

СЗ450

А-883

Б1-11-10427.

2524

77



Дымников А.Д.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б 1-11-10427

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 19

77

Б1-11-10427

А.Д. Дымников

МАТРИЧНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

8 .. *опель* 77

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемые лекции посвящены последовательному применению методов матричной алгебры и теории дифференциальных уравнений для описания динамики заряженных частиц в системах управления пучками. Под системой управления пучками понимается совокупность различных устройств /элементов системы/, создающих электрическое и магнитное поля, включая дрейфовые промежутки. Возможности управления пучком определяются различными сочетаниями этих устройств, законами и пределами изменения поля в каждом из них.

В последние годы методы матричной алгебры все более внедряются в прикладные науки, что, повидимому, связано с рядом следующих обстоятельств. Матричная форма записи придает компактный и ясный вид громоздким и сложным выражениям. Являясь унифицированной, она облегчает использование результатов, полученных в одной области науки, для аналогичных по математической постановке задач из другой области. Использование матриц делает возможным чаще отвечать на вопрос, частным случаем чего является полученный результат. Весьма важным представляется то обстоятельство, что аппарат матричной алгебры хорошо приспособлен для расчетов на ЭВМ.

Современные методы расчета транспортировки и фокусировки заряженных частиц используют матрицы перехода, которые сопоставляются тому или иному элементу системы управления. При этом предполагается, что поле /или градиент поля/ в данном элементе вдоль оси системы /или осевой траектории/ не меняется.

Представляется целесообразным вводить матричные методы, начиная с записи в матричной форме уравнений движения частиц и уравнений Максвелла. Линеаризуя уравнения движения, получим в матричном виде систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых характеризуют распределение поля или его градиента вдоль опорной /осевой/ траектории. Линеаризация уравнений Максвелла даст в общем случае восемь линейных ограничений в виде равенств, налагаемых на коэффициенты уравнений движения.

Задачу синтеза системы управления в линейном приближении можно понимать как следующую задачу оптимального управления пучком. Требуется минимизировать или максимизировать некоторую функцию, называемую целевой функцией, которая определяется требованиями к пучку или к системе управления. В качестве переменных, по которым происходит оптимизация, являются дискретные значения поля /или его градиента/ вдоль осевой траектории. На переменные налагаются ограничения в виде равенств, вытекающие из уравнений Максвелла, и ограничения в виде неравенств, определяемые конкретной конструкцией элементов системы управления.

Чтобы решать задачу оптимального управления пучком, нужно иметь эффективные методы решения задачи транспортировки пучка, то-есть, решения уравнений движения. Последняя задача имеет и большое самостоятельное значение. Для произвольного распределения поля /или его градиента/ вдоль оси уравнения движения необходимо решать тем или иным численным методом, например, одним из методов Рунге-Кутты или методов прогноза и коррекции. Можно решать их рекурсивными методами /методами челнок-сумм/, предложенными автором. Последние излагаются в данных лекциях.

Отметим, что как точные, так и линеаризованные уравнения движения всегда можно записать для такого фазового пространства, в котором фазовый объем, занимаемый множеством частиц, в течение движения не меняется. Рекурсивные методы интегрирования от методов Рунге-Кутты или методов прогноза или коррекции отличается как раз то обстоятельство, что фазовый объем остается строго постоянным на каждом шаге приближенного интегрирования.

Поясним, что такое рекурсия. Если имеется последовательность операций, и каждая последующая операция выражается через ряд предшествующих, то будем говорить, что имеем дело с рекурсивной операцией.

Рекурсивные методы родились из анализа ряда физических процессов в таких областях, как стеклянная и электронная оптика, голография, теория цепей, каждый из которых можно описать с помощью аппарата скобок Гаусса. Отсюда возникли методы интегрирования систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка на основе скобок Гаусса. Дальнейшее обобщение последних привело к появлению аппарата челнок-сумм. Здесь уместно вспомнить следующие замечательные слова П.И. Лобачевского из его речи "О важнейших предметах воспитания":

" Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на все вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно."

Рекурсивные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений соответствуют моделированию исследуемого реального непрерывного процесса реальным дискретным процессом, а не следуют из той или иной разностной схемы, соответствующей системе дифференциальных уравнений, описывающей данный процесс. Так, например, представление толстой линзы в виде двух тонких линз, разделенных дрейфовым пространством, является примером подобного моделирования. Поэтому методы интегрирования с помощью аппарата челнок-сумм можно назвать также физическими методами интегрирования. Рекурсивные методы можно использовать и для аналитического решения дифференциальных уравнений в тех случаях, когда такое решение существует.

Материал лекций состоит из пяти глав и Приложения.

В первой главе рассматривается понятие кортежа - множества, на котором строятся рекурсивные операции челнок-суммирования. Аппарат челнок-сумм необходим для понимания рекурсивных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Во второй главе сообщаются некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений, необходимые для практических приложений. Используется понятие матрицанта /нормированной фундаментальной системы решений/, для нахождения которого предлагаются алгоритмы на основе аппарата челнок-сумм. Показано, что вычисление матрицанта с переменным определителем всегда может быть сведено к вычислению матрицанта с постоянным /единичным/ определителем.

В третьей главе содержится материал, необходимый для матричного подхода к рассмотрению движения частиц в криволинейной системе координат.

В четвертой главе в матричном виде записываются уравнения движения частиц Ньютона-Эйнштейна и уравнения Максвелла как в декартовой, так и в криволинейной системах координат. Полученные уравнения линеаризуются в окрестности опорной /осевой/ траектории.

В пятой главе собраны основные результаты по теории огибающих семейства решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

для общего случая нецентрального фазового портрета. Показано, что для периодических систем, описываемых каноническими системами линейных дифференциальных уравнений, уравнением границы области устойчивости в пространстве параметров служит равенство нулю определителя некоторой матрицы, определяемой структурой периода.

В Приложении приведен алгоритм программы решения системы линейных дифференциальных уравнений на основе рекурсивного метода.

Изложение во всех главах ведется таким образом, чтобы читатель мог не обращаться к дополнительным литературным источникам. В конце лекций представлена весьма краткая библиография, относящаяся к математическим методам, используемым в тексте лекций.

Автор

Г Л А В А 1.

МАТРИЦЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ОПЕРАЦИИ

§ 1. Линейные и матричные кортежи

1.1. Введение. Как известно, если имеется упорядоченная последовательность n элементов a_1, a_2, \dots, a_n (чисел или элементов иной природы), то их сумму принято записывать в виде

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv \sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_1^n \quad (1.1)$$

можно говорить о сумме первых k элементов последовательности ($1 \leq k \leq n$):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \equiv \sum_{i=1}^k a_i \equiv \sum_1^k \quad (1.2)$$

Сумму \sum_1^{k-j} ($j=1, 2, \dots, k-1$) будем называть j -ой предшествующей суммой для суммы \sum_1^k .

Сумму первых k элементов можно записать и иначе, или использовать рекуррентное соотношение между суммами \sum_1^k и \sum_1^{k-1} , а именно

$$\sum_1^k \equiv a_k + \sum_1^{k-1}, \quad \sum_1^0 \equiv 0. \quad (1.3)$$

для того, чтобы получить сумму \sum_1^k , необходимо знать предшествующую исходную сумму. Исходной суммой может служить сумма \sum_1^0 — сумма из 0 элементов, которую естественно положить равной 0.

нулю. Последнюю запись для \sum_1^k обычно называют рекуррентной или рекурсивной. В дальнейшем операцию над K элементами, которая определяется через предшествующие операции над $K-1$, $K-2$, ..., $K-\beta$ элементами, будем называть рекурсивной операцией порядка β . Будем различать следующие рекурсивные операции:

а) билинейная рекурсивная операция - операция, линейная относительно элементов последовательности и линейная относительно предшествующих операций;

б) линейная рекурсивная операция - операция, линейная относительно предшествующих операций,

в) нелинейная рекурсивная операция - операция, не удовлетворяющая условиям а) или б).

Сумма \sum_1^k является, например, билинейной рекурсивной операцией. Примером линейной рекурсивной операции порядка 2 может служить операция

$$\sum_1^m \equiv a_m \cdot \sum_1^{m-1} + \sum_1^{m-2}, \quad \sum_1^0 = 1, \quad \sum_1^{-1} = 0, \quad (1.4)$$

которая в геометрической оптике определяет так называемые скобки Гаусса. Запишем результат этой операции для $m=1, 2, 3, 4$.

$$\sum_1^1 = a_1 \cdot \sum_1^0 + \sum_1^{-1} = a_1,$$

$$\sum_1^2 = a_2 \cdot \sum_1^1 + \sum_1^0 = a_2 a_1 + 1,$$

$$\sum_1^3 = a_3 \cdot \sum_1^2 + \sum_1^1 = a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1,$$

$$\sum_1^4 = a_4 \cdot \sum_1^3 + \sum_1^2 = a_4 a_3 a_2 a_1 + a_4 a_3 + a_2 a_1 + 1.$$

Легко видеть, что операция (1.4), являясь линейной относительно предшествующих операций, не является линейной относительно элементов a_1, a_2, \dots, a_n .

1.2. Линейный кортеж. При определении рекурсивных операций имеют дело с упорядоченными множествами, именуемыми кортежами. Упорядоченную последовательность элементов a_k, a_{k+1}, \dots, a_m будем в дальнейшем называть линейным (или одномерным) кортежем, а число элементов последовательности будем именовать длиной кортежа.

Линейный кортеж длины S , первый элемент которого есть a_k , второй — a_{k+1} , S -ый, последний, элемент — a_m , где $m-k+1 = S$, будем обозначать через

$$\langle a_k, a_{k+1}, \dots, a_m \rangle = \langle a_k^m \rangle. \quad (1.5)$$

Элементами линейных кортежей могут быть любые "понятные" объекты, в том числе — множества и сами линейные кортежи. Существенно подчеркнуть, что:

1) элементы линейного кортежа стоят на определенных местах, причем указано, какое место является первым, какое вторым и т.д;

2) элементы, стоящие на разных местах, могут совпадать.

Будем говорить также о пустом линейной кортеже $\langle a_k^{k-1} \rangle$, или кортеже нулевой длины. Таким образом, длиной кортежа может быть любое целое неотрицательное число.

Условимся говорить также о бесконечном линейной кортеже (кортеже бесконечной длины), если число элементов кортежа неограничено, и обозначать его $\langle a_{-\infty}^{\infty} \rangle$.

Условимся считать, что кортежи $\langle a_k^m \rangle$ и $\langle b_k^m \rangle$ равны,

если оба кортежа имеют одинаковую длину и $a_j = b_j$ ($j = k, k+1, \dots, m$).

Кортеж $\langle a_k^m \rangle$ называется линейным кортежем над множеством M , если каждый элемент такого кортежа принадлежит M , т.е. $a_j \in M$, $j = k, k+1, \dots, m$; в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими множествами M , которые являются ассоциативными кольцами.

1.3. Бинарные операции. Кольцо. Напомним, что такое кольцо. Точное определение этого объекта связано с понятием бинарной операции.

Рассмотрим произвольное множество M . Будем говорить, что на нем определена бинарная операция, если установлено правило, по которому любым двум элементам a и b из M ставится в соответствие третий элемент c того же множества M .

Кольцо - это множество M с совокупностью двух специфических бинарных операций. Одну из них принято называть (абстрактным) сложением и обозначать элемент, сопоставляемый паре (a, b) , через $a + b$, при этом к сложению предъявляются следующие требования:

Сложение должно быть коммутативным и ассоциативным, то есть для всех пар (a, b) и для троек (a, b, c) элементов из M должны иметь место равенства:

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) в множестве M должен существовать такой элемент 0 , что $a + 0 = a$ при всех a из M ; этот элемент 0 принято называть нулем;

4) для каждого a из M должен существовать такой элемент c из M , что $a + c = 0$; элемент c называют :

противоположным элементу a и часто обозначают через $-a$ ($c = -a$).

Другую операцию принято называть (абстрактным) умножением и обозначать элемент, сопоставляемый паре (a, b) , через $a \cdot b$. От умножения требуется лишь одно: оно должно быть дистрибутивно связано со сложением, то есть для любых a, b и c из M должны иметь место равенства

$$5a) \quad a(b+c) = ab + ac;$$

$$5б) \quad (b+c)a = ba + ca.$$

К операции (абстрактного) умножения иногда предъявляют и иные требования:

6) умножение коммутативно, то есть $ab = ba$ при всех a и b ;

7) умножение ассоциативно, то есть $(ab)c = a(bc)$ при всех a, b, c ;

8) в кольце существуют такие элементы, называемые левой

$\langle I|$ и правой $|I\rangle$ единицами, что

$$a \cdot |I\rangle = \langle I| \cdot a \quad \text{для всех } a.$$

Если кольцо M удовлетворяет условию 6), то его называют коммутативным; если оно удовлетворяет условию 7), то его называют ассоциативным; наконец, если M удовлетворяет условию 8), то говорят, что M обладает как правой $|I\rangle$, так и левой $\langle I|$ мультипликативными единицами.

Примеры множества всех целых чисел, множества всех рациональных чисел, множества всех полиномов с вещественными коэффициентами — это примеры колец коммутативных, ассоциативных и обладающих как левой, так и правой единицей, причем $\langle I| = |I\rangle = I$. Примером ассоциативных колец с единицей служит множество квадратных матриц.

Ассоциативные кольца с единицей будем обозначать буквой K . Мы, как правило, будем использовать кортежи над кольцами K .

1.4. Матричный кортеж. Множества, состоящие из β линейных кортежей одинаковой длины ℓ , будем называть матричным (или двумерным) кортежем ширины β и длины ℓ и обозначать через

$$\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle,$$

где $m - \kappa + 1 = \ell$, κ - индекс первого элемента в линейном кортеже, m - индекс последнего элемента.

Элементы матричного кортежа будем обозначать малыми латинскими буквами с двумя индексами внизу - $a_{\tau s}$, где левый индекс τ означает порядковый номер элемента в линейном кортеже, а правый индекс s равен разности между номером τ данного элемента в линейном кортеже и номером самого линейного кортежа i , то есть $s = \tau - i$, $i = 1, 2, \dots, \beta$.

Таким образом, если элемент $a_{\tau, \tau-i}$ принадлежит матричному кортежу $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$,

$$a_{\tau, \tau-i} \in \langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle,$$

то это означает, что индекс τ пробегает значения от κ до m , а индекс i - от 1 до β ,

$$\tau \in \{\kappa, m\}, \quad i \in \{1, \beta\}.$$

Заметим, что среди элементов матричного кортежа могут быть элементы, тождественно равные друг другу.

Два матричных кортежа одинаковой длины и ширины будем считать равными, если каждый из линейных кортежей, составляющих

первый матричный кортеж, равен соответствующему линейному кортежу, входящему во второй матричный кортеж.

Матричный кортеж, в котором все β линейных кортежей имеют неограниченную длину, будем называть бесконечным матричным кортежем и обозначать его через $\langle A_{-\infty}^m \rangle$.

Пусть имеется матричный кортеж $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$. образуем из элементов кортежа $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$, нулей и единиц бесконечный кортеж с элементами $\bar{a}_{z, z-i}$, $-\infty < z < \infty$, $i = 1, 2, \dots, \beta$, в виде

$$\begin{aligned} \bar{a}_{z, z-i} &= a_{z, z-i}, & z \in \{\kappa, m\}, & i \in \{1, \beta\}. \\ \bar{a}_{z, z-i} &= \delta(i, \beta), & z < \kappa, & z > m. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\delta(i, \beta)$ - символ Кронекера, означающий

$$\begin{aligned} \delta(\beta, \beta) &= I, \\ \delta(i, \beta) &= 0, \quad i \neq \beta. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Бесконечный кортеж с элементами в виде (1.6) будем называть расширенным кортежем для кортежа $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$ и обозначать его через

$$\langle \bar{A}_{\kappa, \beta}^m \rangle.$$

Теперь, когда введены понятия линейных и матричных кортежей, перейдем к определению рекурсивных операций на кортежах, учитывая, что элементы кортежей принадлежат ассоциативному кольцу с единицей K .

§ 2. Линейные рекурсивные операции.

2.1. Линейные челнок-суммы матричного кортежа. Пусть имеется матричный кортеж $\langle A_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle$ и соответствующий ему расширенный кортеж $\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle$. Определим на расширенном (бесконечном) матричном кортеже линейные рекурсивные операции, называемые нами линейным челнок-сложением или линейным челнок-суммированием. Будем различать левое челнок-сложение и правое челнок-сложение.

Результат операции левого линейного челнок-сложения назовем левой линейной челнок-суммой матричного кортежа $\langle A_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle$ от k до m и обозначим ее через

$$\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^m \rangle$$

где последняя определяется следующим образом:

$$\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^m \rangle \equiv \sum_{i=1}^{\beta} \bar{a}_{m-\beta+2, m-\beta+2-i} \cdot \langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^{m-i} \rangle \quad (2.1)$$

$$\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^{k-1-i} \rangle \equiv \delta(i, \beta). \quad (2.2)$$

Элементы кортежа в левой челнок-сумме умножаются на предшествующие челнок-суммы слева. Выражение (2.2) определяет первые β начальные челнок-суммы, необходимые для записи любой последующей челнок-суммы.

Результат операции правого линейного челнок-сложения назовем правой линейной челнок-суммой матричного кортежа $\langle A_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle$

от k до m и обозначим ее через

$$|\bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^m,$$

где последняя определяется в виде

$$|\bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^m \equiv \sum_{i=1}^{\beta} |\bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^{m-i} \cdot \bar{a}_{m-\beta+2, m-\beta+2-i}, \quad (2.3)$$

$$|\bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^{k-1-i} \equiv \delta(i, \beta). \quad (2.4)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями Эйнштейна для сумм. Напомним, что при этих обозначениях, когда буквенный индекс появляется дважды в одном и том же произведении, автоматически следует понимать, что производится суммирование по этому индексу. Индекс, по которому происходит суммирование, называется немой индексом, и его можно заменить любым другим индексом. Немой индекс мы будем обозначать малыми латинскими буквами. Если из изложения не ясно и требуется уточнить, какие значения пробегает индекс суммирования, значения этого индекса заключаем в круглые скобки, как, например,

$$\sum_{i=1}^{\beta} a_i b_i \equiv a_i b_i \quad (i=1, 2, \dots, \beta). \quad (2.5)$$

Если же встречается дважды греческий индекс, то суммирование по нему не производится. Если нужно уточнить, какие значения может пробегать греческий индекс, заключаем его значения в угловые скобки. Например, выражение

$$a_{\alpha} b_{\alpha} \quad \langle \alpha = 1, 2, \dots, \beta \rangle$$

означает одно из слагаемых (с индексом α) суммы (2.5).

В обозначениях Эйнштейна левая и правая челнок-суммы матричных кортежей запишутся в виде

$$\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^m \equiv \bar{a}_{m-\beta+2, m-\beta+2-i} \langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^{m-i}, \quad \langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^{k-1-i} \equiv \delta(i, \beta). \quad (2.6)$$

$$| \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^m \equiv | \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^{m-i} \cdot \bar{a}_{m-\beta+2, m-\beta+2-i}, \quad | \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^{k-1-i} \equiv \delta(i, \beta). \quad (2.7)$$

Число β , которое равно ширине матричного кортежа в определении челнок-суммы, будем называть ее порядком.

Там, где это не может привести к путанице, будем сокращенно обозначать левые и правые челнок-суммы в виде

$$\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_k^m \equiv S_k^m, \quad (2.8)$$

$$| \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_k^m \equiv S_k^{\gamma m}. \quad (2.9)$$

В качестве примера запишем некоторые челнок-суммы.

1. $\gamma = 3, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4.$

$$S_3^2 = I.$$

$$S_3^3 = \bar{a}_{10} S_3^2 + \bar{a}_{1,-1} S_3^1 + \bar{a}_{1,-2} S_3^0 + \bar{a}_{1,-3} S_3^{-1} = \bar{a}_{10} = 0.$$

$$S_3^4 = \bar{a}_{21} S_3^3 + \bar{a}_{20} S_3^2 + \bar{a}_{2,-1} S_3^1 + \bar{a}_{2,-2} S_3^0 = a_{20}.$$

$$S_3^5 = a_{32} a_{20} + a_{30}.$$

2. $\underline{\gamma = 5, \alpha = 2, \beta = 4.}$

$$S_3^6 = a_{43} a_{32} a_{20} + a_{43} a_{30} + a_{42} a_{20} + a_{40}.$$

$$\overset{\vee}{S}_3^6 = a_{20} a_{32} a_{43} + a_{30} a_{43} + a_{20} a_{42} + a_{40}.$$

3. $\underline{\gamma = 4, \alpha = 1, \beta = 4.}$

$$S_4^5 = a_{32} a_{21} a_{1,-3} + a_{31} a_{1,-3}.$$

$$\overset{\vee}{S}_4^5 = a_{1,-3} a_{21} a_{32} + a_{1,-3} a_{31}.$$

Упражнение 1.1. Показать, что для матричного кортежа $\langle A_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle$ над коммутативным кольцом K левая челнок-сумма равна правой челнок-сумме с теми же индексами

$$\langle \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} | S_K^m \equiv | \bar{A}_{\alpha, \beta}^{\gamma} \rangle S_K^m. \quad (2.10)$$

Для челнок-сумм матричного кортежа порядка 2, в котором все элементы второго линейного кортежа равны 1, в элементах первого линейного кортежа будем опускать второй индекс. Поскольку такие челнок-суммы весьма часто встречаются в приложениях, введем для них отдельные обозначения

$$\langle \bar{A}_{1,2}^m | S_K^m \equiv F_K^m, \quad \bar{a}_{2,2-2} = I. \quad (2.11)$$

$$| \bar{A}_{1,2}^m \rangle S_K^m \equiv \overset{\vee}{F}_K^m, \quad \bar{a}_{2,2-2} = I. \quad (2.12)$$

Определение для таких челнок-сумм второго порядка можно записать в виде

$$F_{\kappa}^m = a_m \cdot F_{\kappa}^{m-1} + F_{\kappa}^{m-2}, \quad F_{\kappa}^{k-1} = I, \quad F_{\kappa}^{k-2} = 0. \quad (2.13)$$

$$F_{\kappa}^{\vee m} = F_{\kappa}^{\vee m-1} \cdot a_m + F_{\kappa}^{\vee m-2}, \quad F_{\kappa}^{\vee k-1} = I, \quad F_{\kappa}^{\vee k-2} = 0. \quad (2.14)$$

Челнок-суммы имеют различные приложения. В частности, с их помощью удобно интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения как аналитически, так и численно.

§ 3. Векторы и матрицы.

3.1. Арифметические и геометрические векторы.

Набор из n чисел из n -мерного арифметического пространства называется n -мерным арифметическим вектором и записывается либо в виде столбца

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

либо в виде строки

$$\tilde{X} \equiv \left\| x_1, x_2, \dots, x_n \right\|. \quad (3.2)$$

Пусть имеется n -мерное геометрическое пространство. Как известно, геометрическим вектором называется направленный отрезок, соединяющий две заданные точки - начало и конец вектора. Пусть через некоторую точку геометрического пространства проходит n различных прямых, и из этой точки по каждой из прямых направлено по одному вектору. Такой набор геометрических векторов будем также записывать в виде столбца

$$\vec{a} \equiv \left\| \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{array} \right\| \quad (3.3)$$

и в виде строки

$$\vec{a} \equiv \left\| \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \right\| \quad (3.4)$$

Аналогично, набор из n квадратных матриц одного и того же порядка будем записывать как в виде столбца

$$\vec{B} \equiv \left\| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{array} \right\|, \quad (3.5)$$

так и в виде строки

$$\vec{B} \equiv \left\| B_1, B_2, \dots, B_n \right\|. \quad (3.6)$$

В дальнейшем будем использовать следующие наименования:
 x - числовой вектор, \tilde{x} - транспонированный числовой вектор, \vec{a} - векторный вектор, $\tilde{\vec{a}}$ - транспонированный векторный вектор, \vec{B} - матричный вектор, $\tilde{\vec{B}}$ - транспонированный матричный вектор. Составляющие таких векторов будем называть компонентами, а составляющие матриц - матричными элементами.

