. и с.в. трехдиагональных матриц.

В [115,116] был разработан алгоритм для вычисления с.з. и с.в. симметрических трехдиагональных матриц, учитывающий влияние вычислительных погрешностей и гарантирующий оценку точности результатов. Обоснование метода опирается при этом на специальным образом модифицированную теорию Штурма.

Если матрица имеет кратные или очень (слизкие с.з., то эффективность метода обратных итераций снижается из-за необходимости учета большего числа параметров (см., например, 369с. [132]). В [71] рекомендуется, например, применить метод обратных итераций, если число определяемых с.в. не больше 25% от их общего числа.

В [126,120,141] можно ознакомиться, например, также и с другими методами и в частности вариантами применения методов монотонных и немонотонных прогонок при вычислении с.в. трехдиагональных матриц по известным с.з.

В заключении этого краткого анализа отметим следующее [98]:

Во - первых, для вычисления с.з. (в том числе полного спектра $-\hat{\lambda}$) матриц $(A = A^T) \leftrightarrow [\lambda, (C = C^T)]$ широко используются LR-, QR- алгоритмы, метод бисекций, метод Якоби, а также методы прямых и обратных итераций. При этом любой из указанных методов не нарушает трехдиагональную структуру исходной матрицы $C = C^T$ и в каждой из итераций. Если же $C \neq C^T$, то в итерационной процедуре QR- алгоритма нарушается трехдиагональная структура исходной матрицы $C(I)$. Метод же бисекций для несимметрических матриц $C \neq C^T$ применим лишь после определенных модификаций [132]. Методы прямых и обратных итераций и LR- алгоритм применимы как в случае $C = C^T$, так и в случае $C \neq C^T$, но LR- метод устойчив лишь (формально) для положительно определенных матриц (см., например, [120]).

Во - вторых, приступая к разработке новых методов вычисления с.з. и с.в. матриц $C(I)$ всегда следует иметь в виду неустойчивую природу λ к возмущениям самой матрицы $A \leftrightarrow C$, которая не обязательно связана с наличием кратных с.з. и тем более жордановых клеток [128]. Эта неустойчивость (в силу линейной зависимости $[A \hat{u}(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda} \hat{u}(\hat{\lambda})] \leftrightarrow [C u(\omega) = \lambda u(\omega)]$) приводит неизбежно к неустойчивости в вычислении с.з. $[\hat{u}(\hat{\lambda})] \leftrightarrow [u(\omega)]$. Более того, как ясно из примеров, которые нами приведены в [99, 101], эта неустойчивость может приводить не только к возмущению $[\hat{u}(\hat{\lambda})] \leftrightarrow [u(\omega)]$, но и к изменению числа с.в., отвечающих данному $\hat{\lambda} \leftrightarrow \lambda$, что теоретически возможно только при наличии кратных с.з. Из тех же примеров [99, 101, 148] ясно, что различная степень устойчивости разных методов при вычислении λ может приводить даже " к замене " чистого вещественного спектра λ на комплексный.

В - третьих, даже без учета анализа проблем устойчивости следует иметь в виду, что перечисленные выше методы по разному " реагируют " на практическое определение внутренней структуры матриц $A \leftrightarrow C$, т.е. на практическое вычисление всех их линейно независимых с.в. Так LR- алгоритм фактически не применяют, а метод бисекций вообще нельзя применить для вычисления с.в. $[A \leftrightarrow C]$ - матриц. QR- алгоритм применим как для матриц простой структуры, так и для матриц не простой структуры. Однако применение QR- алгоритма эффективно только при одновременном нахождении как с.з., так и соответствующих им с.в., и этот метод, как правило, не применяют для нахождения только с.в. по известным с.з. Но с другой стороны, применение QR- алгоритма для нахождения с.в. заставляет дополнительно вычислять и запоминать матрицу результирующего преобразования подобия [127]. Особенно усложняется QR- алгоритм, так как теперь в нем гораздо труднее осуществлять переход к матрицам меньших размеров при появлении нулевых поддиагональных элементов (см., например, 264+265с. [127] и §31 лг.2 [126]). Кроме того, QR- алгоритм, как уже отмечали выше, не сохраняет ширину ленты в итерационной процедуре в случае $C \neq C^T$. Перечисленные только что обстоятельства снижают

достоинства QR - алгоритма, и поэтому часто предпочтение в практической работе на ЭВМ отдают методом прямой и обратной итераций (см., например, §47 [127], §3.12 [126], §3 гл.9 [122]; §18. часть II [132]). Однако методы прямой и обратной итерации, весьма эффективные в случае матриц простой структуры, несколько теряют это достоинство в случае, например, жордановоподобных матриц с несколькими клетками Жордана для одного и того же с.з. Это обусловлено в значительной мере желательностью выбора хорошего начального приближения для уменьшения числа итераций при решении систем уравнений с матрицами $C(I)$ даже при известных с.з.