Заметим, что произведение $\tilde{x}y$ дает число

$$\tilde{x}y = x_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.7)$$

а произведение $x\tilde{y}$ - матрицу порядка $n \times n$, элементы

$\|x \tilde{y}\|_{jk}$ которой определяются в виде

$$\|x \tilde{y}\|_{jk} = x_j y_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.8)$$

Аналогично, произведение $\tilde{a} \tilde{b}$ дает число

$$\tilde{a} \tilde{b} = a_i b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.9)$$

а произведение $\tilde{a} \tilde{b}$ - матрицу порядка $n \times n$, матричные элементы $\|\tilde{a} \tilde{b}\|_{jk}$ которой записываются в виде

$$\|\tilde{a} \tilde{b}\|_{jk} = a_j b_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.10)$$

Что касается матричных векторов, составляющими которых являются матрицы $\beta \times \beta$, то произведение $\tilde{b} \tilde{c}$ дает матрицу порядка $\beta \times \beta$

$$\tilde{b} \tilde{c} = b_i c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.11)$$

а произведение $\vec{b} \vec{c}$ - матрицу порядка $\beta n \times \beta n$, состоящую из n^2 матричных блоков $\beta \times \beta$, причем $\beta \times \beta$ матрица-блок с индексами j и k имеет вид

$$\|\vec{b} \vec{c}\|_{jk} = B_j C_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.12)$$

В выражениях (3.7), (3.9), (3.11) мы использовали обозначения Эйнштейна для сумм, то есть индекс i является немым индексом суммирования.

Набор геометрических попарноортогональных векторов единичной длины $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_n$ называется ортонормированным репером (или ортонормированным базисом). Очевидно, что для ортонормированного репера выполняется условие

$$\vec{i} \vec{i}^T = I_n, \quad (3.13)$$

где I_n - единичная $n \times n$ матрица.

Выбором в n -мерном пространстве R^n систему координат, ортами которой являются компоненты ортонормированного репера \vec{i} . Тогда проекции компонент репера \vec{i} на оси координат составят единичные числовые векторы $i(\lambda)$, где

$$i(1) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i(2) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad i(n) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Иначе определение (3.14) можно записать в виде

$$i_j(k) \equiv \delta(j, k), \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.15)$$

Набор единичных векторов (3.14) носит название естественного (или канонического) базиса.

Пусть имеется произвольный геометрический вектор \vec{a} , проекции которого на оси выбранной нами системы координат образуют числовой вектор a . Тогда для геометрического вектора \vec{a} можно записать

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot a = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \dots + \vec{i}_n a_n. \quad (3.16)$$

$$\vec{a} = \tilde{a} \vec{i} = a_1 \vec{i}_1 + a_2 \vec{i}_2 + \dots + a_n \vec{i}_n. \quad (3.17)$$

Введем единичную матрицу ($n \times n$) рождения $I_n(\lambda)$:

$$I_{i_k}(\lambda) \equiv \delta(i, k) \delta(i, \lambda), \quad \langle i, k, \lambda = 1, 2, \dots, n \rangle. \quad (3.18)$$

и единичную матрицу уничтожения $I_n(\lambda)$:

$$I_{ik}(\lambda) \equiv \delta(i,k) \cdot (1 - \delta(i,\lambda)), \quad \langle i, k, \lambda = 1, 2, \dots, n \rangle. \quad (3.19)$$

Очевидно, что

$$I = I(\lambda) + I(\lambda). \quad (3.20)$$

Введем также векторы $x(\lambda)$ и $x(\lambda)$, получаемые из вектора x с помощью матриц рождения и уничтожения

$$x(\lambda) = I(\lambda) \cdot x, \quad (3.21)$$

$$x(\lambda) = I(\lambda) \cdot x, \quad (3.22)$$

Сумма которых равна вектору x .

$$x(\lambda) + x(\lambda) = x. \quad (3.23)$$

В таких случаях, когда нужно указать порядок единичной $n \times n$ матрицы и нулевой $n \times n$ матрицы, будем соответственно писать I_n и O_{nn} . Нулевой n -мерный числовой вектор будем записывать в виде O_n . Определитель матрицы B порядка $\beta \times \beta$ будем писать в виде $|B|$, либо в виде $\text{Det } B_{ik}$, а след матрицы B будем обозначать либо через $\langle B \rangle$, либо через $\text{Sp } B$.

$$\langle B \rangle \equiv \text{Sp } B \equiv \sum_{i=1}^{\beta} B_{ii}. \quad (3.24)$$

Любую степень матрицы B выше второй можно выразить через первые две степени матрицы B и единичную I по формуле Гамильтона-Кэли

$$B^3 = \langle B \rangle B^2 - \frac{1}{2} [\langle B \rangle^2 - \langle B^2 \rangle] B + |B| I. \quad (3.25)$$

3.2. Собственные векторы и собственные значения матриц. Как известно, всякий нулевой числовой вектор x называется собственным вектором матрицы B , если найдется такое число λ , что будет выполняться равенство

$$Bx = \lambda x. \quad (3.26)$$

Число λ в таком случае называется собственным значением матрицы B , соответствующим собственному вектору x .

Уравнение

$$|B - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = \Delta(\lambda) = 0, \quad (3.27)$$

где n - порядок квадратной матрицы B , называется характеристическим уравнением матрицы B . Корни характеристического уравнения являются собственными значениями матрицы B .

Существует теорема Гамильтона-Кэли, которая гласит, что всякая квадратная матрица B удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть

$$\Delta(B) = (-1)^n \cdot B^n + \alpha_{n-1} \cdot B^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot B^{n-2} + \dots + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0. \quad (3.28)$$

3.3. Векторная матрица. Возьмем трехмерные векторы

$$a = \left\| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\|, \quad b = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\|, \quad (3.29)$$

и составим из них матрицы $P(a)$ и $P(a, b)$ следующим образом

$$P(a) \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} \equiv -\tilde{P}(a) \equiv -P(-a). \quad (3.30)$$

$$P(a, b) \equiv \begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 & b_1 \\ -a_3 & 0 & a_1 & b_2 \\ a_2 & -a_1 & 0 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} P(a) & b \\ \tilde{b} & 0 \end{vmatrix} \equiv -P(-a, -b). \quad (3.31)$$

Такие матрицы будем соответственно называть векторной матрицей от вектора a и векторной матрицей от векторов a и b .

Упражнение 3.1. Показать, что определители матриц $P(a)$ и $P(a, b)$ равны соответственно:

$$|P(a)| = 0, \quad (3.32)$$

$$|P(a, b)| = -(\tilde{a}b)^2 = -(\tilde{b}a)^2. \quad (3.33)$$

Упражнение 3.2. Показать, что характеристические уравнения матриц $P(a)$ и $P(a, b)$ имеют вид

$$|P(a) - \lambda I_3| = -\lambda^3 - \lambda \tilde{a}a = 0, \quad (3.34)$$

$$|P(a, b) - \lambda I_4| = \lambda^4 - \lambda^2 (\tilde{b}b - \tilde{a}a) - (\tilde{a}b)^2 = 0. \quad (3.35)$$

Упражнение 3.3. Показать, что матрицы $P(a)$ и $P(a, b)$ удовлетворяют следующим матричным уравнениям:

$$P^3(a) = -P(a) \cdot \tilde{a} a,$$

$$P^4(a, b) = P^2(a, b) (\tilde{b} b - \tilde{a} a) + I_4 (\tilde{a} b)^2. \quad (3.36)$$

$$P^3(0_3, b) = P(0_3, b) \cdot \tilde{b} b. \quad (3.37)$$

$$P(a, b) \cdot P(-b, a) = \tilde{a} b I_4 = \tilde{b} a I_4. \quad (3.38)$$

Упражнение 3.4. Доказать справедливость равенства:

$$P(P(c) \cdot b) = P(c) P(b) - P(b) P(c). \quad (3.39)$$

Пример 3.1. Покажем, как с помощью матриц $P(a)$ или $P(b)$ можно записать векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$.

По определению имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i}_2 \times \vec{i}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{i}_3 \times \vec{i}_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{i}_1 \times \vec{i}_2. \quad (3.40)$$

В системе координат, осями которой являются компоненты ортонормированного репера \vec{i} ,

$$\vec{i}_2 \times \vec{i}_3 = \vec{i}_1, \quad \vec{i}_3 \times \vec{i}_1 = \vec{i}_2, \quad \vec{i}_1 \times \vec{i}_2 = \vec{i}_3. \quad (3.41)$$

Поэтому получим

$$\vec{a} \times \vec{b} = \tilde{a} \tilde{P}(b) \vec{i} = \tilde{b} \cdot P(a) \vec{i} = \vec{i} \cdot P(b) a = \vec{i} \tilde{P}(a) b. \quad (3.42)$$

Из (3.39) следует, что

$$\begin{aligned} \vec{a} \times P(c) \vec{b} &= \tilde{a} \cdot \tilde{P}(P(c) \vec{b}) \vec{i} = \tilde{a} (\tilde{P}(b) \tilde{P}(c) - \tilde{P}(c) \tilde{P}(b)) \vec{i} = \\ &= \tilde{a} (P(b) P(c) - P(c) P(b)) \vec{i} = \tilde{i} (P(c) P(b) - P(b) P(c)) a, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$P(c) \vec{a} \times \vec{b} = \tilde{b} (P(c) P(a) - P(a) P(c)) \vec{i} = \tilde{i} (P(a) P(c) - P(c) P(a)) b. \quad (3.44)$$

Как будет показано ниже, матрицы типа $P(a)$ и $P(a, b)$ описывают электромагнитное поле в уравнениях движения заряженных частиц.

3.4. Векторное произведение. Для трехмерных векторов существует два вида умножения: скалярное и векторное. Формально векторно-матричная запись для результатов обеих операций является одной и той же до тех пор, пока мы не расшифруем, о каком умножении идет речь.

Пример 3.2. Рассмотрим операции $\vec{i} \cdot \tilde{a} \vec{i}$ и $\vec{i} \times \tilde{a} \vec{i}$.

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \tilde{a} \vec{i} &= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i}_1 \cdot a_1 & \vec{i}_1 \cdot a_2 & \vec{i}_1 \cdot a_3 \\ \vec{i}_2 \cdot a_1 & \vec{i}_2 \cdot a_2 & \vec{i}_2 \cdot a_3 \\ \vec{i}_3 \cdot a_1 & \vec{i}_3 \cdot a_2 & \vec{i}_3 \cdot a_3 \end{array} \right\| \cdot \vec{i} = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i}_1 \cdot a_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_1 \cdot a_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_1 \cdot a_3 \vec{i}_3 \\ \vec{i}_2 \cdot a_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \cdot a_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_2 \cdot a_3 \vec{i}_3 \\ \vec{i}_3 \cdot a_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_3 \cdot a_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \cdot a_3 \vec{i}_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\| = a. \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \tilde{a} \vec{i} &= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i}_1 \times a_1 & \vec{i}_1 \times a_2 & \vec{i}_1 \times a_3 \\ \vec{i}_2 \times a_1 & \vec{i}_2 \times a_2 & \vec{i}_2 \times a_3 \\ \vec{i}_3 \times a_1 & \vec{i}_3 \times a_2 & \vec{i}_3 \times a_3 \end{array} \right\| \cdot \vec{i} = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i}_1 \times a_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_1 \times a_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_1 \times a_3 \vec{i}_3 \\ \vec{i}_2 \times a_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \times a_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_2 \times a_3 \vec{i}_3 \\ \vec{i}_3 \times a_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_3 \times a_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \times a_3 \vec{i}_3 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} a_2 \vec{i}_3 - a_3 \vec{i}_2 \\ -a_1 \vec{i}_3 + a_3 \vec{i}_1 \\ a_1 \vec{i}_2 - a_2 \vec{i}_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right\| \cdot \vec{i} = \tilde{P}(a) \vec{i}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Из (3.46) следует, что формально можно определить операцию векторного умножения геометрического вектора \vec{l} на арифметический вектор \vec{a} следующим образом:

$$\vec{l} \times \vec{a} = \tilde{\rho}(a) \quad (3.47)$$

Пример 3.5. Рассмотрим также операцию $\vec{l} \cdot \vec{a} \times \vec{l}$.

$$\vec{l} \vec{a} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{l}_1 \cdot a_1 & \vec{l}_1 \cdot a_2 & \vec{l}_1 \cdot a_3 \\ \vec{l}_2 \cdot a_1 & \vec{l}_2 \cdot a_2 & \vec{l}_2 \cdot a_3 \\ \vec{l}_3 \cdot a_1 & \vec{l}_3 \cdot a_2 & \vec{l}_3 \cdot a_3 \end{vmatrix} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{l}_1 a_1 \times \vec{l}_1 + \vec{l}_1 a_2 \times \vec{l}_2 + \vec{l}_1 a_3 \times \vec{l}_3 \\ \vec{l}_2 a_1 \times \vec{l}_1 + \vec{l}_2 a_2 \times \vec{l}_2 + \vec{l}_2 a_3 \times \vec{l}_3 \\ \vec{l}_3 a_1 \times \vec{l}_1 + \vec{l}_3 a_2 \times \vec{l}_2 + \vec{l}_3 a_3 \times \vec{l}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 \vec{l}_3 - a_3 \vec{l}_2 \\ -a_1 \vec{l}_3 + a_3 \vec{l}_1 \\ a_1 \vec{l}_2 - a_2 \vec{l}_1 \end{vmatrix} = \tilde{\rho}(a) \vec{l}.$$

Из двух последних примеров следует следующее правило перестановки знаков скалярного и векторного умножений:

$$\vec{l} \times \vec{a} \vec{l} = \vec{l} \vec{a} \times \vec{l} = \tilde{\rho}(a) \vec{l} = -\rho(a) \vec{l}. \quad (3.49)$$

Упражнение 3.5. Показать справедливость равенства, транспонированного по отношению к (3.49):

$$\vec{l} \vec{a} \times \vec{l} = \vec{l} \times a \vec{l} = \vec{l} \cdot \rho(a). \quad (3.50)$$

Заметим, что при транспонировании равенства каждый элемент равенства заменяется транспонированным элементом, и порядок следования элементов заменяется на противоположный.

Из (3.50) вытекает транспонированный вариант равенства (3.47):

$$a \times \vec{l} = \rho(a). \quad (3.51)$$

столбцом. Элементы $a_{j,j-i}$ в общем случае суть блочные матрицы, причем $a_{j,j-\beta}$ всегда является квадратной матрицей. В практических приложениях эти элементы часто являются скалярами.

В блочном виде матрица $C(a_j)$ выглядит следующим образом:

$$C(a_j) = I_\beta + V(a_j)I_\beta(j), \quad (4.10)$$

$$C(a_j) = I_\beta + a(j,\beta)\tilde{I}(j), \quad (4.11)$$

где

$$V_{kj}(a_j) = a_k(j,\beta) = a_{j,k} \quad (k=1,2,\dots,j-1), \quad (4.12)$$

$$V_{jj}(a_j) = a_j(j,\beta) = a_{j,j-\beta} - I, \quad (4.13)$$

$$V_{kj}(a_j) = a_k(j,\beta) = a_{j,k-\beta} \quad (k=j+1, \dots, \beta). \quad (4.14)$$

Упражнение 4.4. Показать, что матрица $C(a_j)$ обладает следующими свойствами:

$$|C(a_j)| = |a_{j,j-\beta}|. \quad (4.15)$$

$$C^{-1}(a_j) = [I_\beta - I_\beta(j)V(a_j)I_\beta(j)] a_{j,j-\beta}^{-1} = [I_\beta - I_\beta(j)a(j,\beta)\tilde{I}(j)] a_{j,j-\beta}^{-1} \quad (4.16)$$

4.2. Циклические последовательности. Операции циклического сдвига (изгиба). Пусть множество $\{1, \beta\}$ - множество всех целых чисел от 1 до β . Составим последовательность n_1, n_2, \dots, n_β

из элементов множества $\{1, \beta\}$ таким образом, чтобы все ее элементы были различными. Такая последовательность, как известно, носит название перестановки над множеством $\{1, \beta\}$, а всего существует $\beta!$ различных перестановок над множеством $\{1, \beta\}$. Одну из возможных перестановок над множеством $\{1, \beta\}$ будем обозначать либо последовательностью элементов, заключенных в квадратные скобки, либо сокращенно $[\beta_i]$, где

$$[\beta_i] = [n_1, n_2, \dots, n_\beta], \quad i \in \{1, \beta!\}$$

Выберем некоторую перестановку $[\beta_i]$ и будем образовывать последовательности из элементов этой перестановки следующим образом. Если количество элементов ℓ в последовательности меньше β , то эту последовательность образуют первые ℓ элементов перестановки, стоящие в том же порядке, что в перестановке. Если количество элементов в последовательности равно β , то она является перестановкой $[\beta_i]$. Если количество элементов в последовательности больше β , то после β -го элемента идет первый элемент перестановки $[\beta_i]$, затем второй и т.д. Такую последовательность над множеством $\{1, \beta\}$ будем называть циклической последовательностью, а перестановку $[\beta_i]$, участвующую в образовании циклической последовательности, назовем перестановкой-циклом.

Условимся циклическую последовательность с количеством элементов m , составленную из перестановки-цикла $[\beta_i]$, обозначать через $[\beta_i(m)]$. Пусть имеется кортеж $\langle \bar{A}_{\kappa, \beta}^m \rangle$, элементы $a_{s, s-i}$ которого образуют матрицу элементарного сдвига (изгиба) с j -ой производящей строкой (столбцом). Такую матрицу сдвига будем обозначать через $B(a_s(j))$, а матрицу изгиба через $C(a_s(j))$. индекс s меняется от k до m .

Пусть значения индекса j составляют циклическую последовательность $[\beta_i(\ell)]$, где ℓ - длина кортежа $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$, то есть индекс j равен

$$j = n(s), \quad n(s+\beta) = n(s), \quad (4.17)$$

где $n(s)$ является целой периодической функцией от целого аргумента s . Чтобы не повторять два раза индекс s , будем писать $B(a(n(s)))$ и $C(a(n(s)))$. Составим следующие произведения матриц

$$B(a(m/\kappa)) = B(a(n(m))) \cdot B(a(n(m-1))) \dots B(a(n(\kappa))), \quad (4.18)$$

$$C(a(\kappa/m)) = C(a(n(\kappa))) \cdot C(a(n(\kappa+1))) \dots C(a(n(m))). \quad (4.19)$$

Матрицы $B(a(m/1))$ и $C(a(1/m))$ будем называть соответственно матрицами сдвига и изгиба, а матрицы $B(a(m/\kappa))$ и $C(a(\kappa/m))$, где $\kappa > 1$, усеченными матрицами сдвига и изгиба.

Пусть имеется любое целое неотрицательное число $m (m \geq 0)$ и любое целое положительное число $\beta (\beta > 0)$. Разделим m на β и целую часть частного от деления m на β обозначим через \underline{m} , а остаток, получающийся при делении m на β , увеличенный на 1, - через \bar{m} .

$$m = \underline{m} \cdot \beta + \bar{m} - 1. \quad (4.20)$$

Заметим, что существует следующая связь между \bar{m} и $\bar{m}+1$.

$$\bar{m}+1 = \bar{m}+1 - \beta \delta(\beta, \bar{m}) = \bar{m}+1 - \beta \delta(1, \bar{m}+1). \quad (4.21)$$

4.3. Представление матриц сдвига (изгиба) в виде матриц левых (правых) челнок-сумм. Приведем без доказательства следующую теорему.

Т е о р е м а 4.1. Пусть имеется матричный кортеж $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$ над ассоциативным кольцом K , элементы которого образуют производящие строки матриц $B(a(n(s)))$ и $C(a(n(s)))$, где $S = \kappa, \kappa+1, \dots, m$, а числа $n(s)$ заданы и образуют циклическую последовательность $[\beta_i(\ell)]$, где ℓ - длина матричного кортежа ($\ell = m - \kappa + 1$). Тогда матричные элементы усеченных матриц сдвига $B(a(m/\kappa))$ и изгиба $C(a(\kappa/m))$ являются линейными челнок-суммами:

$$B_{n(p), n(t)}(a(m/\kappa)) = \sum_{\kappa+\beta - \overline{\kappa+\beta-t}}^{m+\beta - \overline{m+\beta-p-1}} \quad (4.22)$$

$$C_{n(p), n(t)}(a(\kappa/m)) = \sum_{\kappa+\beta - \overline{\kappa+\beta-p}}^{m+\beta - \overline{m+\beta-t-1}} \quad (4.23)$$

Теорема доказывается методом индукции.

Следствие 1. Если элементы кортежа $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$ принадлежат коммутативному кольцу, то справедливо равенство

$$C_{n(p), n(t)}(a(\kappa/m)) \equiv B_{n(t), n(p)}(a(m/\kappa)). \quad (4.24)$$

в силу равенства челнок-сумм

$$\sum_{\substack{\nu \\ \kappa+\beta - \overline{\kappa+\beta-\rho}}}^{m+\beta - \overline{m+\beta-\tau-1}} = \sum_{\substack{\nu \\ \kappa+\beta - \overline{\kappa+\beta-\rho}}}^{m+\beta - \overline{m+\beta-\tau-1}} \quad (4.25)$$

Следствие 2. Определители матриц сдвига и изгиба для одного и того же кортежа $\langle A_{\kappa, \beta}^m \rangle$ равны произведению определителей всех элементов β -того линейного кортежа:

$$\begin{aligned} |C(a(\kappa/m))| &= |B(a(m/\kappa))| = \\ &= \text{Det} \left\| \sum_{\substack{\nu \\ \kappa+\beta - \overline{\kappa+\beta-\rho}}}^{m+\beta - \overline{m+\beta-\tau-1}} \right\| = \text{Det} \left\| \sum_{\substack{\nu \\ \kappa+\beta - \overline{\kappa+\beta-\rho}}}^{m+\beta - \overline{m+\beta-\tau-1}} \right\| = \prod_{j=\kappa}^m |a_{j, j-\beta}| \quad (4.26) \end{aligned}$$

Упражнение 4.4. Доказать следующее свойство челнок-сумм:

$$I. \langle \bar{A}_{e, \beta}^m | S_{e-1+j}^{m-2+i} \rangle = \langle \bar{A}_{\kappa+1, \beta}^m | S_{\kappa-1+\beta\delta(1,2)+2}^{m-2+i} \rangle \cdot \langle \bar{A}_{e, \beta}^{\kappa} | S_{e-1+j}^{\kappa-2+z} \rangle \quad (4.27)$$

$$|\bar{A}_{e, \beta}^m \rangle S_{e-1+j}^{m-2+i} = |\bar{A}_{e, \beta}^{\kappa} \rangle S_{e-1+j}^{\kappa-2+z} \cdot |\bar{A}_{\kappa+1, \beta}^m \rangle S_{\kappa-1+\beta\delta(1,2)+2}^{m-2+i} \quad (4.28)$$

Здесь $1 \leq e \leq \kappa \leq m-1$, $i, j = 1, 2, \dots, \beta$; z - немой индекс суммирования.