Учитывая актуальность задачи и представленный выше краткий анализ достоинств и недостатков существующих в настоящее время численных методов поиска собственных значений и векторов матриц общего вида $C(I)$, в цикле работ [95+101, 147+148], были изложены научные результаты, новизна которых может быть охарактеризована в общем виде следующим образом:

1. Получены (на основе модификаций LR (либо RL) - алгоритмов, а также применения обобщенной мультипликативной [138, 149] теории ведущих угловых миноров) множества эффективных методов вычисления всех собственных значений и соответствующих им собственных (корневых) векторов трех, пяти, семидиагональных матриц общего вида $C(I)$ произвольной структуры, а также матриц Хессенберга $H(I)$.

2. Предложен новый эффективный универсальный способ выбора ускоряющих коэффициентов в $LR(RL)$ либо $QR(QL)$ - методах.

3. Созданы (на основе новых разработанных алгоритмов) и отлажены стандартные программы на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60), лучшие из которых по эффективности основных параметров превосходят известные и широко распространенные в настоящее время стандартные программы подобного типа.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору Н. Н. Говоруну за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Dax A., Kaniel S., The ELR method for computing the eigenvalues of a general matrix. SIAM J. Numer. Anal., 1981, 18, N4, 597-605. (РЖМ, 1982, 4Б1316).
2. Rainey J.W., Habetler G.J. An application of the LR factorization to sequential tridiagonalization methods. "SIAM J. Appl. Math.", 1969, 17, N1, 212-221. (РЖМ, 1970, 4Б818).
3. Waltmann William L., Lambert Robert J. T-algorithm for tridiagonalization. "J. Soc. Industr. and Appl. Math.", 1965, 13, N4, 1069-1078. (РЖМ, 1966, 10Б703).

- Sonderh., T75-T77. (PMM, 1966, IOE706).
19. Wilkinson J.H. Householder's method for symmetric matrices. "Numer. Math.", 1962, 4, N4, 354-361. (PMM, 1962, 8B45).
 20. Householder Alston S. Generated error in rotational tridiagonalization. J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, N4, 335-338. (PMM, 6.1960, 7007).
 21. Grod J., Zakrajsek E. LR algorithm with Laguerre Shift for symmetric tridiagonal matrices. "Comput. J", 1972, 15, N3, 268-270. (PMM, 1973, 4E933).
 22. Boothroyd J. The QR algorithm for symmetric tridiagonal matrices using a semi-implicit shift of origin. "Austral. Comput. J.", 1970. 2, N2, 55-60. (PMM, 1973, 2E873).
 23. Stewart G.W. Incorporating origin shifts into QR algorithm for symmetric tridiagonal matrices. "Communs ACM", 1971, 13, N6, 365-367. (PMM, 1971, 2E874).
 24. Yu Choghua. On convergence of eigenvalues in natural order for symmetric tridiagonal QL algorithm. Numer. Math. J. Chin. Univ.- 1988.- 10, N1 - C. 28-40. (PMM, 1989, 2F23).
 25. Zhang Zhenyue. On the non-convergence of the QL algorithm with the Royleigh quotient. J. Rudon Univ. Nat. Sci.- 1988. -27. N2. - C. 143-148. (PMM, 1989, 2F24).
 26. Jiang Erixion. The convergence rate of the QL algorithm with shifts for symmetric tridiagonal matrix. Numer. Math. J. Chin. Univ., 1985, 7, N1, 16-30. (PMM, 1985, IOBI329).
 27. Hoffmann W., Porlett B.N., A new proof of global convergence for the tridiagonal QL algorithm. SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, N5, 929-937. (PMM, 1979. 5E974).
 28. Sameh Ahmed H., Kuck David J. A parallel QR algorithm for symmetric tridiagonal matrices. "IEEE Trans. Comput.", 1977, 26, N2, 147-153. (PMM, 1977, IOBIO22).
 29. Chatelin F. Sur la convergence de l'algorithme QR pour une matric hermitienne. "Rev. franc. automat., inform., rechn. oper.", 1973, 7, NR-1, 57-61. (PMM, 1973, I2E930).
 30. Sack R.A. A fully stable rational version of the QR algorithm for tridiagonal matrices. "Numer. Math.", 1972, 18, N5, 432-441. (PMM, 1972, 8E824).
 31. Reinsch christion H. A stable, rational QR algorithm for the computation of the eigenvalues of on hermition, tridiagonal matrix. "Math. Comput.", 1971, 25, N 115, 591-597. (PMM, 1972, 2E803).
 32. Bowlder H., Martin R.S., Reinsch C., Wilkinson J.H. The QR and QL algorithm for symmetric matrices. "Grundlehren math. Wiss. Einzeldarstell.", 1971, 186, 227-240. (PMM, 1972, IBIO4I).