2. Челнок-суммы линейны относительно любого из первых элементов матричного кортежа

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}_{e,\beta}^m | S_{e-1+j}^{m-2+i} = & \langle \bar{A}_{e+1,\beta}^m | S_{e-1+\beta}^{m-2+i} \bar{a}_{e,e+j-\beta-\beta\delta(j,\beta)} + \\ & + \langle \bar{A}_{e+1,\beta}^m | S_{e-1+\beta\delta(i,j)+j}^{m-2+i} (1-\delta(j,\beta)), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} |\bar{A}_{e,\beta}^m \rangle S_{e-1+j}^{m-2+i} = & \bar{a}_{e,e+j-\beta-\beta\delta(j,\beta)} \cdot |\bar{A}_{e+1,\beta}^m \rangle S_{e-1+\beta}^{m-2+i} + \\ & + [1-\delta(j,\beta)] |\bar{A}_{e+1,\beta}^m \rangle S_{e-1+\beta\delta(i,j)+j}^{m-2+i}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

3. Челнок-суммы линейны относительно любого из последних элементов матричного кортежа

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}_{e,\beta}^m | S_{e-1+j}^{m-2+i} = & (1-\delta(i,\beta)) \langle \bar{A}_{e,\beta}^{m-1} | S_{e-1+j}^{m-2+i-\beta\delta(i,\beta)} + \\ & + \delta(i,\beta) \bar{a}_{m,m-k} \cdot \langle \bar{A}_{e,\beta}^{m-1} | S_{e-1+j}^{m-2+\beta-k} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} |\bar{A}_{e,\beta}^m \rangle S_{e-1+j}^{m-2+i} = & |\bar{A}_{e,\beta}^{m-1} \rangle S_{e-1+j}^{m-2+i-\beta\delta(i,\beta)} \cdot (1-\delta(i,\beta)) + \\ & + |\bar{B}_{e,\beta}^{m-1} \rangle S_{e-1+j}^{m-2+\beta-k} \cdot \bar{a}_{m,m-k} \cdot \delta(i,\beta). \end{aligned} \quad (4.32)$$

4. Челнок-суммы линейны относительно любого элемента матричного кортежа

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}_{e,\beta}^m | S_{e-1+j}^{m-2+i} = \langle \bar{A}_{k+1,\beta}^m | S_{k-1+\beta}^{m-2+i} \cdot \bar{a}_{k,k-n} \cdot \langle \bar{A}_{e,\beta}^k | S_{e-1+j}^{k-2+\beta-n} + \\ + \sum_{z=1}^{\beta-1} \langle \bar{A}_{k+1,\beta}^m | S_{k-1+\beta\delta(1,z)+z}^{m-2+i} \cdot \langle \bar{A}_{e,\beta}^k | S_{e-1+j}^{k-2+z} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} | \bar{A}_{e,\beta}^m \rangle S_{e-1+j}^{m-2+i} = | \bar{A}_{e,\beta}^k \rangle S_{e-1+j}^{k-2+\beta-n} \cdot \bar{a}_{k,k-n} \cdot | \bar{A}_{k+1,\beta}^m \rangle S_{k-1+\beta}^{m-2+i} + \\ + \sum_{z=1}^{\beta-1} | \bar{A}_{e,\beta}^k \rangle S_{e-1+j}^{k-2+z} \cdot | \bar{A}_{k+1,\beta}^m \rangle S_{k-1+z+\beta\delta(1,z)}^{m-2+i} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4. Представление матрицы в виде матрицы челнок-сумм.

Обращение матриц. Пусть у нас имеется неособенная квадратная $\beta \times \beta$ матрица M и пусть заданы числа $n(p)$, составляющие последовательность $[\beta_i(\beta)]$, то есть $p, n(p) = 1, 2, \dots, \beta$. образуем из элементов матрицы M матрицу \mathcal{D} согласно следующему соответствию

$$M_{n(p), n(t)} = \mathcal{D}_{p-1+\beta\delta(1,p), t} \quad (4.35)$$

Из матрицы \mathcal{D} будем получать новые матрицы по следующему рекуррентному соотношению

$$\mathcal{D}_{2s}^{(k+1)} = \mathcal{D}_{1+z, 1+s}^{(k)} - \mathcal{D}_{1+z, 1}^{(k)} \cdot \mathcal{D}_{1, 1+s}^{(k)} \frac{1}{\mathcal{D}_{11}^{(k)}}, \quad (4.36)$$

где

$$\mathcal{D}(1) \equiv \mathcal{D}. \quad (4.37)$$

С помощью матрицы \mathcal{D} составим матричный кортеж $\langle A_{1,\beta}^{\beta+1}(\mathcal{D}) \rangle$ следующим образом:

$$1. \quad a_{z+1,1} = -a_{z,z-\beta}^{-1} \cdot \mathcal{D}_{11}(z) a_{z1} \quad (z > 1), \quad a_{z1} = a_{1,1-\beta}^{-1} \mathcal{D}_{11}(1). \quad (4.38)$$

$$2. \quad a_{z+1,z+1-i} = \mathcal{D}_{11}^{-1}(z-i) \cdot \mathcal{D}_{i+1,1}(z-i) - a_{z+1-i,1}^{-1} \cdot a_{z+1,1} - \sum_{t=1}^{i-1} a_{z+1,z+1-t} \mathcal{D}_{11}^{-1}(z-i) \mathcal{D}_{i+1-t,1}(z-i), \quad (1 \leq i \leq z-1 \leq \beta-2). \quad (4.39)$$

$$3. \quad a_{z+1,s-\beta} = \mathcal{D}_{zs}(1) - \sum_{i=1}^{z-1} a_{z+1,z+1-i} \cdot \mathcal{D}_{z-i,s}(1) - a_{z+1,1} \cdot a_{1,s-\beta}, \quad (1 \leq z \leq s-1 \leq \beta-1). \quad (4.40)$$

$$4. \quad a_{1,s-\beta} = a_{s+1,1}^{-1} \mathcal{D}_{ss}(1) - \sum_{i=1}^{s-1} a_{s+1,s+1-i} \cdot \mathcal{D}_{s-i,s}(1), \quad (2 \leq s \leq \beta). \quad (4.41)$$

Упражнение 4.5. Показать справедливость тождества

$$a_{1,s-\beta} \cdot a_{z+1,1} = \mathcal{D}_{zs}(1) - \sum_{i=1}^{z-1} a_{z+1,z+1-i} \cdot \mathcal{D}_{z-i,s}(1), \quad (2 \leq s \leq z \leq \beta). \quad (4.42)$$

Элементы $a_{1,1-\beta}, a_{2,2-\beta}, \dots, a_{\beta,0}$ можно выбирать произвольно, например, равными единице. Таким образом, β^2 элементов матрицы определяют $\beta(\beta-1) + \beta = \beta^2$ элементов матричного кортежа.

Теорема 4.2. Элементы кортежа $\langle A_{1,\beta}^{\beta+1}(\mathcal{D}) \rangle$ образуют челнок-суммы, являющиеся матричными элементами матрицы

$$M_{n(p), n(t)} = \langle A_{1,\beta}^{\beta+1}(\mathcal{D}) | S_{t-1+\beta\delta(1,t)}^{p-2+\beta+\beta\delta(1,p)} \rangle \quad (4.43)$$

Как и предыдущая теорема, теорема 4.2 доказывается методом индукции.

Следствие 1. Определитель матрицы M равен

$$|M| = a_{\beta+1,1} \cdot a_{\beta,0} \cdots a_{2,2-\beta} a_{1,1-\beta}. \quad (4.44)$$

В теореме 4.2 элементы кортежа мы считаем вещественными числами. Если элементы $a_{1,1-\beta}, a_{2,2-\beta}, \dots, a_{\beta,0}$ выбрать равными единице, то

$$|M| = a_{\beta+1,1}.$$

Поскольку матрица, обратная матрице элементарного сдвига, имеет простой вид, то легко получить второе следствие из теоремы 4.2.

Следствие 2. Матрица, обратная M , равна

$$M_{n(p), n(t)}^{-1} = \langle B_{1,\beta}^{\beta+1}(a) | S_{\beta-t+1}^{2\beta-p} \rangle, \quad (4.45)$$

где кортеж $\langle B_{1,\beta}^{\beta+1}(a) \rangle$ получается из кортежа $\langle A_{1,\beta}^{\beta+1}(D) \rangle$ следующим образом:

$$B_{k,k-i}(a) = - \frac{a_{\beta+2-k, i+2-k}}{a_{\beta+2-k, 2-k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \beta+1; \quad i \neq \beta. \quad (4.46)$$

$$B_{k,k-\beta}(a) = \frac{1}{a_{\beta+2-k, 2-k}}. \quad (4.47)$$

Пример 4.1. С помощью следствия 2 найдем матрицу, обратную матрице M , где

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Определим числа $r(s)$, где $s = 1, 2, 3$, следующим образом:

$$r(s) = s.$$

Матрица \mathcal{D} при этом получается перестановкой строк:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathcal{D}(1).$$

Сначала найдем элементы кортежа $\langle A_{1,3}^4(\mathcal{D}) \rangle$, определяемые формулами (4.38).

Положим

$$a_{1,-2} = a_{2,-1} = a_{3,0} = 1.$$

Тогда получим:

$$a_{21} = \mathcal{D}_{11}(1) = 4.$$

$$\mathcal{D}_{11}(2) = \mathcal{D}_{22}(1) - \mathcal{D}_{21}(1) \cdot \mathcal{D}_{12}(1) \mathcal{D}_{11}^{-1}(1) = -1 - 3 \cdot 2 \cdot 4^{-1} = -5/2.$$

$$a_{31} = -\mathcal{D}_{11}(2) a_{21} = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10.$$

$$\mathcal{D}_{11}(3) = \mathcal{D}_{22}(2) - \mathcal{D}_{21}(2) \mathcal{D}_{12}(2) \mathcal{D}_{11}^{-1}(2).$$

$$\mathcal{D}_{22}(2) = \mathcal{D}_{33}(1) - \mathcal{D}_{31}(1) \mathcal{D}_{13}(1) \mathcal{D}_{11}^{-1} = -2 - 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{11}{4}.$$

$$\mathcal{D}_{21}(2) = \mathcal{D}_{32}(1) - \mathcal{D}_{31}^*(1) \mathcal{D}_{12}(1) \mathcal{D}_{11}^{-1} = 1 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{D}_{12}(2) = \mathcal{D}_{23}(1) - \mathcal{D}_{21}(1) \mathcal{D}_{13}(1) \mathcal{D}_{11}^{-1} = 5 - 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

$$D_{11}(3) = -\frac{11}{4} - (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{17}{4} \cdot (-\frac{2}{5}) = -\frac{11}{4} - \frac{17}{20} = -\frac{18}{5}$$

$$a_{41} = -D_{11}(3) a_{31} = \frac{18}{5} \cdot 10 = 36 = |M|$$

Таким образом мы нашли определитель матрицы M . Определим теперь остальные элементы кортежа.

$$a_{43} = D_{11}^{-1}(2) D_{21}(2) - a_{31}^{-1} a_{41} = (-\frac{2}{5})(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{10} \cdot 36 = -\frac{17}{5}$$

$$a_{42} = D_{11}^{-1}(1) D_{31}(1) - a_{21}^{-1} a_{41} - a_{43} D_{11}^{-1}(1) D_{21}(1) = \\ = \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 36 - (-\frac{17}{5}) \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = -\frac{57}{10}$$

$$a_{32} = D_{11}^{-1}(1) D_{21}(1) - a_{21}^{-1} a_{31} = \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 10 = -\frac{7}{4}$$

$$a_{10} = a_{41}^{-1} [D_{33}(1) - a_{43} D_{23}(1) - a_{42} D_{13}(1)] = \\ = \frac{1}{36} [-2 - (-\frac{17}{5}) \cdot 5 - (-\frac{57}{10})] = \frac{23}{40}$$

$$a_{1,-1} = a_{31}^{-1} (D_{22}(1) - a_{32} D_{12}(1)) = \frac{1}{10} [-1 - (-\frac{7}{4}) \cdot 2] = \frac{1}{4}$$

$$a_{20} = D_{13}(1) - a_{21} a_{10} = 1 - 4 \cdot \frac{23}{40} = -\frac{13}{10}$$

$$b_{10}(a) = -\frac{a_{42}}{a_{41}} = \frac{57}{10} \cdot \frac{1}{36} = \frac{19}{120}$$

$$b_{1,-1}(a) = -\frac{a_{43}}{a_{41}} = \frac{17}{5 \cdot 36} = \frac{17}{180}$$

$$b_{1,-2}(a) = \frac{1}{a_{41}} = \frac{1}{36}$$

$$b_{2,-1}(a) = b_{30}(a) = b_{41}(a) = 1$$

$$b_{21}(a) = -a_{31} = -10$$

$$b_{20}(a) = -a_{32} = \frac{7}{4}$$

$$b_{32}(a) = -a_{20} = \frac{13}{10}$$

$$b_{31}(a) = -a_{21} = -4$$

$$b_{43}(a) = -a_{1,-1} = -\frac{1}{4}$$

$$b_{42}(a) = -a_{10} = -\frac{23}{40}$$

$$S_1^0 = 1. \quad S_1^1 = 0.$$

$$S_1^2 = b_{10}(a) S_1^1 + b_{1,-1}(a) S_1^0 + b_{1,-2}(a) S_1^{-1} = b_1(a) = \frac{17}{180}.$$

$$(M^{-1})_{33} = S_1^3 = b_{21}(a) S_1^2 + b_{20}(a) S_1^1 + b_{2,-1}(a) S_1^0 = (-10) \frac{17}{180} + 1 = \frac{1}{18}.$$

$$(M^{-1})_{23} = S_1^4 = b_{32}(a) S_1^3 + b_{31}(a) S_1^2 + b_{30}(a) S_1^1 = \frac{13}{10} \cdot \frac{1}{18} - 4 \cdot \frac{17}{180} = -\frac{11}{36}.$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{13} = S_1^5 &= b_{43}(a) S_1^4 + b_{42}(a) S_1^3 + b_{41}(a) S_1^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{11}{36}\right) + \left(-\frac{23}{40}\right) \frac{1}{18} + \frac{17}{180} = \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

$$S_2^1 = 1. \quad S_2^2 = b_{10}(a) = \frac{19}{120}.$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{32} = S_2^3 &= b_{21}(a) S_2^2 + b_{20}(a) S_2^1 + b_{2,-1}(a) S_2^0 = \\ &= (-10) \frac{19}{120} + \frac{7}{4} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{22} = S_2^4 &= b_{32}(a) S_2^3 + b_{31}(a) S_2^2 + b_{30}(a) S_2^1 = \\ &= \frac{13}{10} \cdot \frac{1}{6} + (-4) \frac{19}{120} + 1 = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{12} = S_2^5 &= b_{43}(a) S_2^4 + b_{42}(a) S_2^3 + b_{41}(a) S_2^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{7}{12} + \left(-\frac{23}{40}\right) \cdot \frac{1}{6} + \frac{19}{120} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$S_3^2 = b_{10}(a) S_3^1 + b_{1,-1}(a) S_3^0 + b_{1,-2}(a) S_3^{-1} = \frac{1}{36}.$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{31} = S_3^3 &= b_{21}(a) S_3^2 + b_{20}(a) S_3^1 + b_{2,-1}(a) S_3^0 = \\ &= -10 \cdot \frac{1}{36} = -\frac{5}{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M^{-1})_{21} &= S_3^4 = b_{32}(a)S_3^3 + b_{31}(a)S_3^2 + b_{30}(a)S_3^1 = \\ &= \frac{13}{10}\left(-\frac{5}{18}\right) + (-4)\frac{1}{36} = -\frac{17}{36}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M^{-1})_{11} &= S_3^5 = b_{43}(a)S_3^4 + b_{42}(a)S_3^3 + b_{41}(a)S_3^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{17}{36}\right) + \left(-\frac{23}{40}\right)\left(-\frac{5}{18}\right) + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.\end{aligned}$$

Таким образом, матрица M^{-1} имеет вид

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \end{vmatrix}.$$

Челнок-суммы имеют различные практические приложения. Одним из них является рекурсивный метод нахождения аналитических и численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Г Л А В А 2.

МАТРИЧНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение

$$F [s, y(s), y'(s), \dots, y^{(n)}(s)] = 0, \quad (1.1)$$

которое связывает независимую переменную s , искомую векторную функцию $y = y(s)$ и ее производные $y'(s), y''(s), \dots, y^{(n)}(s)$. В задаче Коши (начальной задаче) требуется найти частное решение, удовлетворяющее n начальным условиям

$$y(s_0) = y_0, \quad y'(s_0) = y'_0, \quad y''(s_0) = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(s_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.2)$$

В краевой задаче на $y(s)$ и ее производные накладываются n краевых условий в точках $s = a$ и $s = b$.

Будем предполагать, что уравнение (1.1) разрешимо относительно старшей производной:

$$y^{(n)}(s) = \varphi [s, y(s), y'(s), \dots, y^{(n-1)}(s)]. \quad (1.3)$$

Тогда уравнение (1.3) можно свести к равносильной системе уравнений первого порядка путем замены высших производных вспомогательными неизвестными функциями:

$$y = x_1, \quad y' = x_2, \dots, \quad y^{(z-1)} = x_z, \quad (1.4)$$

$$y^{(z)} = x'_z = \varphi(s, x_1, x_2, \dots, x_z). \quad (1.5)$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_3, \\ \dots \\ x'_{z-1} = x_z \\ x'_z = \varphi(s, x_1, \dots, x_z) \end{cases} \quad (1.6)$$

называется нормальной формой дифференциального уравнения (1.3), а любая система вида

$$x'(s) = f(s, x(s)), \quad (1.7)$$

где $x(s)$ — n -мерная векторная функция, называется нормальной системой дифференциальных уравнений. При этом некоторое множество значений x в точке $s = \alpha$, удовлетворяющих уравнению 1.7, носит название фазового множества в точке α , а пространство, которому принадлежит фазовое множество, называется фазовым пространством. Множество начальных значений $x = x_0$ в точке $s = s_0$ в задаче Коши будем называть начальным фазовым множеством и обозначать через $M(s_0) = M_0$. Функцию $x(s)$, удовлетворяющую уравнению (1.7) и в точке $s = s_0$ равную $x_0 \in M_0$, назовем траекторией, а множество траекторий, начинающихся из M_0 , назовем пучком траекторий $M(s)$. Кривую, принадлежащую множеству $M(a)$, назовем

вайт фазовой траекторией в точке $s = a$. Если множество $M(a)$ является замкнутым, то поверхность, ограничивающую это множество, будем именовать фазовой огибающей поверхностью и обозначать через $\Gamma(a)$.

Пусть имеется начальная фазовая огибающая поверхность $\Gamma(s_0)$. Тогда при изменении s точки $x_0 \in \Gamma(s_0)$ в силу уравнения (1.7) образуют некоторую новую поверхность, которую назовем огибающей поверхностью в расширенном фазовом пространстве (x, s) и обозначим посредством $\Gamma(x, s)$.

Проекцию $\Gamma(x, s)$ на плоскость (x_j, s) , где $j = 1, 2, \dots, z$ будем называть x_j -огибающей кривой.

§ 2. Матрицант

2.1. Линейные системы дифференциальных уравнений. Любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (в том числе и одно уравнение n -го порядка) можно привести к системе вида

$$x'_k(s) = \sum_{i=1}^n P_{ki}(s) x_i(s) + f_k(s) = P_{ki}(s) x_i(s) + f_k(s); \quad (2.1)$$

где $P_{ki}(s)$ и $f_k(s)$ - заданные функции независимой переменной s . Функции $P_{ki}(s)$ называются коэффициентами, а $f_k(s)$ - свободными членами системы (2.1). Если все свободные члены

$$f_k(s) \equiv 0, \quad (2.2)$$

то система (2.1) называется однородной. Уравнение (2.1) можно записать в векторно-матричном виде

$$x' = P(s)x + f(s), \quad (2.3)$$

где $x = x(s)$ - n -мерный вектор, а $P(s)$ - матричная функция, элементами которой являются коэффициенты $P_{ik}(s)$; $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Пример 2.1. Среди дифференциальных уравнений, наиболее часто используемых в математике и физике, особое место занимает линейное уравнение второго порядка, имеющее вид

$$x'' + g(s)x' + h(s)x = \alpha(s), \quad (2.4)$$

или

$$(p(s)x')' + q(s)x = \alpha(s), \quad (2.5)$$

где

$$p(s) \neq 0.$$

Из двух выражений (2.4) и (2.5) второе является более общим, поскольку уравнение (2.4) всегда можно записать в виде

$$(p(s)x')' + p(s) \cdot h(s) \cdot x = p(s) \cdot \alpha(s), \quad (2.6)$$

если определить $p(s)$ следующим образом:

$$p(s) = \exp \int_a^s g(s) ds,$$

где a - некоторое число, принадлежащее промежутку I , на котором определены все функции в уравнениях (2.4) и (2.5). Уравнение (2.5) не может быть записано в виде (2.4), если функ-

ция $p(s)$ не имеет непрерывной производной. Если ввести новые переменные

$$x = y_1, \quad p(s)x' = y_2, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

то уравнение (2.5) можно записать в векторно-матричном виде

$$y' = P(s)y + f(s), \quad (2.8)$$

где

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & p^{-1}(s) \\ -q(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad f(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(s) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Если считать $p(s)$ и $q(s)$ матричными функциями, а $\alpha(s)$ - векторной функцией, то уравнение (2.5) для таких функций является уравнением, эквивалентным системе уравнений второго порядка. В этом случае $p^{-1}(s)$ и $q(s)$ в (2.9) являются блочными матрицами.

2.2. Понятие матрицанта. Рассмотрим однородное уравнение

$$x' = P(s)x. \quad (2.10)$$

Будем искать его решение в виде

$$x = R(P, s/s_0) \cdot x(s_0) = R \cdot x_0, \quad (2.11)$$

где $R(P, s/s_0)$ - некоторая матричная функция, которая при $s = s_0$ равна единичной матрице I .

$$R(P, s_0/s_0) = I. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим дифференциальное уравнение для матрицы $R(P, s/s_0) = R(s/s_0) = R$:

$$R' = P(s)R. \quad (2.13)$$

Матричная функция $R(P, s/s_0)$, удовлетворяющая уравнению (2.13) и начальному условию (2.12), носит название матрицанта уравнения (2.10). Она является фундаментальной системой решений уравнения (2.10), нормированной в соответствии с (2.12).

Упражнение 2.1. Доказать следующие свойства матрицанта:

1. $|R| = \exp \int_{s_0}^s \langle P(s) \rangle ds.$ (2.14)

2. $R(s/s_0) = R^{-1}(s_0/s).$ (2.15)

3. $R(s/s_0) = R(s/s_1)R(s_1/s_0).$ (2.16)

4. $R(P+Q, s/s_0) = R(P, s/s_0)R(F, s/s_0),$ (2.17)

$$F = R^{-1}(P, s/s_0)Q R(P, s/s_0).$$

5. $\frac{d}{ds} [R^{-1}(P, s/s_0)] = -R^{-1}(P, s/s_0) \cdot P(s).$ (2.18)

6. $R^{-1}(P, s/s_0) = \tilde{R}(-\tilde{P}, s/s_0).$ (2.19)

2.3. Формула Коши. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$x' = P(s)x + f(s). \quad (2.20)$$

Его решение имеет вид

$$x = R(P, s/s_0) \cdot x_0 + \int_{s_0}^s R(P, s/\tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Действительно, продифференцируем выражение (2.21):

$$\begin{aligned} x' &= R'(P, s/s_0) x_0 + R(P, s/s_0) f(s) = \\ &= P(s) \cdot R(P, s/s_0) x_0 + f(s) = P(s)x + f(s). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Полученный результат служит доказательством (2.21) в силу единственности решения уравнения (2.20). Формула (2.21) носит название формулы Коши, а матрица $R(P, s/\tau)$ именуется матрицей Коши.

2.4. Матрицант с единичным определителем. Пусть у нас имеется уравнение

$$R' = P(s)R, \quad (2.23)$$

где в матрице $P(s)$ все диагональные элементы равны нулю

$$P_{\alpha\alpha}(s) \equiv 0, \quad \langle \alpha = 1, 2, \dots, n \rangle. \quad (2.24)$$

Как следует из (2.14), определитель такой матричной функции постоянен и тождественно равен единице,

$$|R| \equiv 1. \quad (2.25)$$

Докажем теорему, которая позволит решение уравнения

$$x' = V(s)x \quad (2.26)$$

где в матричной функции $V(s)$ на главной диагонали имеется хотя бы один отличный от нуля элемент, сводить к решению уравнения

$$z' = P(s)z, \quad (2.27)$$

где в матричной функции $P(s)$ на главной диагонали стоят только нули.