33. Dubrulle A., Martin R.S., Wilkinson J.H. The implicit QL algorithm. "Grundlehren math. Wiss. Einzeldarstell.", 1971, 186, 241-248. (PEM, 1972, IB1051).
34. Martin R.S., Wilkinson J.H. The implicit QL algorithm. "Numer. Math.", 1968, 12, N5, 377-388. (PEM, 1969, 8B710).
35. Reinsch C., Bauer F.L. Rational QR transformation with Newton shift for symmetric tridiagonal matrices. "Numer. Math.", 1968, 11, N3, 264-272. (PEM, 1969, 9B746).
36. Rutishauser H. The LL^T and QR methods for symmetric tridiagonal matrices. "Comput. J.", 1963, 6, N2, 133. (PEM, 1964, 5E555).
37. Ortega James M., Kaiser Henry F. The LL^T and QR methods for symmetric tridiagonal matrices. "Comput. J.", 1963, 6, N1, 99-101. (PEM, 1963, IIB71).
38. Zhang Zhenyue. A shift in QL algorithm. Numer. Math. J. Chin. Univ., 1987, 9, N1, 40-49. (PEM, 1988, IP45).
39. Huang C.P., On the convergence of the QR-algorithm with origin shifts for normal matrices IMA J. Numer. Anal., 1981, 1, N1, 127-133. (PEM, 1981, 8BII33).
40. Saad Youcef. Shifts of origin for the QR algorithm. "Inform. Process. 74." Amsterdam-London, 1974, 527-531. (PEM, 1975, 8B818).
41. Saad Youcef. Etudes des translations d'origine dans les algorithmes LR et QR. "C.R.Acad.Sci.", 1974, A278, N2, 93-96. (PEM, 1974, 7E967).
42. Dekker T.J., Traub J.F. An analysis of the shifted LR algorithm. "Numer. Math.", 1971, 17, N3, 179-188. (PEM, 1972, 2E802).
43. Dekker T.J., Traub J.F. The shifted QR algorithm for Hermitian matrices. "Linear Algebra and Appl.", 1971, 4, N2, 137-154. (PEM, 1971, IOB733).
44. Wilkinson J.H. Global convergence of tridiagonal QR algorithm with origin shifts. "Linear Algebra and Applic.", 1968, 1, N3, 409-420. (PEM, 1969, 3E581).
45. Bernstein Herbert J., Goldstein Max., Optimizing Givens' algorithm for multiprocessors. SIAM J. Sci. and Statist. Comput., 1988, 9, N3, 601-602. (PEM, 1988, IIP26).
46. Lo Sy-Shin, Philippe Bernard, Sameh Ahmed. A multiprocessor algorithm for the symmetric tridiagonal eigenvalue problem. SIAM J. Sci. and Statist. Comput., 1987, 8, N2, S155-S165. (PEM, 1987, IOB1267).
47. Bernstein H.J., Goldstein M., Parallel implementation of bisection for the calculation of eigenvalues of tridiagonal symmetric matrices. Computin, 1986, 37, N1, 85-91. (PEM, 1987, IB1038).
48. Ruggiero V. Un particolare metodo per la determinazione di auto-

- valori di matrici tridiagonali simmetriche. *Calcolo*, 1984, 21, N3, 213-227. (PMM, 1985, 8BI099).
49. Bernstein H.J. An accelerated bisection method for the calculation of eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix. *Numer. Math.*, 1984, 43, N1, 153-160. (PMM, 1984, 6BI266).
 50. Evans D.J., Shonenchi J., Rick C.C. A modified bisection algorithm for the determination of the eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix. *Numer. Math.*, 1982, 38, N3, 417-419. (PMM, 1982, 9B938).
 51. Pereyra V., Scherer G. Eigenvalues of symmetric tridiagonal matrices: a fast, accurate and reliable algorithm. "J. Inst. Math. and Appl.", 1973, 12, N2, 209-222. (PMM, 1974, 5E965).
 52. Barth W., Martin R.S., Wilkinson J.H. Calculation of the eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix by the method of bisection. "Numer. Math.," 1969, 9, N5, 386-393. (PMM, 1969, 1E749).
 53. Nolin L. Remarques sur le calcul des elements propres de certaines matrices tridiagonales. "3-e Congr. Calcul et traitement inform. AFCALMI. Toulouse, 1963". Paris, 1965, 151-155. (PMM, 1966, 4E476).
 54. Wilkinson J.H. Calculation of the eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix by the method of bisection. "Numer. Math.", 1962, 4, N4, 362-367. (PMM, 1963, 7B36).
 55. Pierce Louis. Calculation of the eigenvalues of a tridiagonal Hermitian matrix. "J. Math. Phys.", 1961, 2, N5, 740-741. (PMM, 1962, 7BI66).
 56. Ortega J.M. On Sturm sequences for tridiagonal matrices. "J. Assoc. Comput. Machinery", 1960, 7, N3, 260-263. (PMM, 1961, 10AI80).
 57. Cullum Jane, Willoughby Rolph A. A practical procedure for computing eigenvalues of large sparse nonsymmetric matrices. Large Scale Eigenvalue Probl. Proc. IBM Eur. Inst. Workshop, Oberlech, July 8-12, 1985. (PMM, 1988, 4I28).
 58. Porlett B.N.; Nour-Omid B. The use of refined error bounds when updating eigenvalues of tridiagonals. *Linear Algebra and Appl.*, 1985, 68, 179-219. (PMM, 1986, 4BI256).
 59. Poige C.C. Error analysis of the Lanczos algorithm for tridiagonalizing a symmetric matrix. "J. Inst. Math. and Appl.", 1976, 18, N3, 341-349. (PMM, 1977, 7BI050).
 60. Hari Vjeran, Veselic Kresimir. On Jacobi methods for singular value decompositions. *SIAM J. Sci. and Statist. Comput.* 1987, 8, N5, 741-754. (PMM, 1988, 3I35).
 61. Kempen H.P.M.Van. On the convergence of the classical Jacobi method for real symmetric matrices with non-distinct eigenvalues.

- "Numer. Math.", 1966, 9, N1, 11-18. (PMM, 1967, 6E76I).
62. Dongarra J.J., Sorensen D.C. On the implementation of a fully parallel algorithm for the symmetric eigenvalue problem. Proc. Coc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1986, N696, 45-53. (PMM, 1988, 7T42).
 63. Deift P., Nanda T., Tomei C. Ordinary differential equations and the symmetric eigenvalue problem. SIAM J. Numer. Anal., 1983, 20, N1, 1-22. (PMM, 1983, 9B98I).
 64. Cuppen J.J. A divide and conquer method for the Symmetric tridiagonal eigenproblem. Numer. Math., 1981, 36, N2, 177-195. (PMM, 1981, 8EII36).
 65. Potempa H. Eine Anwendung der Störungstheorie zur Eigenwertberechnung tridiagonaler Matrizen. "Angew. Inform.", 1976, 18, N1, 27-30. (PMM, 1976, 8EIO75).
 66. Gibson P.M. Eigenvalues of complex tridiagonal matrices. "Proc. Edinburgh Math. Soc.", 1971, 17, N4, 317-319. (PMM, 1972, IIEIO49).
 67. Henrici Peter. Bounds for eigenvalues of certain tridiagonal matrices. "J. Soc. Industr. and Appl. Math.", 1963, 11, N2, 281-290. (PMM, 1964, 4B620).
 68. Golub Gene H. Bounds for eigenvalues of tridiagonal symmetric matrices computed by the LR method. "Math. Comput.", 1962, 16, N80, 438-445. (PMM, 1963, 5B42).
 69. Nolin Louis. Sur l'elimination d'une valeur propre dans une matrice tridiagonale. "C.r; Acad.Sci." 1963, 256, N9, 1904-1907. (PMM, 1964, 8B596).
 70. Fox A.J., Johnson F.A. On finding the eigenvalues of real symmetric tridiagonal matrices. "Comput. J.", 1966, 9, N1, 98-105. (PMM, 1966, I2B534).
 71. Peters G., Wilkinson J.H. The calculation of specified eigenvectors by inverse iteration. "Grundlehren math. Wiss. Einzeldarstell.", 1971, 186, 418-439. (PMM, 1972, IBI044).
 72. Hirakawa Kosaburo. On the calculation of eigenvector of symmetric tridiagonal matrix. "TRU Math.", 1968, 4, 44-51. (PMM, 1970, 2B864).
 73. Wilkinson J.H. Calculation of the eigenvectors of a symmetric tridiagonal matrix by inverse iteration. "Numer. Math.", 1962, 4, N4, 368-376. (PMM, 1963, 8B46).
 74. Grossiord Dominique. Application de la methode de Laguerre on calcul des valeurs propres de matrices tridiagonales. These. Doct. math. Fac. Sci. Univ. Besancon, 1966, 136P, ill. (PMM, 1968, IOB839D)
 75. Zheng Zhao Bo, Shao Zhi an. An efficient technique for obtaining eigenvectors of a Hamiltonian in a basis of non-orthogonal orbitals. J. Phys. A. - 1988, 21, N12 - C. L633-L637. (PMM, 1989, 3I25).
 76. Barlow R.H., Evans D.J., Shanehchi J. Parallel multisection for