Теорема 2.1. Пусть имеются два уравнения:

$$R'(V, s/s_0) = V(s) \cdot R(V, s/s_0), \quad R(V, s_0/s_0) = I_n; \quad (2.28)$$

$$R'(P, s/s_0) = P(s) \cdot R(P, s/s_0), \quad R(P, s_0/s_0) = I_n; \quad (2.29)$$

где

$$P_{ik}(s) = [1 - \delta(i,k)] \exp \int_{s_0}^s [V_{kk}(z) - V_{ii}(z)] dz \cdot V_{ik}(s). \quad (2.30)$$

Тогда матрицанты $R(V, s/s_0)$ и $R(P, s/s_0)$ связаны между собой выражением

$$R_{ik}(V, s/s_0) = R_{ik}(P, s/s_0) \cdot \exp \int_{s_0}^s V_{ii}(s) ds; \quad \langle i, k = 1, 2, \dots, n \rangle \quad (2.31)$$

Доказательство. Покажем, что справедливость выражений (2.30) и (2.31), где $R(P, s/s_0)$ удовлетворяет уравнению (2.29), приводит к тому, что $R(V, s/s_0)$ удовлетворяет уравнению (2.28). Для этого продифференцируем обе части равенства (2.30) и подставим в них (2.29) и (2.30).

$$\begin{aligned}
 R'_{ik}(V, s/s_0) &= V_{ii}(s) \cdot R_{ik}(V, s/s_0) + R'_{ik}(P, s/s_0) \exp \int_{s_0}^s V_{ii}(\tau) d\tau = \\
 &= V_{ii}(s) R_{ik}(V, s/s_0) + P_{iz}(s) \cdot R_{zk}(P, s/s_0) \exp \int_{s_0}^s V_{ii}(\tau) d\tau = \\
 &= [1 - \delta(i, z)] \exp \int_{s_0}^s [V_{zz}(\tau) - V_{ii}(\tau)] d\tau \cdot R_{zk}(P, s/s_0) \exp \int_{s_0}^s V_{ii}(\tau) d\tau + \\
 &+ V_{ii}(s) \cdot R_{ik}(V, s/s_0) = \\
 &= \delta(i, z) V_{iz}(s) R_{ik}(V, s/s_0) + [1 - \delta(i, z)] V_{iz}(s) R_{zk}(V, s/s_0) = \\
 &= V_{iz}(s) \cdot R_{zk}(V, s/s_0), \quad (z = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

(2.32)

Поскольку при $s = s_0$

$$R_{ik}(V, s_0/s_0) = R_{ik}(P, s_0/s_0) = I_n, \quad (2.33)$$

то удовлетворение $R(V, s/s_0)$ уравнению (2.28) доказано. Аналогично можно показать, что если $R(V, s/s_0)$ подчиняется уравнению (2.28) и связано с $R(P, s/s_0)$ выражением (2.31), где $P(s)$ определяется через $V(s)$ согласно (2.30), то $R(P, s/s_0)$ удовлетворяет уравнению (2.29).

Таким образом от уравнения для матрицанта с переменным

определителем всегда можно перейти к уравнению для матрицанта с постоянным определителем.

§ 3. Рекурсивные методы вычисления матрицанта.

3.1. Матричная ступенчатая функция. Пусть имеется кусочно-непрерывная матричная функция $V(s)$, заданная на некотором промежутке $\bar{I} = [a, b]$. Возьмем некоторый промежуток $I = [s_0, s]$, где $s_0 \geq a$, $s \leq b$ и разобьем его на n частей, введя промежуточные точки s_1, s_2, \dots, s_{n-1} , и положим

$$\Delta s_j = s_j - s_{j-1}, \quad (j = 1, 2, \dots, n; s_0 = s). \quad (3.1)$$

Пусть все точки разрыва функции входят в число точек разбиения (промежуточных точек). Выберем в интервале $I_j = (s_{j-1}, s_j)$ некоторую точку \bar{s}_j и значение функции $V(s)$ в точке \bar{s}_j обозначим через $V(j)$.

$$V(j) \equiv V(\bar{s}_j). \quad (3.2)$$

Заменим (аппроксимируем) исходную функцию $V(s)$ некоторой ступенчатой функцией $V(j)$ с разбиением ν . Ступенчатую функцию определяют два арифметических вектора:

$$\tilde{\Delta s}(\nu) = \|\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\|, \quad (3.3)$$

$$\tilde{V}(\nu) = \|V(1), V(2), \dots, V(n)\|, \quad (3.4)$$

вектор разбиения функции $\Delta s(\nu)$ и вектор значений функции $V(\nu)$. Наибольший из промежутков разбиения обычно называют мелкостью разбиения, который мы обозначим через $|\nu|$.

$$|\mathcal{V}| = \max_j \Delta S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

3.2. Кортж матричной функции. Пусть имеется набор чисел ρ , где $\rho = 1, 2, \dots, \beta$ и пусть заданы числа / плавающие индексы / $n(\rho)$, которые образуют одну из возможных перестановок чисел ρ , т.е. $n(\rho) = 1, 2, \dots, \beta$. Из значений компонент векторов $\Delta S(\mathcal{V})$ и матричных элементов $V_{n(\rho), n(\kappa)}$, где $\rho, \kappa = 1, 2, \dots, \beta$, образуем элементы матричного кортежа $\langle A_{1, \beta}^{\beta n+1} (V, \mathcal{V}) \rangle$ следующим образом:

$$1. \quad a_{\beta(j-1)+\rho, \beta(j-2)+\ell+\beta\delta(1,\rho)}^{(n)} = \delta(\rho, \ell) + V_{n(\rho), n(\ell)}(j) \Delta S_j +$$

$$+ (1 - \delta(\rho, \ell)) \delta(1, \rho) \cdot b_e \left(V_{n(1), n(\ell)}(j+1) \Delta S_{j+1} - V_{n(1), n(\ell)}(j) \Delta S_j \right),$$

$$\ell \geq \rho, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad V(n+1) = V(0) = 0 \quad (\Delta S_{n+1} = \Delta S_0 = 0).$$

$$2. \quad a_{\beta(j-1)+\rho, \beta(j-1)+\ell}^{(n)} = V_{n(\rho), n(\ell)}(j) \Delta S_j,$$

$$\ell < \rho, \quad \rho \neq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Такой кортеж будем называть кортежем матричной функции $V(s)$ относительно разбиения \mathcal{V} . Число b_e / весовой множитель / здесь является произвольным параметром. При вычислении элементов кортежа матричной функции часто полагают $b_e = 1/2$. Под матричными элементами $V_{n(\rho), n(\ell)}(j)$ можно понимать как матричные блоки, так и скалярные функции.

Пример 3.1. Вычислить элементы матричного кортежа $\langle A_{1,2}^5(V, \nu) \rangle$ для матричной функции $V(s)$, равной

$$V(s) = \begin{vmatrix} 0 & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & 0 \end{vmatrix}$$

на интервале $[0, 1]$ при равномерном разбиении ν ($\Delta s_1 = \Delta s_2 = \dots = \Delta s_n = h$). Положим $\beta = 1/2$, $n(p) = p$ ($p = 1, 2$). Значения функции $V(j)$ будем выбирать в середине соответствующего интервала ($j = 1, 2$). Как следует из значений индексов матричного кортежа, число участков разбиения в данном случае равно 2 ($n = 2$). Найдем элементы матричного кортежа ($\beta = 2$).

$$a_{10} = \frac{1}{2} V_{12}(1/4) \cdot h = \frac{1}{2} V_{12}(1) \cdot h.$$

$$a_{32} = \frac{1}{2} V_{12}(1/4) \cdot h + \frac{1}{2} V_{12}(3/4) \cdot h = \frac{1}{2} V_{12}(1) \cdot h + \frac{1}{2} V_{12}(2) \cdot h.$$

$$a_{54} = \frac{1}{2} V_{12}(3/4) \cdot h = \frac{1}{2} V_{12}(2) \cdot h.$$

$$a_{1,-1} = a_{20} = a_{31} = a_{42} = a_{53} = \bar{I}.$$

$$a_{21} = V_{21}(1/4) \cdot h = V_{21}(1) \cdot h.$$

$$a_{43} = V_{21}(3/4) \cdot h = V_{21}(2) \cdot h.$$

Матричный кортеж для функции $V(s)$ в данном случае состоит из двух линейных кортежей, во втором из которых стоят только единицы. В первом линейном кортеже элементы с первым нечетным индексом определяются функцией $V_{12}(s)$, а элементы с первым четным индексом - функцией $V_{21}(s)$.

3.3. Челнок-суммы кортежа матричной функции. Рассмотрим некоторые свойства матрицы челнок-сумм кортежа матричной функции $V(s)$. Введем функцию \mathcal{X} двух параметров k и p в виде

$$\mathcal{X}(k, p) = \beta k - 2 + p + \beta \delta(1, p) \quad (3.6)$$

и рассмотрим левые челнок-суммы кортежа матричной функции

$V(s)$:

$$\langle A_{1, \beta}^{\beta n + 1}(n, V, \nu) \rangle \Big| \sum_{\mathcal{X}(0, t) + 1}^{\mathcal{X}(n, p)} = \sum_{\mathcal{X}(0, t) + 1}^{\mathcal{X}(n, p)} (n); \quad p, t = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Свойство 1. Для $p \neq 1$ справедливо равенство:

$$\sum_{\mathcal{X}(0, t) + 1}^{\mathcal{X}(k-1, p)} (k) \equiv \sum_{\mathcal{X}(0, t) + 1}^{\mathcal{X}(k-1, p)} (k-1). \quad (3.8)$$

Доказательство. При $p \neq 1$ самый большой первый индекс элементов кортежа $\langle A_{1, \beta}^{\beta(k-1)+1}(k, V, \nu) \rangle$, входящих в челнок-сумму $\sum_{\mathcal{X}(0, t) + 1}^{\mathcal{X}(k-1, p)} (k-1)$, равен $\beta(k-2) + p$, который при любых p меньше, чем $\beta(k-1) + 1$. Но, как следует из определения элементов кортежа матричной функции,

$$\langle A_{1, \beta}^{\beta(k-2)+p}(k, V, \nu) \rangle = \langle A_{1, \beta}^{\beta(k-2)+p}(k-1, V, \nu) \rangle, \quad p \neq 1. \quad (3.9)$$

Так как все элементы кортежей равны, то равны и их челнок-суммы, что доказывает свойство 1.

Свойство 2. Для $p = 1$ имеет место равенство:

$$\sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)} (k) = \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)} (k-1) + \Delta S_k \cdot \sigma \sum_{\ell=2}^{\beta} V_{n(t), n(\ell)} (k) \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1, \ell)} (k-1). \quad (3.10)$$

Доказательство. По определению левых челнок-сумм и в силу свойства 1 имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)} (k) &= a_{\beta(k-1)+1, \beta(k-1)+1-i} (k, V, \vartheta) \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)-i} (k) = \\ &= a_{\beta(k-1)+1, \beta(k-1)+1-i} (k, V, \vartheta) \cdot \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)-i} (k-1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Запишем последнее выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)} (k) &= \left[a_{\beta(k-1)+1, \beta(k-1)+1-i} (k, V, \vartheta) - a_{\beta(k-1)+1, \beta(k-1)+1-i} (k-1, V, \vartheta) \right] \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)-i} (k-1) + \\ &+ a_{\beta(k-1)+1, \beta(k-1)+1-i} (k-1, V, \vartheta) \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,1)-i} (k-1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Произведя замену индексов

$$\beta+1-i = \ell, \quad (i, \ell = 1, 2, \dots, \beta) \quad (3.13)$$

и, учитывая определение элементов кортежа матричной функции, получим

$$\sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,t)} (k) = \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,t)} (k-1) + \Delta S_k \cdot \sum_{e=2}^{\beta} G_e \cdot V_{n(t), n(e)} \cdot \sum_{x(0,t)+1}^{x(k-1,e)} (k-1), \quad (3.14)$$

что и составляет доказательство свойства 2.

Упражнение 3.1. Показать, используя свойства I и 2, что членок-суммы матричного кортежа удовлетворяют следующему разностному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{x(0,t)+1}^{x(n,p)} (n) - \sum_{x(0,t)+1}^{x(n-1,p)} (n-1) \right] \cdot \frac{1}{\Delta S_n} = \\ & = \sum_{e=p}^{\beta} V_{n(p), n(e)} (n) \left\{ \delta(t,p) \cdot (1 - G_e) \cdot \left[\sum_{x(0,t)+1}^{x(n-\delta(t,e),e)} (n-\delta(t,e)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{x(0,t)+1}^{x(n-1,e)} (n-1) \right] + \sum_{x(0,t)+1}^{x(n-1,e)} (n-1) \right\} + \\ & + \sum_{e=1}^{p-1} V_{n(p), n(e)} (n) \cdot \sum_{x(0,t)+1}^{x(n-\delta(t,e),e)} (n-\delta(t,e)) + \\ & + \Delta S_n \cdot V_{n(p), n(t)} (n) \cdot \sum_{e=2}^{\beta} G_e \cdot V_{n(t), n(e)} (n) \sum_{x(0,t)+1}^{x(n-1,e)} (n-1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$x(n,p) = \beta n - 2 + p + \beta \delta(t,p); \quad p, t = 1, 2, \dots, \beta. \quad (3.16)$$

Упражнение 3.2. Показать, что имеет место равенство:

$$\sum_{x(0,t)+1}^{x(0,p)} (0) = \delta(p,t). \quad (3.17)$$

3.4. Представление матрицанта в виде челнок-интеграла.

Рассмотрим предельный переход в следующем выражении

$$\lim_{\substack{|\mathcal{D}| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta S_n} \left[\sum_{x(0,t)+1}^{x(n,p)} (n) - \sum_{x(0,t)+1}^{x(n-1,p)} (n-1) \right] = \quad (3.18)$$

$$= \frac{d}{ds} \left[\lim_{\substack{|\mathcal{D}| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{x(0,t)+1}^{x(n,p)} (n) \right] = \frac{d}{ds} \left[\langle n(p), n(t) | \int_{s_0}^s V(s) ds \right]$$

Здесь через $\langle n(p), n(t) | \int_{s_0}^s V(s) ds$ мы обозначили предел челнок-суммы, который назовем челнок-интегралом. Переходя к пределу в равенственных уравнениях (3.15-3.16), получим

$$\frac{d}{ds} \left[\langle n(p), n(t) | \int_{s_0}^s V(s) ds \right] = V_{n(p), n(t)}(s) \cdot \langle n(t), n(t) | \int_{s_0}^s V(s) ds \quad (3.19)$$

Учитывая (3.17), находим, что доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Матрицант $R(V, s/s_0)$ уравнения

$$x' = V(s) ds \quad (3.20)$$

суть левый челнок-интеграл кортежа матричной функции $V(s)$:

$$R(V, s/s_0) = \left\| \langle n(p), n(t) | \int_{s_0}^s V(s) ds \right\|. \quad (3.21)$$

Следствие 1. Матричные элементы матрицанта $R(V, s/s_0)$ приближенно равны соответствующим челнок-суммам кортежа матричной функции $V(s)$ при выбранном разбиении \mathcal{D} .

$$R_{n(p), n(t)}(V, s/s_0) \cong \sum_{x(0,t)+1}^{x(n,p)} (n, V, \nu), \quad (3.22)$$

$(n(p), n(t), p, t = 1, 2, \dots, \beta).$

Следствие 2. Для матричной функции $P(s)$, след которой равен нулю,

$$\langle P(s) \rangle \equiv 0, \quad (3.23)$$

определитель приближенного матрицанта, вычисляемого с помощью челнок-сумм, равен определителю точного матрицанта на любом шаге вычислений

$$|R(P, s/s_0)| = \text{Det} \left\| \sum_{x(0,t)+1}^{x(n,p)} (n, P, \nu) \right\| = 1. \quad (3.24)$$

Это свойство приближенного матрицанта является основным отличием вычислительной схемы определения матрицанта с помощью челнок-сумм от любых других вычислительных схем (например, схем Рунге-Кутты). Таким образом, при вычислении решения уравнения

$$x' = P(s)x \quad (3.25)$$

с учетом (3.23) фазовый объем пучка будет оставаться постоянным на протяжении всего вычислительного процесса.

Упражнение 3.3. Показать, что решением матричного уравнения

$$M'(V, s/s_0) = M(V, s/s_0) \cdot V(s) \quad (3.26)$$

является правый челнок-интеграл кортежа матричной функции $V(s)$,

где правый челнок-интеграл, обозначаемый через

$$|n(p), n(t)\rangle \int_{s_0}^s V(s) ds,$$

равен

$$\begin{aligned} |n(p), n(t)\rangle \int_{s_0}^s V(s) ds &= \lim_{\substack{|\nu| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} |A_1^{\beta n+1}(n, V, \nu)\rangle \int_{x(0,p)+1}^{x(n,t)} = \\ &= \lim_{\substack{|\nu| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int_{x(0,p)+1}^{\nu} x(n,t) (n). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Пример 3.2. С помощью челнок-сумм вычислить приближенно элементы матрицанта для уравнения

$$R'(V, s/s_0) = V(s) \cdot R(V, s/s_0)$$

для точки $s=1$ ($s_0=0$), зная, что $R(V, 0/0) = 1$ и функция $V(s)$ имеет вид

$$V(s) = \begin{vmatrix} 0 & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & 0 \end{vmatrix}.$$

Считая, что $n(p) = p$, и используя кортеж, найденный в примере 3.1, найдем элементы матрицанта при разбиении промежутка $[0, 1]$ на два равных интервала ($\Delta s_j = \frac{1}{2}$, $j=1, 2$).

$$\begin{aligned} R_{21} \left(1/0 \right) &\cong \int_2^4 (2) = a_{43} S_2^3 + S_2^2 = a_{43} (a_{32} S_2^2 + S_2^1) + S_2^2 = \\ &= a_{43} (a_{32} a_{21} + 1) + a_{21} = \frac{1}{2} \left\{ V_{21} \left(\frac{3}{4} \right) + V_{21} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{8} V_{21} \left(\frac{3}{4} \right) V_{21} \left(\frac{1}{4} \right) \left[V_{12} \left(\frac{1}{4} \right) + V_{12} \left(\frac{3}{4} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$R_{11} (1/0) \cong S_2^5 (2) = a_{54} S_2^4 + S_2^3 =$$

$$= \frac{1}{2} V_{12} (3/4) \cdot h^2 \left\{ V_{21} (3/4) \left[1 + \frac{1}{2} h^2 V_{21} (1/4) (V_{12} (1/4) + V_{12} (3/4)) \right] + V_{21} (1/4) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} h^2 V_{21} (1/4) [V_{12} (1/4) + V_{12} (3/4)] + 1.$$

$$S_1^0 = 1. \quad S_1^1 = a_{10} = \frac{1}{2} V_{12} (1/4) \cdot h.$$

$$S_1^2 = a_{21} S_1^1 + S_1^0 = \frac{1}{2} V_{21} (1/4) V_{12} (1/4) \cdot h^2 + 1.$$

$$S_1^3 = a_{32} S_1^2 + S_1^1 = \frac{1}{2} h [V_{12} (1/4) + V_{12} (3/4)] \left[1 + \frac{1}{2} h^2 V_{21} (1/4) V_{12} (1/4) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} V_{12} (1/4) \cdot h.$$

$$R_{22} (1/0) = S_1^4 (2) = a_{43} S_1^3 + S_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} h^2 V_{21} (3/4) \left\{ [V_{12} (1/4) + V_{12} (3/4)] \left[1 + \frac{1}{2} h^2 V_{21} (1/4) V_{12} (1/4) \right] + \right.$$

$$\left. + V_{12} (1/4) \right\} + \frac{1}{2} V_{21} (1/4) V_{12} (1/4) + 1.$$

$$R_{12} (1/0) = S_1^5 (2) = a_{54} S_1^4 + S_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4} h^3 V_{12} (3/4) V_{21} (3/4) \left\{ [(V_{12} (1/4) + V_{12} (3/4)) (1 + \frac{1}{2} h^2 V_{21} (1/4) V_{12} (1/4)) + \right.$$

$$\left. + V_{12} (1/4)] + \frac{1}{2} V_{21} (1/4) V_{12} (1/4) h^2 + 1 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} h [V_{12} (1/4) + V_{12} (3/4)] \left[1 + \frac{1}{2} h^2 V_{21} (1/4) V_{12} (1/4) \right] + \frac{1}{2} V_{12} (1/4) \cdot h.$$

§ 4. Уравнения второго порядка.

Отдельно остановимся на вычислении матрицанта линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{ds} (p(s)x') + q(s)x = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) играет исключительную роль в различных областях физики и этим объясняется большое количество работ, посвященных данному уравнению. Записанное в нормальной форме, оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ p(s)x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p(s)x' \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где

$$V_{12}(s) = p^{-1}(s), \quad V_{21}(s) = -q(s). \quad (4.3)$$

Решение уравнения (4.2) будем искать с помощью матрицанта

$$\begin{pmatrix} x \\ p(s)x' \end{pmatrix} = R(V, s/s_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ p(s_0)x'_0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Пусть функция $V(s)$ - ступенчатая функция с n участками постоянства, и пусть $V(j)$ - значение функции $V(s)$ на j -ом участке постоянства ($j = 1, 2, \dots, n$).

Тогда простой проверкой можно убедиться, что матричные элементы матрицанта выражаются через челнок-суммы второго порядка:

$$R_{n(p), n(t)} (V, s_n/s_0) = F_{\substack{2n-2+p+2\delta(1,p) \\ t-1+2\delta(1,t)}} , \quad n(p), n(t), p, t=1,2; \quad (4.5)$$

где левые челнок-суммы второго порядка для функции $V(s)$ с нулями на главной диагонали определяются в виде

$$F_k^m = a_m F_k^{m-1} + F_k^{m-2}, \quad F_k^{k-1} = I, \quad F_k^{k-2} = 0, \quad (4.6)$$

а элементы кортежа имеют вид

$$a_{2j} = R_{n(2), n(1)} (V, s_j/s_{j-1}), \quad (4.7)$$

$$a_{2j-1} = \frac{1}{2} [R_{n(1), n(2)} (V, s_j/s_{j-1}) + R_{n(1), n(2)} (V, s_{j-1}/s_{j-2})] +$$

$$R_{n(2), n(1)}^{-1} (V, s_j/s_{j-1}) D_{n(2), n(1)} (j/j-1) + D_{n(1), n(2)} (j-1/j-2) R_{n(2), n(1)}^{-1} (V, s_{j-1}/s_{j-2}), \quad (4.8)$$

$$D_{n(\alpha), n(\beta)} (j/j-1) = R_{n(\alpha), n(\alpha)} (V, s_j/s_{j-1}) - I - \frac{1}{2} R_{n(\alpha), n(\beta)} (V, s_j/s_{j-1}) R_{n(\beta), n(\alpha)} (V, s_j/s_{j-1}), \quad (4.9)$$

$\alpha, \beta = 1, 2.$

Элемент a_{2j-1} можно записать также в виде

$$a_{2j-1} = a_{2j-1}^{(j)} + a_{2j-3}^{(j-1)}, \quad j=1, 2, \dots, n-1; \quad a_{2n+1}^{(n+1)} = a_{-1}^0 = 0. \quad (4.10)$$

При этом элементы a_{2j} и $a_{2j-1}^{(j)}$ для трех знаковых вариантов ступенчатой функции $V(s)$ выражаются следующим образом:

$$1. \underline{V_{n(2), n(1)}(j) \cdot V_{n(1), n(2)}(j) = -q(j) p^{-1}(j) = \omega^2(j) > 0} \quad (4.11)$$

$$\therefore a_{2j} = V_{n(2), n(1)}(j) \omega^{-1}(j) \operatorname{sh} \omega(j) \Delta S_j. \quad (4.12)$$

$$a_{2j-1}^{(j)} = V_{n(1), n(2)}(j) \omega^{-1}(j) \operatorname{th} \frac{1}{2} \omega(j) \Delta S_j. \quad (4.13)$$

$$2. \underline{V_{n(2), n(1)}(j) \cdot V_{n(1), n(2)}(j) = -q(j) p^{-1}(j) = -\omega^2(j) < 0.} \quad (4.14)$$

$$a_{2j} = V_{n(2), n(1)}(j) \omega^{-1}(j) \operatorname{sn} \omega(j) \Delta S_j. \quad (4.15)$$

$$a_{2j-1}^{(j)} = V_{n(1), n(2)}(j) \omega^{-1}(j) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega(j) \Delta S_j. \quad (4.16)$$

$$3. \underline{q(j) = 0.} \quad (4.17)$$

$$a_{2j} = V_{n(2), n(1)}(j) \Delta S_j, \quad (4.18)$$

$$a_{2j-1}^{(j)} = \frac{1}{2} V_{n(1), n(2)}(j) \Delta S_j. \quad (4.19)$$

Упражнение 4.1. Показать, что при кусочно-линейной аппроксимации функции $V(s)$ в уравнении (4.2) матричные элементы матрицанта можно приближенно вычислить по формулам (4.8-4.9), где

$$R_{n(\alpha), n(\beta)}(V, s_j/s_{j-1}) = \frac{1}{2} \Delta S_j [V_{n(\alpha), n(\beta)}(j) + V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1)], \quad (4.20)$$

$\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta.$

$$\begin{aligned} D_{n(\alpha), n(\beta)}(j/j-1) &= -D_{n(\beta), n(\alpha)}(j/j-1) = \\ &= \frac{1}{12} (\Delta S_j)^2 [V_{n(\alpha), n(\beta)}(j) V_{n(\beta), n(\alpha)}(j-1) - V_{n(\beta), n(\alpha)}(j) V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Формулы (4.5-4.9) с учетом (4.20) и (4.21) можно назвать формулами трапеций для вычисления челнок-интеграла.