- the determination of the eigenvalues of symmetric quindagonal matrices. Inf. Process. Lett., 1982, 14, N3, 117-118. (PEM, 1982, IIBII01).
77. Sentance W.A., Cliff I.P. The determination of eigenvalues of Symmetric quindagonal matrices. Comput. J., 1981, 24, N2, 177-179. (PEM, 1981, IIBIO45).
 78. Katai I., Rahmv E., Computation of the eigensvsten of symmetric five diagonal toeplitz matrices. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. Computator., 1978, 1, 9-17. (PEM, 1980, 4BIII5).
 79. Evans D.J., Rick C.C. The numerical calculation of the eigenvalues and eigenvectors of a symmetric sparse quindagonal matrix. Int. J. Comput. Math., 1979, 7, N2, 141-159. (PEM, 1979, 9E98E)
 80. Evans David J. Computation of eigenvalues and eigenvector of a symmetric quindagonal matrix. J. Comput. and Appl. Math., 1977, 3, N2, 131-141. (PEM, 1978, 4E686).
 81. Evans D.J. A recursive algorithm for determining the eigenvalues of a quindagonal matrix. "Comput. J.", 1975, 18, N1, 71-73. (PEM, 1976, 6E895).
 82. Kim Hyong M., Craig Roy R. Structural dynamics analysis using an unsymmetric block Lanczos algorithm. Int. J. Numer. Meth. Eng. - 1988 - 26, N10.- C. 2305-2318. (PEM, 1989, 3F26).
 83. Yamamoto T. On lanczos' algorithm for tri-diagonalization. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 1968, 32, N2, 259-284. (PEM, 1969, IIB650)
 84. Datta B.N., An algorithm to assign eigenvalues in a Hessenberg matrix: Single input case. IEEE Trans. Autom. Contr., 1987, 32, N5, 414-417. (PEM, 1988, IF39).
 85. Murdoch P., Shriba S. Eigenvalue assignment in an upper Hessenberg matrix. Int. J. Contr., 1985, 41, N2, 493-497. (PEM, 1985, IIBI302)
 86. Martin R.S., Peters G., Wilkinson J.H. The QR algorithm for real Hessenberg matrices. "Grundlehren math. Wiss. Einzeldarstell. , 1971, 186, 359-371. (PEM, 1972, IBI043).
 87. Lebaud C. L'algorithme double QR avec "Shift". "Numer. Math.", 1970. 16, N2, 163-180. (PEM, 1971, 5E989).
 88. Martin R.S., Wilkinson J.H. The modified LR algorithm for complex Hessenberg matrices. "Numer. Math.", 1968, 12, N5, 369-376. (PEM, 1969, 8E7I3).
 89. Martin R.S., Reinsch C., Wilkinson J.H. The QR algorithm for hand symmetric matrices. "Numer. Math.", 1970, 16, N2, 85-92. (PEM, 1971, 4E866).
 90. Sen Syamal Kumar. The RL algorithm for finding eigenvalues of a

- matrix. "J. Indian Inst. Sci.", 1970. 52, N2-3, 105-111.
(РЖМ, 1971, 5Б987).
91. Lebaud C. Remarques sur la convergence de la methode Q.R. "Rev. franc. inform. et rech. operat.", 1968, 2, N13, 105-112.
(РЖМ, 1969, 10Б607).
92. Кублановская В.Н. Приведение произвольной матрицы к трехдиагональному виду. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1964, 4, №3, 544.
93. Зубатенко В.С. Приведение симметричных и ленточных симметричных матриц к трехдиагональному виду. В сб. "Машины для инж. расчетов. Вып. 5", Киев. 1972, 82-86. (РЖМ, 1972, 10Б606).
94. Зубатенко В.С. Приведение ленточных симметричных матриц к трехдиагональному виду. В сб. "Машины для инж. расчетов. Вып. 5", Киев, 1972.
95. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-451, 1988. (РЖМ, 1989, 3Г23).
96. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-452, 1988. (РЖМ, 1989, 2Г30).
97. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-453, 1988. (РЖМ, 1989, 4Г36).
98. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-736, 1988. (РЖМ, 1989, 5Г27).
99. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-787, 1988.
100. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-920, 1988.
101. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, Дубна, РИИ-88-921, 1988.
102. Конокова Т.Я., Кублановская В.Н. Двухсторонние приближения в алгоритме. "Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Мат. ин-т АН СССР", 1976, 58.
103. Иордан В.И. Сравнение некоторых алгоритмов диагонализации трехдиагональных симметрических матриц. Алт. политехн. ин-т. Барнаул, 1988. 26с.
104. Воеводин В.В., Ким Г.Д., Агафонова З.И. О сходимости QR-алгоритма со сдвигом. "Числ. анализ на ФОРТРАНе", Вып. 14. М., Моск. ун-т, 1976, 5-13.
105. Воеводин В.В., Волович В.М. Решение полной проблемы собственных значений для симметричной трехдиагональной матрицы методами бисекций и обратной итерации. "Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1974, 22.
106. Иордан В.И. Новые алгоритмы диагонализации трехдиагональных симметрических матриц. Алт. политехн. ин-т. Барнаул, 1984, 16с.
107. Гулин А.В., Яковлева С.А. О модифицированном методе парабол для нахождения собственных значений трехдиагональной матрицы с нелинейным вхождением спектрального параметра. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1987, №191, 1-21. (РЖМ, 1988, 2Г23).
108. Митченко А.В. Исчерпывание трехдиагональных симметрических и двухдиагональных матриц с гарантированной оценкой точности. Вычисл. процессы и системы, 1987, №5, 93-100. (РЖМ, 1987, 12Б1053).
109. Митченко А.В. Алгоритм исчерпывания трехдиагональных симметрических и двухдиагональных матриц с гарантированной оценкой точности. Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. Препр. 1985, 6, 110-161. (РЖМ, 1986, 4Б1257).
110. Митченко А.Д. Учет вычислительных погрешностей в алгоритме исчерпывания симметрической трехдиагональной матрицы. Ин-т мат. СО АН СССР.

- I32. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., Машиностроение, 1976.
- I33. Р.Н.Федорова, А.И.Широкова. Библиотека программ на ФОРТРАНе, Т.УІ. Описания программ, ОИЯИ, РІІ-83-620, Дубна, 1983.
- I34. Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов, ОИЯИ, РІІ-88-786, РІІ-88-599, Дубна, 1988.
- I35. Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов, ОИЯИ, РІІ-89-203, Дубна, 1989.
- I36. Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов, ОИЯИ, РІІ-87-533, РІІ-87-524, Дубна, 1987.
- I37. Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов, ОИЯИ, РІІ-86-504, Дубна, 1986.
- I38. Г.А.Емельяненко, ОИЯИ, РІІ-85-531, Дубна, 1986.
- I39. Г.А.Емельяненко, ОИЯИ, РІІ-85-304, РІІ-85-489, Дубна, 1985.
- I40. Г.А.Емельяненко, ОИЯИ, РІІ-6933, Дубна, 1973.
- I41. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений, М., Наука, 1978.
- I42. Г.И.Марчук, В.Е.Колесов. Применение численных методов для расчета нейтронных сечений. Атомиздат.М., 1970.
- I43. В.П.Ильин. Численные методы решения задач электрофизики. М., Наука, 1985.
- I44. Ю.А.Будагов, Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов, А.И.Мачавариани, ОИЯИ, РІО-9950, Дубна, 1976.
- I45. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы. М., Наука, 1989.
- I46. Воеводин В.В., Волович В.М., Вып. з.м., Моск. ун-т, 1973, ІІ4-І4І.
- I47. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, РІІ-89-543, Дубна, 1989.
- I48. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, РІІ-89-544, Дубна, 1989.
- I49. Емельяненко, Т.Т.Рахмонов, ОИЯИ, РІІ-89-340, Дубна, 1989.