Упражнение 4.2. Показать, что при кусочно-квадратичной аппроксимации функции $V(s)$ в уравнении (4.2) элементы матрицанта можно приближенно вычислять по формулам (4.5-4.9), где

$$R_{n(\alpha), n(\beta)}(V, s_j/s_{j-1}) = \frac{1}{6} \Delta s_j^2 [V_{n(\alpha), n(\beta)}(j) + 4V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1/2) + V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1)] \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} D_{n(\alpha), n(\beta)}(j/j-1) &= -D_{n(\beta), n(\alpha)}(j/j-1) = \\ &= \frac{1}{60} \Delta s_j^2 \left\{ 4V_{n(\alpha), n(\beta)}(j) V_{n(\beta), n(\alpha)}(j-1/2) - 4V_{n(\beta), n(\alpha)}(j) V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1/2) + \right. \\ &+ 4V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1/2) V_{n(\beta), n(\alpha)}(j-1) - 4V_{n(\beta), n(\alpha)}(j-1/2) V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1) + \\ &\left. + V_{n(\alpha), n(\beta)}(j) V_{n(\beta), n(\alpha)}(j-1) - V_{n(\beta), n(\alpha)}(j) V_{n(\alpha), n(\beta)}(j-1) \right\}, \quad (4.23) \\ &\alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned}$$

а $V(j-1/2)$ обозначает значение функции $V(s)$ в середине j -ого промежутка.

Совокупность формул (4.5-4.9) с учетом (4.22) и (4.23) можно назвать формулой парабол для приближенного вычисления челнок-интеграла.

Пример 4.1. Найти приближенные значения элементов матрицанта для функции $V(s)$, равной

$$V(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -s & 0 \end{vmatrix} \quad (4.42)$$

с помощью формулы трапеций для челнок-интеграла при равномерном разбиении для $n = 2$ в точке $S = h$ ($\Delta s_1 = \Delta s_2 = \frac{1}{2} h$).

Положим $n(1) = 1$, $n(2) = 2$. Элементы матрицанта для функции (4.24) равны

$$R_{11}(h/0) = 1 - \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \frac{h^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots, \quad R_{21}(h/0) = R'_{11}(h/0), \quad (4.25)$$

$$R_{12}(h/0) = h - \frac{h^4}{3 \cdot 4} + \frac{h^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots, \quad R_{22}(h/0) = R'_{12}(h/0). \quad (4.26)$$

Найдем приближенные значения для элементов $R_{11}(h/0)$ и $R_{12}(h/0)$ с помощью формулы трапеций для челнок-интеграла.

$$R_{12}(\frac{1}{2}h/0) = R_{12}(1/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{4}, \quad R_{12}(h/\frac{1}{2}h) = R_{12}(2/1) = \frac{1}{2}h. \quad (4.27)$$

$$D_{12}(2/1) = D_{12}(1/0) = D_{21}(2/1) = D_{21}(1/0) = 0. \quad (4.28)$$

$$R_{21}(1/0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{h^2}{8}.$$

$$R_{21}(2/1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \left(-h - \frac{1}{2}h\right) = -\frac{3}{8}h^2. \quad (4.29)$$

$$a_2 = \frac{h}{2}, \quad a_4 = \frac{h}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{16}h^2, \quad (4.30)$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{8}h^2 - \frac{1}{8}h^2\right) = -\frac{1}{4}h^2, \quad a_5 = -\frac{3}{16}h^2.$$

$$F_1^0 = 1, \quad F_1^1 = a_1 = -\frac{1}{16}h^2, \quad F_1^2 = a_2 a_1 + 1 = -\frac{1}{64}h^3 + 1.$$

$$F_1^3 = a_3 F_1^2 + F_1^1 = -\frac{1}{4}h^2 \left(1 - \frac{1}{64}h^3\right) - \frac{1}{16}h^2 = -\frac{1}{16}h^2 \left(5 - \frac{1}{16}h^3\right).$$

$$R_{11}(h/0) = F_1^4 = a_4 F_1^3 + F_1^2 = -\frac{1}{32} h^3 (5 - \frac{1}{16} h^3) + 1 - \frac{1}{64} h^3 = 1 - \frac{11}{64} h^3 + \frac{h^6}{512}$$

$$F_2^1 = 1. \quad F_2^2 = a_2 = \frac{1}{2} h. \quad F_2^3 = a_3 F_2^2 + F_2^1 = -\frac{1}{4} h^2 \cdot \frac{1}{2} h + 1 = 1 - \frac{1}{8} h^3$$

$$R_{12}(h/0) = a_4 F_2^3 + F_2^2 = \frac{1}{2} h (1 - \frac{1}{8} h^3) + \frac{1}{2} h = h - \frac{1}{16} h^4$$

Элементы кортежа в различных областях физики (электронная оптика, стеклянная оптика, голография, теория электрических цепей, электромагнитное поле в слоистых средах) имеют конкретное физическое содержание, что открывает дополнительные возможности для моделирования различных процессов и построения аналоговых устройств.

§ 5. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

5.1. Производное уравнение для нелинейного уравнения.

Пусть имеется нелинейное дифференциальное уравнение, записанное в виде

$$x' = \bar{f}(x, s) \quad (5.1)$$

где x — n -мерный вектор. Обозначим вектор x' через y :

$$x' \equiv y \quad (5.2)$$

и продифференцируем по s уравнение (5.1). Тогда получим

$$x'' = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} x' + \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \quad (5.3)$$

или

$$y' = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} y + \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}. \quad (5.4)$$

Обозначим матрицу Якоби $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ через $V(x, s)$, а вектор $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$ через $\bar{f}(x, s)$:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \equiv V(x, s), \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial s} \equiv f(x, s)$$

Тогда уравнение (5.4) запишется в виде

$$y' = V(x, s)y + f(x, s), \quad (5.5)$$

где

$$x(s) = \int_{s_0}^s y(s) ds. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.5) назовем производным уравнением для уравнения (5.1). По виду оно напоминает нормальную форму записи линейного неоднородного уравнения, но функции V и f здесь зависят не только от s , но и от x , определяемого уравнением (5.6)

5.2. Матрицант нелинейного уравнения. Введем матричную функцию $R(V(x, s), s/s_0)$, где

$$\bar{y} = R(V(x, s), s/s_0) \bar{y}(s_0); \quad R(V(x, s), s_0/s_0) = I, \quad (5.7)$$

которую будем называть матрицантом уравнения

$$\bar{y}' = V(x, s) \bar{y}. \quad (5.8)$$

Очевидно, что такой матрицант подчиняется нелинейному матричному дифференциальному уравнению

$$R'(V(x, s), s/s_0) = V(x, s) R(V(x, s), s/s_0). \quad (5.9)$$

5.3. О численном интегрировании нелинейных уравнений.

Используя понятие матрицанта нелинейного уравнения, можно построить вычислительную схему решения уравнения (5.1).

Пусть в начальный момент

$$S = S_0, \quad x(S_0) = x_0 \quad (5.10)$$

известно значение функции $V(x_0, S_0) = V_0$. Заменяя на первом интервале разбиения ΔS_1 функции $V(x, S)$ постоянной функцией V_0 , решим уравнение (5.9), после чего определим значение функции $y(\tau)$ на конце первого интервала согласно выражению

$$y(\tau) = R(V_0, S_1/S_0) \cdot x_0 + \int_{S_0}^{S_1} R(V_0, S_1/\tau) f(x_0, \tau) d\tau, \quad (5.11)$$

а значение $x(\tau)$ по формуле

$$x(\tau) = \int_{S_0}^{S_1} y(s) ds = \frac{1}{2} [y(\tau) + y(0)], \quad y(0) = \bar{f}(x_0, S_0). \quad (5.12)$$

Затем положим

$$S = S_1, \quad x(S_1) = x(\tau) \quad (5.13)$$

и сделаем аналогичную операцию, после чего положим $x(S_2) = x(\tau)$ и так далее. Данная процедура означает, что мы функции $V(x, S)$ и $f(x, S)$ заменяем ступенчатыми функциями при некотором разбиении \mathcal{V} , причем значения функции $V(j+1)$ и $f(j+1)$ мы получаем после интегрирования на j -ом промежутке. При этом

для вычисления матрицанта $R(V(x,s), s/s_0)$ можно пользоваться формулами для матрицанта линейного уравнения в виде членок-вумм, что при

$$\langle V(x,s) \rangle \equiv 0 \quad (5.14)$$

дает возможность вести вычисления для множества траекторий с сохранением их фазового объема на каждом участке приближенного интегрирования.

Глава 3.

ВЕКТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ И ПОДВИЖНЫЕ РЕПЕРЫ

§ 1. Подвижные реперы.

1.1. Аффинный репер. Пусть имеется действительное числовое пространство R^n с каноническим базисом \vec{i} в точке $O \in R^n$. Рассмотрим некоторое линейное преобразование, которое точку $O \in R^n$ переводит в точку $M \in R^n$, а набор векторов \vec{i} в набор векторов \vec{e} , и при этом выполняется единственное условие

$$|e_1, e_2, \dots, e_n| \neq 0, \quad (1.1)$$

где в левой части неравенства стоит определитель матрицы, образованной координатами векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ относительно канонического базиса. Говорят, что такое преобразование принадлежит группе аффинных линейных преобразований. Набор

$$(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = (M, \vec{e}),$$

удовлетворяющий условию (1.1), называется аффинным репером (или базисом), точка M называется началом репера. Мы можем рассмотреть репер, который зависит от одного или нескольких действительных параметров. Такой репер, зависящий от параметров, называют подвижным репером. Мы в дальнейшем будем иметь дело с подвижными ортонормированными реперами, зависящими от одного параметра (однопараметрическими реперами).

1.2. Движения репера. Бесконечно малый сдвиг подвижного репера определяют дифференциальные формы $dM, d\vec{e}_1, d\vec{e}_2, \dots, d\vec{e}_n$.

Можно показать, что такие дифференциальные формы записываются в виде

$$dM = \tilde{\omega} \vec{e}, \quad (1.2)$$

$$d\vec{e} = W\vec{e}, \quad (1.3)$$

где ω_k и W_{ij} ($k, i, j = 1, 2, \dots, n$) являются дифференциальными формами первой степени со скалярными значениями.

Формы W_{ij} для ортонормированных реперов удовлетворяют дополнительным соотношениям, которые получаются дифференцированием уравнения ортонормированности:

$$\vec{e} \vec{e}^T = I_n. \quad (1.4)$$

Имеем

$$d\vec{e} \cdot \vec{e}^T + \vec{e} \cdot d\vec{e}^T = 0. \quad (1.5)$$

Подставляя в (1.5) выражение для $d\vec{e}$ и $d\vec{e}^T$ из (1.3), получим

$$W\vec{e}\vec{e}^T + \vec{e}\vec{e}^T W^T = W + W^T = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, матрица W для ортонормированных реперов является антисимметричной (кососимметрической).

1.3. Репер Френе. Сопоставим каждой дифференцируемой кривой C в пространстве R^3 однопараметрическое семейство ортонормированных реперов в этом пространстве. Кривая C определяется некоторой дифференцируемой функцией $M(t)$ от действительного параметра t со значениями в R^3 . Каждому значению t сопоставим следующий репер: его началом является точка $M(t)$ на кривой C ; вектор $\vec{e}_1(t)$ -

это единичный касательный вектор к кривой C в точке $M(t)$; он ориентирован в направлении возрастания параметра t .

В силу сказанного

$$dM = \omega_1 \vec{i}_1, \quad (1.7)$$

так как векторы dM/dt и \vec{i}_1 пропорциональны.

Вектор $\vec{i}_2(t)$ выберем в виде единичного вектора, пропорционального вектору $d\vec{i}_1/dt$. Вектор \vec{i}_3 после выбора \vec{i}_1 и \vec{i}_2 определится однозначно в силу ортонормированности репера. Таким образом, каждому значению t мы сопоставим репер (M, \vec{i}) . Он называется репером Френе кривой C в точке t . Уравнения движения такого репера имеют вид

$$d\vec{i}_1 = W_{12} \vec{i}_2, \quad d\vec{i}_2 = -W_{12} \vec{i}_1 + W_{23} \vec{i}_3, \quad d\vec{i}_3 = -W_{23} \vec{i}_2. \quad (1.8)$$

Форму ω_1 запишем в виде $a(t) dt$. Согласно (1.7)

$$dM/dt = a(t) \vec{i}_1. \quad (1.9)$$

Следовательно, коэффициент $a(t) > 0$ и равен длине вектора dM/dt . Это означает, что форма $\omega_1 = a(t) dt$ равна дифференциалу de длины дуги e кривой C . Возьмем в качестве параметра на кривой C длину дуги e . Тогда дифференциальные формы W_{12} и W_{23} запишутся в виде $\kappa_3(e) de$ и $\kappa_4(e) de$ соответственно. Тем самым определяются две функции $\kappa_3(e)$ и $\kappa_4(e)$ на кривой C . Они называются кривизной (или первой кривизной) и кручением

или второй кривизной) и обозначаются соответственно через $\kappa = 1/\rho$ и $\tau = 1/\zeta$, где ρ - радиус кривизны, ζ - радиус кручения.

Используя обозначение матрицы $P(\kappa)$

$$P(\kappa) = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_3 & -\kappa_2 \\ -\kappa_3 & 0 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & -\kappa_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

уравнение движения репера Френе запишем в виде

$$\frac{dM}{ds} = \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{i}}{ds} = P(\kappa)\vec{i}, \quad (1.11)$$

где

$$\kappa_1 = \tau = \frac{1}{\zeta}, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = \kappa = \frac{1}{\rho}. \quad (1.12)$$

1.4. Репер Дарбу. Ориентировать дифференцируемую кривую - это значит в каждой точке $M \in C$ выбрать одно из двух возможных направлений единичного касательного вектора к C в точке M (так, чтобы этот вектор изменялся непрерывно вместе с M).

Для того, чтобы ориентировать поверхность S , достаточно выбрать в каждой точке $M \in S$ одну из двух единичных нормалей к S , причем выбранная нормаль должна непрерывно меняться вместе с M .

Пусть C - ориентированная кривая, лежащая на ориентированной поверхности S в R^3 . Сопоставим каждой точке $M \in C$ ортонормированный репер с началом в точке M , который называется репером Дарбу (кривой C относительно поверхности S). В качестве \vec{i}_1 выберем, как и в случае

репера Френе, единичный касательный вектор к кривой C в точке M . В качестве \vec{i}_2 возьмем единичный вектор, касательный к поверхности S в точке M , ортогональный к \vec{i}_1 и такой, что

$$|\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3| = 1,$$

где \vec{i}_3 - единичная нормаль, определяющая ориентацию поверхности S . Если в качестве параметра взять длину дуги на кривой C , то уравнения движения репера Дарбу записываются так:

$$\frac{dM}{de} = \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{i}}{de} = \rho(\kappa)\vec{i}, \quad (1.13)$$

где κ_1 - геодезическое кручение, κ_2 - нормальная кривизна, κ_3 - геодезическая кривизна.

Упражнение 1.1. Пусть \vec{i} - репер Френе, а \vec{e} - репер Дарбу, где $\vec{i}_1 = \vec{e}_1$, а ϑ - угол (\vec{i}_2, \vec{e}_3) между нормалью \vec{e}_3 к поверхности S и вектором \vec{i}_2 ; вектор \vec{i}_1 направлен по касательной к кривой C в сторону возрастания длины дуги, вектор \vec{i}_2 направлен по главной нормали к кривой C а вектор \vec{i}_3 - по бинормали; C - ортонормированная кривая на ориентированной поверхности S в пространстве R^3 .

Показать, что вектор кривизны K , характеризующий репер Дарбу, выражается через кривизну и кручение, определяющие репер Френе; следующим образом:

где ρ - единичный вектор, ϑ - угол между \vec{i}_2 и \vec{e}_3 .

$$\kappa_1 + \frac{d\vartheta}{de} = \frac{1}{\rho} \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{de}, \quad \kappa_2 = -\kappa \cos \vartheta = -\frac{1}{\rho} \cos \vartheta, \quad \kappa_3 = \frac{1}{\rho} \sin \vartheta. \quad (1.14)$$

$$\frac{dM}{de} = \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{i}}{de} = \rho(\kappa)\vec{i}. \quad (1.15)$$

§ 2. Подвижные системы координат.

2.1. Ортогональные системы отсчета. Рассмотрим систему координат (O, x) , орты которой составляют ортонормированный репер \vec{i} . Точку Q в такой системе можно характеризовать набором значений x_1, x_2, \dots, x_n . Для неподвижного репера \vec{i} бесконечно-малое перемещение точки Q запишется в виде

$$dQ = d\vec{x} \vec{i} = \vec{i} dx. \quad (2.1)$$

Рассмотрим также систему координат (O, z) , орты которой составляют подвижный ортонормированный репер \vec{i} , причем его движение определяется параметром z_λ , так что

$$\frac{dM}{dz_\lambda} = I(\lambda) \vec{i} = \vec{i} I(\lambda) = \vec{i}_\lambda, \quad \frac{d\vec{i}}{dz_\lambda} = W \cdot \vec{i} = \vec{i} \tilde{W},$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Точку Q будем тогда характеризовать вектором $z(x)$ и значением параметра z_λ , отсчитываемого вдоль кривой C , по которой движется точка M . Параметр z_λ можно считать единственной ненулевой компонентой вектора $z(\lambda)$. Обозначая тогда вектор z через

$$z = z(x) + z(\lambda), \quad (2.3)$$

будем называть его вектором в системе отсчета $(M(z_\lambda), z)$. Если при этом выполняется соотношение

$$d\vec{Q} = d\vec{z} \cdot \vec{i} = \vec{i} dz, \quad (2.4)$$

то такую систему отсчета $(M(z_\lambda), z)$ будем называть ортогональной. Для неподвижного репера ортогональной системой отсчета

та служит ортогональная система координат (O, z) .

Рассмотрим неортогональную систему отсчета $(M(y_\lambda), y)$, которая связана с ортогональной системой отсчета $(M(z_\lambda), z)$ посредством соотношения

$$dy = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot dz = Y dz, \quad (2.5)$$

где $\frac{\partial y}{\partial z} = Y$ - так называемая матрица Якоби, определитель (якобиан) которой отличен от нуля

$$|Y| \neq 0. \quad (2.6)$$

Связь между dy и dz можно записать через матрицу Z обратную матрице Y :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = Z \cdot dy, \quad (2.7)$$

где

$$Z = Y^{-1}. \quad (2.8)$$

2.3. Движение точки в неортогональной системе отсчета.

Пусть имеется неортогональная система отсчета $(M(y_\lambda), y)$. Тогда движение точки Q сложится из двух движений: перемещения точки M вдоль кривой C и перемещения точки в плоскости $y_\lambda = \text{const}$ (изменения вектора $y(x)$):

$$dQ = d\vec{M} + d\vec{y}(x). \quad (2.9)$$

Уравнение движения репера в этом случае имеет вид

$$d\vec{M} = \vec{e}_\lambda dy_\lambda = \vec{e} I(\lambda) dy = d\vec{y} I(\lambda) \vec{e}. \quad (2.10)$$

$$d\vec{i} = W\vec{i} dy_\lambda, \quad d\tilde{i} = \tilde{i} \tilde{W} dy_\lambda. \quad (2.11)$$

Записав $\tilde{y}(x)$ в виде

$$\tilde{y}(x) = \tilde{i} \cdot y(x) = \tilde{i} I(x) y = \tilde{y} I(x) \vec{i} \quad (2.12)$$

и подставив в (2.9) уравнения движения репера (2.10) и (2.11, получим

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta} &= \tilde{i} I(\lambda) dy + \vec{i} I(x) dy + d\vec{i} I(x) y = \\ &= \tilde{i} dy + \tilde{i} \tilde{W} I(x) y dy_\lambda = d\tilde{y} \tilde{i} + dy_\lambda \tilde{y} I(x) W \vec{i}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Представив скаляр dy_λ в виде

$$dy_\lambda = \tilde{i}(\lambda) dy = d\tilde{y} \cdot i(\lambda), \quad (2.14)$$

следующим образом перепишем уравнение (2.13):

$$d\tilde{\theta} = \tilde{i} [I + \tilde{W} I(x) y \tilde{i}(\lambda)] dy = d\tilde{y} [I + i(\lambda) \tilde{y} I(x) W] \vec{i}. \quad (2.15)$$

Вводя ортогональную систему отсчета $(M(z_\lambda), z)$, где

$$dz = [I + \tilde{W} I(x) y \tilde{i}(\lambda)] dy, \quad (2.16)$$

найдем, что матрица Якоби Z в этом случае равна

$$Z = \frac{\partial z}{\partial y} = I + \tilde{W} I(x) y \tilde{z}(\lambda) = I - W y(x) \tilde{z}(\lambda), \quad (2.17)$$

поскольку матрица W является антисимметричной матрицей. Из (2.17) видно, что матрица Z является матрицей элементарного изгиба с λ -ым производящим столбцом, определитель которой равен

$$\begin{aligned} |Z| = Z_{\lambda\lambda} &= 1 - \tilde{z}(\lambda) W y(x) \tilde{z}(\lambda) i(\lambda) = \\ &= 1 - \tilde{z}(\lambda) W y(x) = 1 + \tilde{y}(x) W i(\lambda), \end{aligned} \quad (2.18)$$

а ее обратная матрица Y имеет вид

$$Y = Z^{-1} = [1 - \tilde{z}(\lambda) W y(x)]^{-1} [I + I(x) W y(x) \tilde{z}(\lambda)], \quad (2.19)$$

что является следствием формулы (4.16) главы 1.

§ 3. Векторные дифференциальные операции.

3.1. Оператор "набла". Введем арифметический вектор - оператор "набла" $\nabla(y)$, где

$$\nabla_i(y) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

и определим геометрический вектор $\vec{\nabla}$, который в ортогональной системе отсчета $(M(z_\lambda), z)$ имеет вид

$$\vec{\nabla}(z) = \tilde{\nabla}(z) \vec{i} = \tilde{\vec{i}} \cdot \nabla(z). \quad (3.2)$$

Элемент, на который действует оператор ∇ (или $\tilde{\nabla}$) будем, если это потребуется для ясности, внизу указывать стрелочной, идущей от оператора, например,

$$\vec{\nabla} \varphi = \tilde{\nabla} \vec{i} \varphi = \tilde{\vec{i}} \nabla \varphi. \quad (3.3)$$

Полный дифференциал функции многих переменных $\varphi(z)$, где $z - n$ -мерный вектор, через оператор ∇ (или $\tilde{\nabla}$) можно представить в виде

$$d\varphi(z) = d\tilde{z} \cdot \nabla(z) \cdot \varphi(z) = \tilde{\vec{i}}(z) \cdot dz \cdot \varphi(z).$$

Таким образом, символ полного дифференциала d можно рассматривать как скалярный символ, равный

$$d = \tilde{\nabla}(z) dz = d\tilde{z} \nabla(z), \quad (3.4)$$

который можно ставить как перед функцией, на которую он дейст-

вует, так и после нее.

Переход от системы отсчета $(M(z_\lambda), z)$ к системе отсчета $(M(y_\lambda), y)$ осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla(z) &= \tilde{Y} \nabla(y), \\ \tilde{\nabla}(z) &= \tilde{\nabla}(y) Y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

С помощью оператора "набла" для неортогональной системы отсчета $(M(y_\lambda), y)$, оператор $\nabla(y)$ в которой связан с оператором $\nabla(z)$ в ортогональной системе отсчета $(M(z_\lambda), z)$, одно из уравнений движения репера \tilde{i} запишем в виде

$$d\tilde{i} = W \tilde{i} \tilde{i}(\lambda) dy = \tilde{i} \tilde{\nabla}(z) dz = d\tilde{y} i(\lambda) \tilde{i} \tilde{W} = d\tilde{z} \nabla(z) \tilde{i} \quad (3.6)$$

Представляя dy в виде

$$dy = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot dz = Y dz, \quad (3.7)$$

получим

$$d\tilde{i} = W \tilde{i} \tilde{i}(\lambda) Y dz = \tilde{i} \tilde{\nabla}(z) dz, \quad (3.8)$$

откуда следует, что для ортогональной системы отсчета

$$\tilde{i} \tilde{\nabla}(z) = W \tilde{i} \tilde{i}(\lambda) Y, \quad (3.9)$$

$$\nabla(z) \tilde{i} = \tilde{Y} i(\lambda) \tilde{i} \tilde{W} = -\tilde{Y} i(\lambda) \tilde{i} W. \quad (3.10)$$

3.2. Дивергенция вектора в ортогональной системе отсчета.

Дивергенция вектора является скаляром. Для ортогональной системы отсчета ее можно записать в виде

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla}(z) \vec{a} = \underbrace{\vec{\nabla}(z) \vec{i} \cdot \vec{i}} \cdot \vec{a} + \vec{i} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}(z) \vec{i}} \cdot \vec{a}. \quad (3.11)$$

Поскольку для ортонормированного репера

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = I_n, \quad (3.12)$$

то, используя (3.10), получим

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla}(z) a + \vec{i} \cdot \tilde{Y} i(\lambda) \vec{i} \cdot \tilde{W} \cdot a = \underbrace{\vec{\nabla}(y) \gamma} a + \vec{i} \cdot \tilde{Y} i(\lambda) \vec{i} \cdot \tilde{W} a. \quad (3.13)$$

Обозначим вектор $\tilde{Y} i(\lambda)$ через c

$$\tilde{Y} i(\lambda) = c. \quad (3.14)$$

Тогда можно записать

$$\vec{c} = \vec{i} \cdot c = \tilde{c} \vec{i} = \tilde{i}(\lambda) \gamma \vec{i} = \tilde{i} \cdot \tilde{Y} i(\lambda). \quad (3.15)$$

Подставим (3.15) в (3.13), используя (3.12).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \underbrace{\vec{\nabla}(y) \gamma} a + \tilde{i}(\lambda) \gamma \tilde{W} a = \underbrace{\vec{\nabla}(y) \gamma} a - \tilde{i}(\lambda) \gamma W a = \\ &= \underbrace{\vec{\nabla}(z) \vec{a}} + \underbrace{\tilde{i}(\lambda) \gamma \tilde{W} \vec{a}} = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla}(z) + W \tilde{Y} i(\lambda)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поскольку для ортонормированного репера

Поскольку W - антисимметричная матрица ($W = -\tilde{W}$), то

(3.16) запишем в виде

используя (3.14) получим

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla}(z) a + \vec{i} \cdot \tilde{Y} i(\lambda) \vec{i} \cdot \tilde{W} \cdot a = \vec{\nabla}(y) \gamma a + \vec{i} \cdot \tilde{Y} i(\lambda) \vec{i} \cdot \tilde{W} a$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla}(z) \vec{a} = [\tilde{\nabla}(z) - \tilde{i}(\lambda) \gamma w] a. \quad (3.17)$$

Для неподвижного репера имеем обычное выражение для дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{a} = \tilde{\nabla}(z) a. \quad (3.18)$$

Выражение для дивергенции (3.17), записанное в тензорных обозначениях, известно под названием дивергенции абсолютного вектора \vec{a} , а также под названием дивергенции в криволинейной системе координат.

3.3. Ротор вектора в ортогональной системе отсчета. Ротор вектора является также вектором, который в ортогональной системе отсчета записывается следующим образом (для трехмерных векторов и операторов):

$$\operatorname{rot} \vec{b} = \vec{\nabla}(z) \times \vec{b} = \underbrace{\tilde{\nabla}(z) \vec{i} \times \vec{b} \vec{i}} + \vec{i} \cdot \underbrace{\nabla(z) \times \vec{i}} \cdot \vec{b}. \quad (3.19)$$

Используя соотношение (3.49) из 1 главы

$$\vec{i} \times \tilde{a} \vec{i} = \vec{i} \cdot \tilde{a} \times \vec{i} = \tilde{p}(a) \vec{i}, \quad (3.20)$$

где

$$p(a) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{array} \right\|, \quad (3.21)$$

получим, учитывая (3.10),

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{b} &= \underbrace{\tilde{\nabla}(z)} \tilde{\rho}(b) \vec{i} + \vec{i} \times \underbrace{\tilde{\nabla}(z)} \vec{i} \cdot b = \\
 &= -\tilde{\nabla}(z) \rho(b) \vec{i} - \vec{i} \times \tilde{\gamma} i(\lambda) \vec{i} W \cdot b = \\
 &= \tilde{\nabla}(z) \tilde{\rho}(b) \vec{i} + \vec{i} \tilde{\gamma} i(\lambda) \times \vec{i} \tilde{W} \cdot b = \tilde{\nabla}(z) \tilde{\rho}(b) \vec{i} + \vec{c} \times \vec{d},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

где

$$\vec{c} = \vec{i} \tilde{\gamma} i(\lambda) = \tilde{\gamma}(\lambda) \gamma \vec{i}, \quad \vec{d} = \vec{i} \cdot \tilde{W} b = \tilde{b} W \vec{i}, \tag{3.23}$$

$$c = \tilde{\gamma} i(\lambda), \quad d = \tilde{W} b. \tag{3.24}$$

Но поскольку в соответствии с выражением (3.42) из 1 главы векторное произведение $\vec{c} \times \vec{d}$ можно представить в виде

$$\vec{c} \times \vec{d} = \tilde{c} \tilde{\rho}(d) \vec{i}, \tag{3.25}$$

то получим

$$\vec{c} \times \vec{d} = \tilde{\gamma}(\lambda) \gamma \tilde{\rho}(\tilde{W} b) \vec{i} = -\tilde{\gamma}(\lambda) \gamma \rho(\tilde{W} b) \vec{i}. \tag{3.26}$$

Используя формулу (3.39) из 1 главы

$$\rho(\tilde{\rho}(k) \cdot b) = \tilde{\rho}(k) \cdot \rho(b) - \rho(b) \tilde{\rho}(k) \tag{3.27}$$

и учитывая, что в трехмерном пространстве

$$\tilde{W} = \tilde{\rho}(k) = -\rho(k), \tag{3.28}$$

где k - вектор кривизны, запишем (3.26) в виде

$$\begin{aligned} \vec{c} \times \vec{d} &= -\tilde{\epsilon}(\lambda) Y [\tilde{P}(\kappa) P(\nu) - P(\nu) \tilde{P}(\kappa)] \vec{i} = \\ &= \tilde{\epsilon}(\lambda) Y [P(\kappa) P(\nu) - P(\nu) P(\kappa)]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тогда окончательное выражение для $\text{rot } \vec{b}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{b} &= \vec{\nabla}(z) \tilde{P}(\nu) \vec{i} + \tilde{\epsilon}(\lambda) Y [P(\kappa) P(\nu) - P(\nu) P(\kappa)] \vec{i} = \\ &= \left\{ \vec{\nabla}(z) \tilde{P}(\nu) + \tilde{\epsilon}(\lambda) Y [P(\kappa) P(\nu) - P(\nu) P(\kappa)] \right\} \vec{i} = \\ &= \tilde{\epsilon} \left\{ P(\nu) \nabla(z) + [P(\nu) P(\kappa) - P(\kappa) P(\nu)] \tilde{Y} \epsilon(\lambda) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Используя связь между $\nabla(z)$ и $\nabla(y)$, перепишем (3.30)

в виде

$$\text{rot } \vec{b} = \vec{\nabla}(z) \times \vec{b} = \vec{z} = \tilde{\epsilon} z = \tilde{z} \vec{i}, \quad (3.31)$$

$$z = P(\nu) \tilde{Y} \nabla(y) + [P(\nu) P(\kappa) - P(\kappa) P(\nu)] \tilde{Y} \epsilon(\lambda), \quad (3.32)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= [1 - \tilde{\epsilon}(\lambda) P(\kappa) y(x)]^{-1} [I + I(x) P(\kappa) y(x) \tilde{\epsilon}(\lambda)], \\ \tilde{Y} &= [1 - \tilde{\epsilon}(\lambda) P(\kappa) y(x)]^{-1} [I - \epsilon(\lambda) \tilde{y}(x) P(\kappa) I(x)]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

для неподвижного репера

$$P(\kappa) = 0, \quad Y = Z = I, \quad \nabla(y) = \nabla(z) = \nabla, \quad (3.34)$$

и поэтому выражение для $\text{rot } \vec{b}$ в неподвижной системе координат имеет вид

$$\text{rot } \vec{b} = \vec{z} = \vec{i} z = \tilde{z} \vec{i}, \quad (3.35)$$

где

$$z = \rho(\vec{b}) \cdot \nabla, \quad (3.36)$$

$$\tilde{z} = -\tilde{\nabla} \cdot \rho(\vec{b}). \quad (3.37)$$

Выражения (3.31) и (3.32) в тензорной форме записи носят название ротора абсолютного вектора или ротора в криволинейной системе координат.

3.4. Значение ортогональной системы отсчета. Пусть имеется криволинейная система координат, орты которой образуют однопараметрический ортонормированный подвижный репер $\mathbf{z} = \mathbf{z}(M, \vec{i})$, начальная точка M которого движется по кривой C в сторону возрастания параметра y_λ . Тогда некоторую точку Q в пространстве R^n можно характеризовать вектором y в неортогональной системе отсчета, составляющая $y(\lambda)$ которого определяет положение точки Q при $y_\lambda = \text{const}$, а составляющая $y(\lambda)$ фиксирует положение точки Q вдоль кривой C . Пусть данной неортогональной системе отсчета $(M(y_\lambda), y)$ соответствует ортогональная система отсчета $(M(z_\lambda), z)$, которая связана с системой отсчета $(M(y_\lambda), y)$ следующим образом:

$$dz = Z dy = Y^{-1} dy. \quad (3.38)$$

$$Z = \frac{\partial z}{\partial y} = I - W_y(x) \tilde{i}(\lambda), \quad (3.39)$$

$$Y = Z^{-1} = [I - \tilde{i}(\lambda) W_y(x)]^{-1} [I + I(x) W_y(x) \tilde{i}(\lambda)], \quad (3.40)$$

где матрица $W = -\tilde{W}$ характеризует движение репера:

$$d\tilde{i} = W \tilde{i} \tilde{i}(\lambda) dy = W \tilde{i}^{\rightarrow} dy_{\lambda}. \quad (3.41)$$

Введение ортогональной системы отсчета позволяет записывать различные дифференциальные операции для подвижного репера в форме, аналогичной форме записи этих операций для неподвижного репера. Таким образом, законы природы, имеющие дифференциальный характер и записанные в неподвижной ортогональной системе координат, имеют ту же самую исходную форму записи в подвижной криволинейной системе координат для ортогональной системы отсчета.

Г Л А В А 4.

ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ.

В этой главе мы рассмотрим уравнения движения и их решение для одиночной заряженной частицы, а в следующей главе перейдем к рассмотрению одновременного движения некоторого множества (ансамбля) частиц с помощью теории огибающих. Для практических вычислений удобно пользоваться безразмерной системой единиц. В этом случае после постановки задачи мы переходим к безразмерным единицам, решаем задачу и результаты решения при необходимости можем снова привести к размерным единицам. Сам этап решения задачи при этом не зависит от размерности величин.

§ 1. Безразмерные величины.

1.1. Обозначения величин. Все размерные величины будем обозначать с помощью символа "звездочка", а безразмерные - без этого символа. Будем использовать следующие обозначения:
 E - напряженность электрического поля, D - электрическая индукция, ϵ - диэлектрическая проницаемость, q - заряд частицы, ρ - объемная плотность заряда, \vec{j} - плотность электрического тока, H - напряженность магнитного поля, B - магнитная индукция, μ - магнитная проницаемость, \vec{v} - скорость частицы, c - скорость света, β - отношение скорости частицы к скорости света,

$$\beta = \frac{\vec{v}}{c}, \quad (1.1)$$

m - масса частицы, m_0 - масса покоя, W - полная энергия частицы, W_0 - энергия покоя, γ - безразмерная энергия,

$$\gamma = \frac{W}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.2)$$

p - импульс частицы,

$$p = m \bar{v}; \quad (1.3)$$

t - время, F - сила, l - некоторая характерная длина, в единицах которой измеряются все линейные величины, \bar{x}_i ($i=1,2,3$) - координаты частицы в неподвижной ортогональной системе координат, x_4 - безразмерное время,

$$x_4 = \frac{ct}{l}; \quad (1.4)$$

ϵ_0 и μ_0 - соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости в пустоте; \mathcal{E} - величина вектора напряженности электрического поля,

$$\mathcal{E} = \sqrt{\tilde{E}E};$$

\mathcal{B} - величина вектора магнитной индукции,

$$\mathcal{B} = \sqrt{\tilde{B}B}. \quad (1.5)$$

1.2. Безразмерные величины. Если все величины выразить в системе единиц СИ, то безразмерные величины определяются через размерные следующим образом

$$p = \frac{q_0 l^2}{\epsilon_0 m_0 c^2} p^*, \quad \bar{j} = \mu_0 \frac{q_0 l^2}{m_0 c} \bar{j}^*, \quad E = \frac{q_0 l}{m_0 c^2} E^*, \quad B = \frac{q_0 l}{m_0 c} B^*,$$

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}^*}{l}, \quad \bar{F} = \frac{l}{m_0 c^2} F^*, \quad p = \frac{p^*}{m_0 c} = \gamma \bar{v} = \bar{u}, \quad (1.6)$$

$$v^* = \frac{dx^*}{dt}, \quad \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dx_4} = \frac{\bar{v}^*}{c}, \quad \sqrt{\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2} = \sqrt{\tilde{v} \bar{v}} = \beta.$$

Отдельные обозначения будем вводить по ходу изложения.

1.3. Четырехмерные векторы. Введем следующие обозначения для четырехмерных величин:

$$x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right\|, \quad u = \frac{dx}{ds}, \quad G = \left\| \begin{array}{cc} -\bar{1}_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (1.7)$$

$$ds = \sqrt{d\bar{x} G dx}. \quad (1.8)$$

В тех случаях, когда это . потребуется, будем различать трехмерные векторы, например, \bar{x} и четырехмерные векторы, например, x ,

где $\bar{x} = \left\| x_1, x_2, x_3 \right\|, \quad \tilde{x} = \left\| x_1, x_2, x_3, x_4 \right\|.$

Из обозначений (1.7) и (1.8) следует

$$u_4 = \frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{v}_1^2-\bar{v}_2^2-\bar{v}_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma, \quad (1.9)$$

$$\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{dx_4}{ds} \cdot \frac{d\bar{x}}{dx_4} = \gamma \bar{v} = p, \quad (1.10)$$

$$v = \frac{dx}{dx_4} = \frac{1}{\gamma} u. \quad (1.11)$$

Кроме того, будем использовать также следующие обозначения:

$$\bar{j} = \left\| \bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3, \rho \right\|, \quad (1.12)$$

$$\tilde{j} = \left\| \bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3 \right\|. \quad (1.13)$$

В дальнейшем будем считать, что как ρ — плотность электрического заряда, или количество заряда в единице объема, так и

\bar{j} — плотность электрического тока, или скорость протекания заряда сквозь единицу площади, относятся к свободным зарядам, движущимся в вакууме, причем ρ, \bar{j} и j связаны между собой соотношением

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \frac{d\vec{x}}{dx_4}, \quad (1.14)$$

$$j = \rho v = \frac{\rho}{\gamma} u. \quad (1.15)$$

§ 2. Уравнения Максвелла.

2.1. Векторная форма уравнений Максвелла. Для того, чтобы иметь полное и точное описание электромагнитных полей, которые могут изменяться со временем произвольным образом, необходимо записать полную систему уравнений Максвелла. В системе СИ она имеет вид

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}^* = \rho^*, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}^* = \vec{j}^* + \frac{\partial \vec{D}^*}{\partial t}; \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^* = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}^* = - \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$D^* = \epsilon E^*, \quad B^* = \mu H^*. \quad (2.3)$$

Для полей в вакууме ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$) безразмерные уравнения Максвелла можно записать следующим образом:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_4}; \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_4}. \quad (2.5)$$

2.2. Матричная форма уравнений в ортогональной системе координат. Введем векторные матрицы $P(B)$ и $P(B, E)$,

где

$$P(B) = \begin{vmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad P(B, E) = \begin{vmatrix} P(B) & E \\ \tilde{E} & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

$$P(B) = -P(-B) = -\tilde{P}(B) = \tilde{P}(-B), \quad (2.7)$$

$$P(B, E) = -P(-B, -E) = \tilde{P}(-B, E) = -\tilde{P}(B, -E), \quad (2.8)$$

а также векторную матрицу $P^*(B, E)$ и матрицу G , где

$$G = \begin{vmatrix} -\tilde{I}_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad P^*(B, E) = \begin{vmatrix} P(B) - E \\ \tilde{E} & 0 \end{vmatrix} = G P(-B, E). \quad (2.9)$$

$$P^*(B, E) = -P^*(-B, -E) = -\tilde{P}^*(B, E) = \tilde{P}^*(-B, -E). \quad (2.10)$$

Упражнение 2.1. Показать, что матрицы $P(a, b)$, $P^*(a, b)$ и G связаны между собой следующими соотношениями:

$$P(a, b) G = P^*(-a, -b) = \tilde{P}^*(a, b), \quad (2.11)$$

$$G P(a, b) = P^*(-a, b) = \tilde{P}^*(a, -b), \quad (2.12)$$

$$P^*(a, b) G = P(-a, -b), \quad (2.13)$$

$$G P^*(a, b) = P(-a, b), \quad (2.14)$$

$$P(a, b) \tilde{P}^*(b, -a) = \tilde{a} b \cdot G. \quad (2.15)$$

Вспоминая, что

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \tilde{a} \tilde{P}(b) \tilde{i} = \tilde{i} P(b) a, \quad (2.16)$$

в ортогональной системе координат (O, x) уравнение (2.4) запишем в виде $(\tilde{\nabla}(x) = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right\|)$:

$$\tilde{\nabla}(x) \tilde{P}^*(B, E) \tilde{i} = \tilde{j} \tilde{i} = \tilde{i} P^*(B, E) \cdot \nabla(x) = \tilde{i} \cdot j. \quad (2.17)$$

а уравнения (2.5) - в виде

$$\vec{\nabla}(x) \tilde{P}(E, B) \vec{i} = \vec{i} P(E, B) \nabla(x) = 0. \quad (2.18)$$

Если использовать только матрицы вида $P(\alpha, \beta)$, то, опуская орты, уравнения (2.17) и (2.18) можно записать в следующих двух вариантах

$$\begin{cases} \vec{\nabla}(x) P(B, E) \cdot G = \vec{j} \\ \vec{\nabla}(x) P(-E, B) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} G \cdot P(-B, E) \nabla(x) = j, \\ P(E, B) \cdot \nabla(x) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

При этом следует помнить, что

$$P(B, E) \cdot P(-E, B) = P(-E, B) P(B, E) = \tilde{B} E I_4. \quad (2.21)$$

2.3. Граничные условия. Пусть имеется поверхность, являющаяся границей двух сред: среды 1 и среды 2, и пусть \vec{n} - единичный вектор (трехмерный), нормальный поверхности раздела, где

$$\vec{n} = \tilde{n} \vec{i} = \vec{i} \cdot n, \quad (2.22)$$

$$\tilde{n} \cdot \vec{n} = 1. \quad (2.23)$$

Пусть $\rho_{пов}$ - поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела; $\vec{j}_{пов}$ - поверхностная плотность тока; $\vec{j}_{пов}$ - четырехмерный вектор поверхностной плотности тока,

$$\vec{j}_{пов} = \parallel \vec{j}_{пов}, \rho_{пов} \parallel. \quad (2.24)$$

Рассмотрим случай, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости являются произвольными функциями координат. В век-

торном виде граничные условия можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}) &= \rho_{\text{пов}}, \\ \vec{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) &= \vec{j}_{\text{пов}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) &= 0, \\ \vec{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Введем четырехмерный вектор \tilde{n} , где

$$\tilde{n} = \|\tilde{n}, 0\| = \|\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3, 0\|, \quad (2.27)$$

и с помощью этого вектора запишем граничные условия (2.25) и (2.26) в матричном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{n} [P(H^{(2)}, D^{(2)}) - P(H^{(1)}, D^{(1)})] G &= \vec{j}_{\text{пов}}, \\ \tilde{n} [P(-E^{(2)}, B^{(2)}) - P(-E^{(1)}, B^{(1)})] &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} G [P(-H^{(2)}, D^{(2)}) - P(-H^{(1)}, D^{(1)})] n &= \vec{j}_{\text{пов}}, \\ [P(E^{(2)}, B^{(2)}) - P(E^{(1)}, B^{(1)})] n &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.4. Уравнения Максвелла в криволинейной системе координат.

Пусть в пространстве R^3 имеется некоторая кривая C , вдоль которой движется точка M , являющаяся началом трехмерного ортонормированного репера. Пусть вдоль этой кривой отсчитывается параметр y_λ , а частица в плоскости $y_\lambda = \text{const}$ характеризуется вектором $\vec{y}(\lambda)$. Уравнения движения репера определяются уравнениями

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= dy_\lambda \cdot \vec{e}_\lambda, \quad \langle \lambda = 1, 2, 3 \rangle, \\ d\vec{e} &= W \vec{e} \tilde{\epsilon}(\lambda) dy = \tau(\lambda) dy \cdot W \vec{e}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Как мы знаем, неортогональной системе отсчета $(M(y_\lambda), y)$ можно сопоставить ортогональную систему отсчета $(M(z_\lambda), z)$, которые связаны между собой следующими соотношениями:

$$dz = Z dy = Y^{-1} dy, \quad (2.31)$$

$$Z = I - W y(x) \tilde{\tau}(\lambda), \quad (2.32)$$

$$Y = [I - \tilde{\tau}(\lambda) W y(x)]^{-1} [I + I(x) W y(x) \tilde{\tau}(\lambda)]. \quad (2.33)$$

Уравнения Максвелла в векторном виде (2.4) - (2.5) можно понимать как уравнения, записанные в ортогональной системе отсчета

$$\vec{\nabla}(\bar{z}) \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla}(\bar{z}) \times \vec{B} = \vec{j}(\bar{z}) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_4}, \quad (2.34)$$

$$\vec{\nabla}(\bar{z}) \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}(\bar{z}) \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_4}. \quad (2.35)$$

Используя полученные ранее выражения для дивергенции и ротора в ортогональной системе отсчета, запишем уравнения (2.34) и (2.35) в виде

$$\vec{\nabla}(\bar{z}) \cdot \vec{E} = [\vec{\nabla}(\bar{y}) Y - \tilde{\tau}(\lambda) Y P(\kappa)] E = \rho, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\bar{z}) \times \vec{B} &= [\vec{\nabla}(\bar{y}) Y \tilde{P}(B) + \tilde{\tau}(\lambda) Y (P(B)P(\kappa) - P(B)P(\kappa))] \vec{z} = \\ &= \vec{j}(\bar{z}) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_4}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\vec{\nabla}(\bar{z}) \cdot \vec{B} = [\vec{\nabla}(\bar{y}) Y - \tilde{\tau}(\lambda) Y P(\kappa)] B = 0, \quad (2.38)$$

$$\vec{\nabla}(\bar{z}) \times \vec{E} = [\vec{\nabla}(\bar{y}) Y P(E) + \tilde{\tau}(\lambda) Y (P(E)P(\kappa) - P(\kappa)P(E))] \vec{z} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_4}. \quad (2.39)$$

Здесь через $P(\kappa)$, как и ранее, обозначена трехмерная матрица W ,

$$W \equiv P(\kappa) \quad (2.40)$$

Введем в рассмотрение четырехмерный репер \vec{i} , такой, что \vec{i}_ν не зависит от параметра y_λ . Тогда, если через $P(\kappa, 0)$ обозначить матрицу.

$$P(\kappa, 0) = \left\| \begin{array}{cc} P(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (2.41)$$

уравнение движения четырехмерного репера будет иметь вид, аналогичный (2.30):

$$d\vec{M} = dy_\lambda \cdot \vec{i}_\lambda = d\tilde{y}(\lambda) \vec{i} = \tilde{i} dy(\lambda), \quad (2.42)$$

$$d\vec{i} = P(\kappa, 0) \vec{i} \tilde{i}(\lambda) dy, \quad (2.43)$$

где y - четырехмерный вектор,

$$y = \left\| \begin{array}{c} \bar{y} \\ y_4 \end{array} \right\| \quad (2.44)$$

причем $z_\nu = x_\nu$. Рассматривая четырехмерную матрицу Z

$$Z = I_4 - P(\kappa, 0) y(\lambda) \tilde{i}(\lambda), \quad (2.45)$$

видим, что $z_\nu = x_\nu = y_\nu$ ($Z_{\nu\nu} = 1$).

Четырехмерный вектор $\tilde{j}(z)$ можно выразить через четырехмерный вектор $\tilde{j}(y)$

$$\tilde{j}(z) = \tilde{j}(y) \tilde{Z}. \quad (2.46)$$

Вводя снова в рассмотрение матрицу $P(B, E)$, запишем уравнения (2.36)-(2.39) в четырехмерном виде:

$$\tilde{\nabla}(y) \Upsilon P(B, E) \cdot G + \tilde{i}(\lambda) \Upsilon [P(B, E) G P(K, 0) - P(K, 0) P(B, E) G] = \tilde{j}(y) \tilde{Z}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{\nabla}(y) \Upsilon P(-E, B) + \tilde{i}(\lambda) \Upsilon [P(-E, B) \cdot P(K, 0) - P(K, 0) P(-E, B)] = 0. \quad (2.48)$$

Можно записать также транспонированный вариант уравнений (2.47) и (2.48):

$$G \overleftarrow{P}(-B, E) \tilde{\Upsilon} \nabla(y) + [G \overleftarrow{P}(-B, E) \cdot P(K, 0) - P(K, 0) G \overleftarrow{P}(-B, E)] \tilde{\Upsilon} i(\lambda) = \tilde{j}(y) \tilde{Z} \quad (2.49)$$

$$\overleftarrow{P}(E, B) \tilde{\Upsilon} \nabla(y) + [\overleftarrow{P}(E, B) P(K, 0) - P(K, 0) \overleftarrow{P}(E, B)] \tilde{\Upsilon} i(\lambda) = 0. \quad (2.50)$$

Граничные условия для криволинейной системы координат получаются из уравнений (2.47)-(2.50) заменой $\nabla(y)$ на n и $j(y)$ на $j_{\text{пов}}$.

§ 3. Уравнение движения заряженных частиц.

3.1. Уравнение изменения энергии. Рассмотрим уравнение движения заряженной частицы, движущейся в вакууме

$$\frac{d}{dx_4} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v} \vec{v}}} \vec{v} \right] = \frac{d}{dx_4} (\gamma \vec{v}) = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.1)$$

где γ - безразмерная энергия частицы,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v} \vec{v}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{v} \tilde{v}}} \quad (3.2)$$

Продифференцируем обе части равенства (3.2) по безразмерному времени x_4 .

$$\frac{d\gamma}{dx_4} = (1 - \tilde{v} \tilde{v})^{-3/2} \cdot \tilde{v} \frac{d\tilde{v}}{dx_4} = \gamma^3 \tilde{v} \cdot \frac{d\tilde{v}}{dx_4} \quad (3.3)$$

Умножим обе части равенства (3.1) на \vec{v} .

$$\frac{d\gamma}{dx_4} \vec{v} \cdot \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dx_4} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (3.4)$$

Подставив в (3.4.) выражение для $\gamma \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dx_4}$, из (3.3), получим:

$$\frac{d\gamma}{dx_4} \left(\vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{d\gamma}{dx_4} = \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \frac{d\vec{x}}{dx_4} \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) показывает изменение энергии частицы, которое определяется электрическим полем.

3.2. Собственное время. Выражение (3.2) можно записать для четырехмерного вектора x в виде:

$$\gamma^2 d\tilde{x} G dx = dx_4^2 \quad (3.6)$$

Удобно ввести новую переменную S , связанную с x_4 согласно уравнению

$$\frac{dx_4}{dS} = \gamma. \quad (3.7)$$

Тогда уравнение (3.6) примет вид

$$dS^2 = d\tilde{x} G dx. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) называют часто метрической формой. В теории поверхностей оно носит название первой квадратичной формы поверхности в рассматриваемом четырехмерном пространстве. Матрицу G обычно именуют метрикой данного четырехмерного пространства.

В рассматриваемом случае метрика называется галилеевой метрикой и имеет вид

$$G = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \quad (3.9)$$

Переменную S называют собственным временем вдоль траектории частицы, ибо в системе, в любой момент движущейся вместе с частицей, ds , просто равно интервалу времени.

Можно представить себе четырехмерный подвижный репер, начальная точка M которого движется вдоль временной оси, так что орт времени \vec{l}_4 является постоянным. Тогда проекцией четырехмерного пространства при $x_4 = \text{const}$ будет обычное трехмерное евклидово пространство. Заряженная частица при этом будет характеризоваться вектором X , равным сумме векторов

$$X = x(\psi) + \left\| \begin{array}{c} \bar{x} \\ 0 \end{array} \right\| = x(\psi) + x(\psi).$$

3. Четырехмерная скорость. Введем четырехмерную скорость u

$$u = \frac{dx}{ds} = \gamma v. \quad (3.10)$$

Тогда выражение (3.6) можно записать в виде

$$\tilde{u} G u = 1. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) определяет гиперповерхность второго порядка в четырехмерном пространстве скоростей (u) . При движении частицы соответствующая ей точка в пространстве скоростей (u) движется по поверхности (3.11). Заметим, что $u_4 = \gamma$.

3.4. Матричная форма уравнений движения. Запишем вместе уравнения движения частицы и уравнение изменения энергии, используя матричную форму векторного произведения:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \gamma \tilde{E} \vec{l} + \tilde{u} \tilde{P}(B) \vec{l} = \vec{l} \gamma E + \vec{l} P(B) \vec{u}. \quad (3.12)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{du_y}{ds} = \tilde{E} \bar{u} = \tilde{u} E. \quad (3.13)$$

Здесь \bar{u} - трехмерный вектор скоростей, состоящий из трех первых компонент вектора u .

Уравнения (3.12) и (3.13) можно объединить в одно для четырехмерного вектора \vec{u} :

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \tilde{u} \tilde{P}(B, E) \vec{u} = \tilde{u} P(B, E) u. \quad (3.14)$$

Опуская орты, получим:

$$\frac{du}{ds} = P(B, E) u, \quad (3.15)$$

где матричная функция $P(B, E)$ является функцией от x :

$$P(B, E) \equiv P(B(x), E(x)).$$

Уравнение (3.15) по своей форме напоминает линейное дифференциальное уравнение. Как известно, если имеется уравнение

$$u = \frac{dx}{ds} = f(x), \quad (3.16)$$

то, дифференцируя его по S , можно получить уравнение

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial x} u. \quad (3.17)$$

Сравнивая (3.17) с (3.15), можно записать уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(B, E).$$

Используя уравнение

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad (3.19)$$

запишем уравнение движения частицы в восьмимерном фазовом пространстве

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ 0 & P(B, E) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где

$$P(B, E) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

3.5. Уравнения движения в постоянном магнитном поле.

Для магнитоэстатического поля уравнения движения упрощаются, так как в этом случае энергия частицы не меняется.

Для трехмерных векторов \bar{x} и \bar{u} , которые состоят из первых трех компонент векторов x и u , уравнения движения частицы в статическом магнитном поле в шестимерном фазовом пространстве приобретают вид

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

где

$$P(B) = \begin{vmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

При этом компоненты вектора \bar{u} связаны между собой соотношением

$$\bar{u} \bar{u} = \delta^2 - 1, \quad (3.24)$$

то есть движению частицы соответствует движение точки в пространстве скоростей (\bar{u}) по поверхности шара с радиусом $r = \sqrt{\delta^2 - 1}$.

3.6. Уравнения движения в криволинейной системе координат.

Вернемся к подвижным реперам. Пусть имеется трехмерный подвижной ортонормированный репер, уравнения движения которого суть

$$d\vec{M} = \vec{i}_\lambda dy_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, 3; \quad (3.25)$$

$$d\vec{i} = P(\kappa) \vec{i} dy_\lambda, \quad (3.26)$$

где κ - вектор кривизны. Для репера Френе ($\lambda = 1$):

$$\kappa_1 = \alpha = \frac{1}{\tau}, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = \kappa = \frac{1}{\rho}. \quad (3.27)$$

где τ - радиус кручения, ρ - радиус кривизны. Как и ранее, предполагается, что движение точки M , начала репера, происходит вдоль некоторой ориентированной кривой C , дифференциал дуги которой есть dy_λ . Вектором $\bar{y}(x)$ обозначается положение заряженной частицы (точки A) в плоскости

$y_\lambda = \text{const}$. Данному трехмерному реперу сопоставим четырехмерный репер \vec{i} путем добавления четвертой компоненты \vec{i}_4 , не зависящей от y_λ . Тогда движение четырехмерного репера

будет описываться уравнениями:

$$d\vec{M} = \vec{i}_\lambda dy_\lambda, \quad (3.28)$$

$$d\vec{i} = P(\kappa, 0) \vec{i} dy_\lambda = P(\kappa, 0) \vec{i} \vec{i}(\lambda) dy. \quad (3.29)$$

Пусть неортогональной системе отсчета $(M(y_\lambda), y)$ соответ-

существует ортогональная система отсчета $(M(z_\lambda), z)$, связанная с неортогональной посредством соотношения

$$dz = Z dy, \quad (3.30)$$

где

$$Z = \frac{\partial z}{\partial y} = I_\nu - P(\kappa, 0) y(x) \tilde{i}(\lambda), \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (3.31)$$

$$|Z| = Z_{\lambda\lambda} = 1 - \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) y(x), \quad (3.32)$$

$$Y = Z^{-1} = [1 - \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) y(x)]^{-1} [I_\nu + I(x) P(\kappa, 0) y(x) \tilde{i}(\lambda)]. \quad (3.33)$$

Тогда перемещение точки Q определится выражением

$$d\vec{Q} = \tilde{i} dz = d\tilde{z} \cdot \tilde{i}, \quad (3.34)$$

а скорость точки Q будет

$$\vec{u} = \tilde{i} \cdot u(z) = \tilde{u}(z) \tilde{i} \quad (3.35)$$

где

$$u(z) = \frac{dz}{ds} = Z \frac{dy}{ds} = Z u(y). \quad (3.36)$$

В ортогональной системе отсчета уравнения движения заряженной частицы имеют вид, аналогичный записи уравнений в ортогональной системе координат:

$$\frac{d\vec{u}(z)}{ds} = \tilde{u}(z) \tilde{P}(B, E) \tilde{i} = \tilde{i} P(B, E) \cdot u(z). \quad (3.37)$$

Раскроем левую часть уравнения (3.37)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{u}(z)}{ds} &= \frac{d}{ds} (\tilde{u}(z) \tilde{i}) = \frac{d}{ds} (\tilde{i} u(z)) = \\
 &= \frac{d\tilde{u}(z)}{ds} \tilde{i} + \tilde{u}(z) \frac{d\tilde{i}}{ds} = \\
 &= \frac{d\tilde{u}(z)}{ds} \tilde{i} + \tilde{u}(z) P(\kappa, 0) \tilde{i} \tilde{i}(\lambda) u(y) = \\
 &= \frac{d\tilde{i}}{ds} u(z) + \tilde{i} \frac{du(z)}{ds} = \\
 &= \tilde{i} \frac{du(z)}{ds} - \tilde{u}(y) \tilde{i}(\lambda) \tilde{i} P(\kappa, 0) u(z).
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Поскольку $\tilde{i}(\lambda) u(y)$ и $\tilde{u}(y) \tilde{i}(\lambda)$ есть скаляры, которые можно менять местами с другими сомножителями в произведении, то, подставляя $u(z)$ из (3.36), получим следующее уравнение движения:

$$Z \frac{du(y)}{ds} + \frac{dZ}{ds} u(y) - P(\kappa, 0) Z u(y) \tilde{u}(y) \tilde{i}(\lambda) = P(\beta, E) Z u(y),$$

которое можно записать также в виде

$$\frac{du(y)}{ds} = Y \left[P(\beta, E) Z u(y) + P(\kappa, 0) Z u(y) \tilde{u}(y) \tilde{i}(\lambda) - \frac{dZ}{ds} u(y) \right] \tag{3.39}$$

где

$$\frac{dZ}{ds} = - P(\kappa, 0) u(\lambda) \tilde{i}(\lambda) - P(\kappa', 0) \dot{u}_\lambda(y) y(\lambda) \tilde{i}(\lambda). \tag{3.40}$$

В последнем выражении штрихом обозначена производная по параметру y_λ ,

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{dy_\lambda}.$$

Учитывая, что

$$\tilde{u}(y) i(\lambda) = \tilde{z}(\lambda) u(y) = u_\lambda(y), \quad (3.41)$$

подставим значение матрицы Z в выражение в квадратных скобках в уравнении (3.39):

$$\begin{aligned} & P(B, E) \cdot Z \cdot u(y) + P(\kappa, 0) Z u(y) u_\lambda(y) - \frac{dZ}{ds} \cdot u(y) = \\ & = P(B, E) \cdot u(y) - P(B, E) \cdot P(\kappa, 0) y(x) \tilde{z}(\lambda) u(y) + P(\kappa, 0) u(y) u_\lambda(y) - \\ & - P^2(\kappa, 0) \cdot y(x) \tilde{z}(\lambda) u(y) u_\lambda(y) + P(\kappa, 0) u(x) \tilde{z}(\lambda) u(y) + P(\kappa', 0) u_\lambda(y) y(x) \tilde{z}(\lambda) u(y) = \\ & = [P(B, E) + u_\lambda(y) \cdot P(\kappa, 0)] u(y) - u_\lambda(y) [P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) y(x) + \\ & + u_\lambda(y) P(\kappa, 0) u(x) + u_\lambda^2(y) P(\kappa', 0) y(x) = \\ & = [P(B, E) + 2u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] u(x) + u_\lambda(y) [P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] i(\lambda) + \\ & + u_\lambda(y) [u_\lambda(y) P(\kappa', 0) - (P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)) P(\kappa, 0)] y(x). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тогда уравнение движения в криволинейной системе координат примет вид:

$$\frac{du}{ds} = Y w, \quad (3.43)$$

где

$$Y = [1 - \tilde{z}(\lambda) P(\kappa, 0) y(x)]^{-1} [\tilde{I}_v + \tilde{I}_v(x) P(\kappa, 0) y(x) \tilde{z}(\lambda)], \quad (3.44)$$

$$W = F u(x) + G y(x) + f, \quad (3.45)$$

$$F = P(B, E) + 2 u_\lambda(y) P(\kappa, 0), \quad (3.46)$$

$$G = u_\lambda(y) \{ u_\lambda(y) P(\kappa', 0) - [P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) \}, \quad (3.47)$$

$$f = u_\lambda(y) [P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] \varepsilon(\lambda) \quad (3.48)$$

В практических приложениях часто интересуются, как меняется вектор $u(x) = u(y(x))$ в зависимости от значения параметра y_λ . Умножив слева обе части уравнения (3.45) на $I_\nu(x)$, получим

$$\frac{du(x)}{ds} = \bar{G}(y) y(x) + \bar{F}(y) u(x) + \bar{f}(y), \quad (3.49)$$

где

$$\bar{G} = u_\lambda(y) I_\nu(x) Y \{ u_\lambda(y) P(\kappa', 0) - (P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)) P(\kappa, 0) \}, \quad (3.50)$$

$$\bar{F} = I_\nu(x) Y [P(B, E) + 2 u_\lambda(y) P(\kappa, 0)], \quad (3.51)$$

$$\bar{f} = u_\lambda(y) I_\nu(x) Y [P(B, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] \varepsilon(\lambda), \quad (3.52)$$

$$I_\nu(x) Y = [1 - \hat{\varepsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) y(x)]^{-1} I_\nu(x) [I_\nu + P(\kappa, 0) y(x) \hat{\varepsilon}(\lambda)]. \quad (3.53)$$

В шестимерном фазовом пространстве $y(x)$ и $u(x)$ уравнения движения в криволинейной системе координат записываются следующим образом:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} y(x) \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_\nu \\ \bar{G} & \bar{F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ u(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Отметим, что функции \bar{G} , \bar{F} и \bar{f} зависят от $y(x)$ и $u_\lambda(y)$, а ds связано с dy_λ посредством соотношения

$$dy_\lambda = u_\lambda \cdot ds. \quad (3.55)$$

При численном интегрировании уравнения (3.54) можно считать, что на каждом элементарном шаге интегрирования функции \bar{G} , \bar{F} и \bar{f} являются постоянными, которые определяются значениями $y(\lambda)$ и $u_\lambda(y)$ на предыдущем шаге. При таком подходе на каждом шаге уравнения (3.54) можно интегрировать как линейные уравнения.

3.7. Метрика криволинейного пространства. В ортогональной системе отсчета метрика имеет вид

$$ds^2 = d\tilde{z} G dz \quad (3.56)$$

Используя соотношение

$$dz = Z dy, \quad (3.57)$$

и переходя к неортогональной системе отсчета $(M(y_\lambda), y)$, получим

$$ds^2 = d\tilde{y} \tilde{Z} G Z dy = d\tilde{y} G(y) dy, \quad (3.58)$$

где

$$G(y) = \tilde{Z} G Z = [I_\nu + i(\lambda) \tilde{y}(\lambda) P(\kappa, 0)] G [I_\nu - P(\kappa, 0) y(\lambda) \tilde{z}(\lambda)]. \quad (3.59)$$

Разделив обе части равенства (3.56) на ds^2 получим

$$\tilde{u}(y) \tilde{Z} G Z \cdot u(y) = \tilde{v}(y) G(y) u(y) = 1. \quad (3.60)$$

Уравнение (3.60) описывает гиперповерхность в четырехмерном пространстве скоростей, по которой движется точка Q .

Переходя к переменной $y(\lambda)$, преобразуем выражение (3.56).

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\tilde{y}(\lambda) + d\tilde{y}(\lambda)) G(y) (dy(\lambda) + dy(\lambda)) = \\ &= dy_\lambda^2 \left[\frac{d\tilde{y}(\lambda)}{dy_\lambda} + \tilde{z}(\lambda) \right] G(y) \left[\frac{dy(\lambda)}{dy_\lambda} + i(\lambda) \right] = \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$= dy_\lambda^2 \left[\tilde{y}'(x) G(y) y'(x) + \tilde{\epsilon}(\lambda) G(y) y'(x) + \tilde{y}'(x) G(y) i(\lambda) + G_{\lambda\lambda}(y) \right].$$

Из последнего выражения найдем $u_\lambda(y)$.

$$u_\lambda(y) = \frac{dy_\lambda}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G_{\lambda\lambda}(y) + \tilde{\epsilon}(\lambda) G(y) y'(x) + \tilde{y}'(x) G(y) i(\lambda) + \tilde{y}'(x) G(y) y'(x)}} \quad (3.62)$$

Перед радикалом в выражении (3,60) мы выбрали знак (+), считая, что частицы движутся в сторону возрастания параметра y_λ .

В предыдущих рассуждениях ничего не говорилось о том, как выбирается кривая C , по которой движется начало реператочка M . В дальнейшем будем связывать выбор кривой C с существованием осевой частицы.

§ 4. О выборе подвижной системы координат.

4.1. Осевая частица. Пусть имеется такая частица, которая движется по той же самой ориентированной кривой C , по которой движется точка M , являющаяся началом четырехмерного подвижного репера. Такую частицу будем называть осевой частицей, а кривую C - осью пучка заряженных частиц. Очевидно, необходимыми и достаточными условиями для осевой частицы являются

$$\left(I_\nu(x) - I_\nu(y) \right) y(c) = 0, \quad \left(I_\nu(x) - I_\nu(y) \right) u(c) = 0. \quad (4.1)$$

Из этих условий следует

$$\left(I_\nu(x) - I_\nu(y) \right) \frac{du(c)}{ds} = \left(I_\nu - I_\nu(x) - I_\nu(y) \right) \frac{du(c)}{ds} = 0. \quad (4.42)$$

4.2. Уравнения движения осевой частицы. Поскольку в выражениях для Y и Z отсутствуют компоненты y_λ и y_4 , то для осевой частицы справедливо тождество

$$Y(c) = Z(c) = I_4. \quad (4.3)$$

Поэтому уравнение движения для осевой частицы примет вид

$$[I_4(\lambda) + I_4(\mu)] \frac{du(c)}{ds} = [P(B(c), E(c)) + P(\kappa, c) u_\lambda(c)] [I_4(\lambda) + I_4(\mu)] u(c). \quad (4.4)$$

Из выражения (3.56) для метрики следует, что для осевой частицы составляющие вектора скорости $u_\lambda(c)$ и $u_4(c) = \gamma(c)$ связаны между собой соотношением

$$u_\lambda^2(c) = u_4^2(c) - 1 = \gamma^2(c) - 1.$$

Пример 4.1. Положим $\lambda = 1$ и запишем каждое из четырех скалярных уравнений (4.4). Тогда получим:

$$\frac{du_1(c)}{ds} = E_1(c) u_4(c). \quad (4.5)$$

$$\frac{du_4(c)}{ds} = E_1(c) u_1(c). \quad (4.6)$$

$$\frac{du_2(c)}{ds} = E_2(c) u_4(c) - (B_3(c) + \kappa_3 u_1(c)) u_1(c) = 0. \quad (4.7)$$

$$\frac{du_3(c)}{ds} = E_3(c) u_4(c) + (B_2(c) + \kappa_2 u_1(c)) u_1(c) = 0. \quad (4.8)$$

Решения уравнений (4.5) - (4.8) можно записать в виде:

$$u_1(c) = - \frac{B_2(c)E_2(c) + B_3(c)E_3(c)}{\kappa_2 E_2(c) + \kappa_3 E_3(c)} = u_{10}(c) \cdot \text{ch} \int_{s_0}^s E_1 ds + u_{40}(c) \cdot \text{sh} \int_{s_0}^s E_1 ds. \quad (4.9)$$

$$u_4(c) = \gamma(c) = \frac{(K_2 B_3(c) - K_3 B_2(c)) \cdot (B_2(c) E_2(c) + B_3(c) E_3(c))}{[K_2 E_2(c) + K_3 E_3(c)]^2} = \quad (4.10)$$

$$= u_{10}(c) \cdot sh \int_{s_0}^s E_1 ds + u_{40}(c) ch \int_{s_0}^s E_1 ds.$$

$$y_1(c) = \int_{s_0}^s u_1(c) ds + y_{10}(c), \quad y_4(c) = \int_{s_0}^s u_4(c) ds + y_{40}(c). \quad (4.11)$$

Из уравнений (4.7) и (4.8) следует, что на кривой выполняются равенства:

$$B_3(c) + K_3 u_1(c) = E_2(c) \quad \frac{u_4(c)}{u_1(c)} = E_2(c) y_4'(c). \quad (4.12)$$

$$B_2(c) + K_2 u_1(c) = -E_3(c) \quad \frac{u_4(c)}{u_1(c)} = -E_3(c) y_4'(c). \quad (4.13)$$

В частности, при отсутствии электрического поля ($E_1(c) \neq E_2(c) = E_3(c) = 0$) геодезическая и нормальная кривизны определяются компонентами магнитного поля

$$K_3 = - \frac{B_3(c)}{u_1(c)}, \quad K_2 = - \frac{B_2(c)}{u_1(c)}. \quad (4.14)$$

Упражнение 4.1. Вводя вектор $E^{(4)}(x)$, где

$$E^{(4)}(x) = \left\| \begin{array}{c} E(x) \\ 0 \end{array} \right\|, \quad E(x) = I_3(x) E, \quad (4.15)$$

показать, что в силу уравнения движения осевой частицы выполняется следующее равенство:

$$\left[P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(k, 0) \right] i(\lambda) + \frac{u_4(c)}{u_\lambda(c)} E^{(4)}(x, c) = E_\lambda(c) i(4). \quad (4.16)$$

§ 5. Движение заряженных частиц в постоянном электромагнитном поле.

5.1. Характеристические уравнения для векторных матриц поля. Рассмотрим уравнение движения для постоянных матриц $P(B)$, $P(0, E)$ и $P(B, E)$. Найдем характеристические уравнения этих матриц, для чего вычислим соответствующие определители и приравняем их нулю.

$$1. |P(B) - \lambda I_3| = -\lambda^3 - \lambda \tilde{B} B = \Delta(\lambda(B)) = 0. \quad (5.1)$$

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\tilde{B} B} = \pm i B; \quad B = \sqrt{\tilde{B} B}. \quad (5.2)$$

$$2. |P(0, E) - \lambda I_4| = \lambda^4 - \lambda^2 \tilde{E} E = \Delta(\lambda(E)) = 0. \quad (5.3)$$

$$\lambda_{1,2} = 0; \quad \lambda_{3,4} = \pm \mathcal{E}.$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{\tilde{E} E}. \quad (5.4)$$

$$3. |P(B, E) - \lambda I_4| = \lambda^4 - \lambda^2 (\mathcal{E}^2 - B^2) - (\tilde{B} E)^2 = \Delta(\lambda(B, E)) = 0. \quad (5.5.)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\alpha - \mathcal{E}^2 + B^2}{2}} = \pm i \omega_1; \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \mathcal{E}^2 - B^2}{2}} = \pm \omega_2; \quad (5.6)$$

$$\alpha = \sqrt{(\mathcal{E}^2 - B^2)^2 + 4(\tilde{B} E)^2} = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (5.7)$$

Используя формулу Гамильтона-Кэли для матрицы B

$$B^3 = \langle B \rangle B^2 - \frac{1}{2} [\langle B \rangle^2 - \langle B^2 \rangle] B + |B| I, \quad (5.8)$$

а также теорему Гамильтона-Кэли, утверждающую, что всякая

квадратная матрица B удовлетворяет своему характеристическому уравнению, найдем следующие соотношения

$$P^3(B) = -P(B) B^2, \quad (5.9)$$

$$P^3(\rho, E) = P(\rho, E) E^2, \quad (5.10)$$

$$P^4(B, E) = P^2(B, E) [E^2 - B^2] + (\tilde{E}E)^2 \tilde{I}_4. \quad (5.11)$$

Следует помнить, что матрицы $P(B)$ и $P(\rho, E)$ имеют нулевой определитель, то есть являются особыми матрицами.

5.2. Движение частиц в постоянных электрическом и магнитном полях. Рассмотрим движение частиц в постоянных электрическом и магнитном полях. Уравнения движения частиц в ортогональной системе координат в восьмимерном фазовом пространстве имеют вид

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ 0 & P(B, E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad P(B, E) = \text{const}. \quad (5.12)$$

Будем искать решение системы (5.12) в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_4 X(s/s_0) \\ 0 M(s/s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = R(s/s_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

где матрицант восьмимерного уравнения $R(s/s_0)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dR(s/s_0)}{ds} = \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} I_4 & X(s/s_0) \\ 0 & M(s/s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ 0 & P(B, E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 X(s/s_0) \\ 0 M(s/s_0) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

с начальными условиями

$$R(s_0/s_0) = \begin{pmatrix} I_4 & X(s_0/s_0) \\ 0 & M(s_0/s_0) \end{pmatrix} = I_8. \quad (5.15)$$

Восьмимерное уравнение (5.14) можно записать в виде системы двух четырехмерных уравнений

$$\frac{dX(s/s_0)}{ds} = M(s/s_0), \quad X(s_0/s_0) = O_{44}, \quad (5.16)$$

$$\frac{dM(s/s_0)}{ds} = P(B, E) M(s/s_0), \quad M(s_0/s_0) = \bar{I}_4, \quad (5.17)$$

откуда видно, что $M(s/s_0)$ является матрицантом четырехмерного уравнения

$$\frac{du}{ds} = P(B, E)u, \quad (5.18)$$

а $X(s/s_0)$ суть интеграл этого матрицанта.

Поскольку одна пара собственных значений матрицы $P(B, E)$ является чисто мнимой, а другая пара - вещественной, причем внутри каждой пары собственные значения отличаются лишь знаком, то удобно искать решения системы (5.16)-(5.17) в виде функций от $\cos \omega_1(s-s_0)$, $\sin \omega_1(s-s_0)$, $\operatorname{ch} \omega_2(s-s_0)$, $\operatorname{sh} \omega_2(s-s_0)$.

Введем обозначения для следующих функций

$$\psi(s) = \frac{\operatorname{sh} \omega_2(s-s_0)}{\omega_2^3} + \frac{\sin \omega_1(s-s_0)}{\omega_1^3}, \quad (5.19)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \psi' = \frac{\operatorname{ch} \omega_2(s-s_0)}{\omega_2^2} + \frac{\cos \omega_1(s-s_0)}{\omega_1^2}, \quad (5.20)$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \psi'' = \frac{\operatorname{sh} \omega_2(s-s_0)}{\omega_2} - \frac{\sin \omega_1(s-s_0)}{\omega_1}, \quad (5.21)$$

$$\frac{d^3\psi}{ds^3} = \psi''' = \operatorname{ch} \omega_2(s-s_0) - \cos \omega_1(s-s_0), \quad (5.22)$$

$$\frac{d^4 \psi}{ds^4} = \psi^{IV} = \omega_2 \operatorname{sh} \omega_2 (s-s_0) + \omega_1 \sin \omega_1 (s-s_0), \quad (5.23)$$

$$\frac{d^5 \psi}{ds^5} = \psi^V = \omega_2^2 \operatorname{ch} \omega_2 (s-s_0) + \omega_1^2 \cos \omega_1 (s-s_0). \quad (5.24)$$

Упражнение 5.1. Показать, что функции ψ , ψ'' и ψ^V связаны между собой соотношением

$$\psi^V = (\tilde{\beta} E)^2 \psi' + (\varepsilon^2 - \beta^2) \psi'' \quad (5.25)$$

Теорема 5.1. Решение системы уравнений (5.16)-(5.17) для матричных функций $X(s/s_0)$ и $M(s/s_0)$ имеет вид

$$X(s/s_0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ (\tilde{\beta} E)^2 \psi \cdot I_4 + [P^3(\beta, E) - P(\beta, E)(\varepsilon^2 - \beta^2)] \left[\psi' - \frac{\alpha}{(\tilde{\beta} E)^2} \right] + P^2(\beta, E) \psi'' + P(\beta, E) \psi''' \right\} \quad (5.26)$$

$$M(s/s_0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ (\tilde{\beta} E)^2 \psi' I_4 + [P^3(\beta, E) - P(\beta, E)(\varepsilon^2 - \beta^2)] \psi'' + P^2(\beta, E) \psi''' + P(\beta, E) \psi^{IV} \right\} \quad (5.27)$$

где функция $\psi(s)$ и ее производные определяются уравнениями (5.19)-(5.24), а

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha - \varepsilon^2 + \beta^2}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha + \varepsilon^2 - \beta^2}{2}}, \quad \alpha = \sqrt{(\varepsilon^2 - \beta^2)^2 + 4(\tilde{\beta} E)^2} \quad (5.28)$$

Доказательство. Используя соотношение для ω_1 и ω_2

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \varepsilon^2 - \beta^2, \quad (5.29)$$

$$\omega_2^2 + \omega_1^2 = \alpha, \quad (5.30)$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = (\tilde{\beta} E)^2, \quad (5.31)$$

убедимся сначала в выполнении начальных условий (5.15)

$$X(s_0/s_0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ 0 + P^3(\beta, E) [P^2(\beta, E) - I_4 (\varepsilon^2 - \beta^2)] \left[\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_1} - \frac{\alpha}{(\tilde{\beta} E)^2} \right] + 0 + 0 \right\} = 0. \quad (5.32)$$

$$M(s_0/s_0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ (\tilde{B}E)^2 I_4 \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} \right) + 0 + 0 \right\} = I_4. \quad (5.33)$$

Теперь докажем, что $M(s/s_0)$ в виде (5.27) удовлетворяет уравнению (5.17).

$$\frac{dM(s/s_0)}{ds} = \frac{1}{\alpha} \left\{ (\tilde{B}E)^2 \psi'' I_4 + \left[P^3(B,E) - P(B,E)(\epsilon^2 - \beta^2) \right] \psi''' + P^2(B,E) \psi^{IV} + P(B,E) \psi^V \right\}, \quad (5.34)$$

$$P(B,E) \cdot M(s/s_0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ P(B,E) (\tilde{B}E)^2 \psi' + \left[P^4(B,E) - P^2(B,E)(\epsilon^2 - \beta^2) \right] \psi'' + P^3(B,E) \psi''' + P^2(B,E) \psi^{IV} \right\}. \quad (5.35)$$

В выражении (5.35) вместо первого слагаемого подставим его значение, полученное из (5.25):

$$P(B,E) \cdot (\tilde{B}E)^2 \psi' = P(B,E) \psi^V - P(B,E)(\epsilon^2 - \beta^2) \psi''', \quad (5.36)$$

а выражение в квадратных скобках при $\psi''(s)$ преобразуем, используя (5.11):

$$P^4(B,E) - P^2(B,E)(\epsilon^2 - \beta^2) = I_4 (\tilde{B}E)^2. \quad (5.37)$$

Тогда получим

$$P(B,E) \cdot M(s/s_0) = \frac{1}{\alpha} \left\{ P(B,E) \psi^V - P(B,E)(\epsilon^2 - \beta^2) \psi''' + (\tilde{B}E)^2 \psi'' I_4 + P^3(B,E) \psi''' + P^2(B,E) \psi^{IV} \right\}. \quad (5.38)$$

Сравнивая (5.38) и (5.39), убеждаемся в их тождественности, что доказывает справедливость уравнения (5.17) для функции $M(s/s_0)$. Выполнение уравнения (5.16) непосредственно следует из сравнения (5.26) и (5.27). Таким образом, теорема (5.1) доказана.

Упражнение 5.2. Показать, что для постоянного электрического поля ($B=0$) функции $M(s/s_0)$ и $X(s/s_0)$ имеют вид:

$$M(s/s_0) = I_4 + P^2(0,E) \frac{ch \epsilon(s-s_0) - 1}{\epsilon^2} + P(0,E) \frac{sh \epsilon(s-s_0)}{\epsilon}. \quad (5.39)$$

$$X(s/s_0) = \left(\underline{I}_4 - \frac{\rho^2(0,E)}{\varepsilon^2} \right) (s-s_0) + \rho(0,E) \frac{\operatorname{ch} \varepsilon (s-s_0) - 1}{\varepsilon^2} + \rho^2(0,E) \frac{\operatorname{sh} \varepsilon (s-s_0)}{\varepsilon^3} \quad (5.40)$$

5.3. Движение частиц в постоянном магнитном поле ($E=0$). Поскольку $u_\gamma = \gamma = \operatorname{const}$ при $E=0$, то уравнения движения можно записать в переменном виде

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{u}, \quad \frac{d\bar{u}}{ds} = \rho(B)\bar{u}, \quad (5.41)$$

где

$$\tilde{u}u = \gamma^2 - 1. \quad (5.42)$$

Вводя матричные функции $\bar{M}(s/s_0)$ и $\bar{X}(s/s_0)$ порядка 3×3 ,

где

$$\bar{u} = \bar{M}(s/s_0)\bar{u}_0, \quad \bar{x} = \bar{X}\bar{u}_0 + \bar{x}_0, \quad (5.43)$$

и подставляя их в (5.41), получим матричные уравнения:

$$\frac{d\bar{M}(s/s_0)}{ds} = \rho(B)\bar{M}(s/s_0), \quad \frac{d\bar{X}(s/s_0)}{ds} = \bar{M}(s/s_0). \quad (5.44)$$

Упражнение 5.3. Показать, что функции $\bar{M}(s/s_0)$ и $\bar{X}(s/s_0)$ имеют вид:

$$\bar{M}(s/s_0) = \underline{I}_3 + \rho^2(B) \frac{1 - \cos B(s-s_0)}{B^2} + \rho(B) \frac{\sin B(s-s_0)}{B}, \quad (5.45)$$

$$\bar{X}(s/s_0) = \left[\underline{I}_3 + \frac{1}{B^2} \rho^2(B) \right] (s-s_0) + \rho(B) \frac{1 - \cos B(s-s_0)}{B^2} - \rho^2(B) \frac{\sin B(s-s_0)}{B^3} \quad (5.46)$$

Параметр $s-s_0$ можно выразить через безразмерное время x_γ , используя связь между ними в виде

$$ds = \frac{1}{\gamma} dx_\gamma. \quad (5.47)$$

Интегрируя при $\gamma = \cos t$ ($E=0$) уравнение (5.47), получим:

$$S - S_0 = \frac{1}{\gamma} (x_4 - x_{40}). \quad (5.48)$$

Упражнение 5.4. Пусть в системе координат $(0, \bar{x})$ уравнение движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле имеет вид

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{u}(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{u}(\bar{x})}{ds} = \rho(B(\bar{x})) \cdot \bar{u}(\bar{x}), \quad (5.49)$$

где

$$\bar{u}(\bar{x}) \bar{u}(\bar{x}) = \gamma^2 - 1. \quad (5.50)$$

Показать, что в системе координат $(0, \bar{z})$, связанной с системой координат $(0, \bar{x})$ соотношением

$$\bar{z} = T \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) + i(t), \quad (5.51)$$

где

$$T = \begin{vmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_3 \end{vmatrix}, \quad i(t) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (5.52)$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{\beta^2}{\Gamma(B)} \tilde{u}_0(\bar{x}) P(B), \quad \tilde{T}_2 = -\frac{\beta}{\Gamma(B)} \tilde{u}_0(\bar{x}) P^2(B), \quad (5.53)$$

$$\tilde{T}_3 = \frac{\beta \tilde{u}_0(\bar{x})}{(\tilde{B} u_0(x))^2} [P^2(B) + \beta^2 I_3], \quad (5.54)$$

$$\Gamma(B) = -\tilde{u}_0(\bar{x}) P^2(B) \bar{u}_0(\bar{x}) = (\gamma^2 - 1) \tilde{E}^2 - (\tilde{B} \bar{u}_0(\bar{x}))^2,$$

уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\bar{z}}{ds} = \bar{u}(\bar{z}), \quad \frac{d\bar{u}(\bar{z})}{ds} = \rho(B(\bar{z})) \bar{u}(\bar{z}), \quad (5.55)$$

где

$$B(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

то есть показать, что в системе координат $(0, \bar{z})$ вектор \vec{B} направлен по оси $O\bar{z}_3$ в сторону уменьшения координаты \bar{z}_3 .

Упражнение 5.5. Показать, что матрица T^{-1} обратная матрице T из предыдущего упражнения, имеет вид матричного вектора

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & T_2^{-1} & T_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

где

$$T_1^{-1} = -\frac{\rho(B)}{B^2} \bar{u}_0(\bar{x}), \quad T_2^{-1} = -\frac{\rho^2(B)}{B^3} \bar{u}_0(\bar{x}), \quad T_3^{-1} = \left(\frac{\rho^2(B)}{B^2} + T_3 \right) \frac{\bar{u}_0(\bar{x})}{B}, \quad (5.58)$$

а ее определитель $|T^{-1}|$ равен

$$|T^{-1}| = \frac{1}{B^6} \Gamma(B) \cdot (\vec{B} u_0). \quad (5.59)$$

Упражнение 5.6. Показать, что в системе координат $(0, \bar{z})$, получаемой из системы координат $(0, \bar{x})$ линейным преобразованием T в соответствии с выражением (5.51), уравнения траектории частицы имеют вид винтовой линии

$$\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 = 1, \quad (5.60)$$

$$\bar{z}_3 = B(s-s_0) = B \frac{1}{\gamma} (\bar{x}_4 - \bar{x}_{40}), \quad (5.61)$$

проекция которой на плоскость $\bar{z}_3 = \text{const}$ является окружностью (5.60) единичного радиуса, уравнение которой в параметрической форме записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= \cos B (s-s_0), \\ \bar{z}_2 &= \sin B (s-s_0).\end{aligned}\tag{5.62}$$

§ 6. Линеаризация уравнений движения для частиц параксиального (приосевого) пучка.

6.1. Параксиальный пучок. Обычно в приборах управления движением заряженных частиц (корпускулярнооптических системах) рассматривают движение некоторого множества частиц в фазовом пространстве. Пусть при некотором значении параметра $y_\lambda = y_{\lambda 0}$ в начальный момент времени t_0 имеется множество частиц M_0 в фазовом пространстве. Тогда множество траекторий частиц L в пространстве координат называют пучком. В качестве осевой частицы часто выбирают такую частицу, траектория которой имеет минимальную длину из всех других траекторий частиц данного пучка L при одной и той же начальной энергии частиц. Пучок, все траектории частиц которого находятся достаточно близко от траектории осевой частицы, называется параксиальным или приосевым пучком, а траектория осевой частицы называется осью пучка.

6.2. Разность времен движения и энергий осевой и приосевой частиц. Рассмотрим одну из траекторий частиц пучка L .

Время движения по этой траектории будет y_4 , тогда как время движения частиц по оси C будет $y_4(s)$. Обозначим разность этих времен через Δy_4 .

$$y_4 = y_4(s) + \Delta y_4.\tag{6.1}$$

Обозначая

$$\frac{d}{ds} (\Delta y_4) = \Delta u_4,\tag{6.2}$$

получим, дифференцируя по s выражение (6.1):

$$u_4(y) = u_4(c) + \Delta u_4. \quad (6.3)$$

Отсюда видно, что Δu_4 является разностью энергий осевой и приосевой частиц для одного и того же значения параметра y_λ .

6.3. Векторы малых отклонений приосевой частицы от осевой.

Векторы $y(x)$ и $u(x)$ на оси C будем обозначать через $y(x, c)$ и $u(x, c)$, где

$$y(x, c) = \left\| \begin{array}{c} \bar{y}(x, c) \\ y_4(c) \end{array} \right\|, \quad u(x, c) = \left\| \begin{array}{c} \bar{u}(x, c) \\ u_4(c) \end{array} \right\| \quad (6.4)$$

Здесь через $\bar{y}(x, c)$ и $\bar{u}(x, c)$ обозначены трехмерные векторы, λ -не компоненты которых равны нулю ($\lambda = 1, 2, 3$). Но поскольку на оси C остальные две компоненты этих трехмерных векторов равны также нулю, то последние можно выразить в виде

$$y(x, c) = y_4(c) i_4, \quad u(x, c) = u_4(c) i_4, \quad (6.5)$$

где

$$i_4 = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| = i(4). \quad (6.6)$$

Введем следующие обозначения для векторов, характеризующих отклонение приосевой частицы от осевой:

$$y(x) - y(x, c) = q(x), \quad u(x) - u(x, c) = \frac{dq(x)}{ds} = p(x). \quad (6.7)$$

Из (6.5) следует, что

$$q(x) = \left\| \begin{array}{c} \bar{y}(x) \\ \Delta y_4 \end{array} \right\|, \quad p(x) = \left\| \begin{array}{c} \bar{u}(x) \\ \Delta u_4 \end{array} \right\|, \quad (6.8)$$

причем

$$q(x) = y(x) - y_4(c) i_4, \quad p(x) = u(x) - u_4(c) i_4. \quad (6.9)$$

Приосевой (параксиальный) пучок можно определить неравенствами:

$$q(x) \ll \left\| \begin{array}{c} \bar{i}(x) \\ y_4(c) \end{array} \right\|, \quad p(x) \ll \left\| \begin{array}{c} \bar{i}(x) \\ u_4(c) \end{array} \right\|, \quad (6.10)$$

где $\bar{i}(x)$ - трехмерный вектор, λ - ая компонента которого равна нулю, а две остальные - равны единице.

6.4. Разность продольных скоростей. Представим продольную скорость $u_\lambda(y)$ произвольной частицы приосевого пучка в виде

$$u_\lambda(y) = u_\lambda(c) + \Delta u_\lambda, \quad (6.11)$$

где $u_\lambda(y)$ и $u_\lambda(c)$ - скорости (или точнее, импульсы) приосевой и осевой частиц для одного и того же значения параметра y_λ .

Используя выражение для $u_\lambda(y)$,

$$u_\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{G_{\lambda\lambda}(y) + \bar{i}(\lambda) G(y) y'(x) + \tilde{y}'(x) G(y) i(\lambda) + \tilde{y}'(x) G(y) y'(x)}} \quad (6.12)$$

где

$$G(y) = [I_4 + i(\lambda) \tilde{y}(x) P(\kappa, 0)] G [I_4 - P(\kappa, 0) y(x) \tilde{i}(\lambda)], \quad (6.13)$$

$$G_{\lambda\lambda}(y) = \tilde{i}(\lambda) G(y) i(\lambda) = -1 - \tilde{y}(x) P(\kappa, 0) i(\lambda) + \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) y(x) -$$

$$- \tilde{y}(x) P(\kappa, 0) G P(\kappa, 0) y(x) =$$

$$= -1 + 2 \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) y(x) - \tilde{y}(x) P(\kappa, 0) G P(\kappa, 0) y(x), \quad (6.14)$$

найдем значения Δu_λ с точностью до членов второго порядка малости.

Из (6.12) получим:

$$\Delta u_\lambda = -\frac{1}{2} u_\lambda^3(c) [2 \tilde{\varepsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(\lambda) + 2 y'_\nu(c) \Delta y'_\nu],$$

$$\Delta y'_\nu = \Delta \left(\frac{u_\nu(y)}{u_\lambda(y)} \right) = \frac{1}{u_\lambda^2(c)} [u_\lambda(c) \Delta u_\nu - u_\nu(c) \Delta u_\lambda],$$

$$\begin{aligned} \Delta u_\lambda &= -u_\lambda^3(c) \tilde{\varepsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(\lambda) - u_\lambda^3(c) \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} \frac{1}{u_\lambda^2(c)} [u_\lambda(c) \Delta u_\nu - u_\nu(c) \Delta u_\lambda] = \\ &= -u_\lambda^3(c) \tilde{\varepsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(\lambda) - u_\nu(c) u_\lambda(c) \Delta u_\nu + u_\nu^2(c) \Delta u_\lambda. \end{aligned}$$

Из последнего выражения, учитывая, что $u_\nu(c)$ и $u_\lambda(c)$ связаны между собой соотношением

$$u_\nu^2(c) - 1 = u_\lambda^2(c), \quad (6.15)$$

определим Δu_λ .

$$\begin{aligned} \Delta u_\lambda &= u_\lambda(c) \tilde{\varepsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(\lambda) + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} \Delta u_\nu = \\ &= u_\lambda(c) \tilde{\varepsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(\lambda) + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} \tilde{\varepsilon}(\lambda) P(\lambda) \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.5. Разность векторных матриц $P(B, E)$ для приосевой и осевой частиц. Представим матрицу $P(B, E)$ для приосевой частицы в виде

$$P(B, E) = P(B(c), E(c)) + \Delta P(B, E). \quad (6.17)$$

Здесь $P(B(c), E(c))$ - значение матрицы $P(B, E)$ на оси C при том же значении параметра y_λ , при котором берется матрица $P(B, E)$ в выражении (6.17).

Поскольку время движения частицы по своей траектории равно

$$y_\nu = y_\nu(c) + \Delta y_\nu, \quad (6.18)$$

то производную $\frac{\partial}{\partial y_4}$ можно заменять на производную $\frac{\partial}{\partial \Delta y_4}$ и наоборот. Поэтому, вводя матричный вектор -строку $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} P(B, E)$, где

$$\frac{\partial P(B, E)}{\partial \tilde{y}} = \left\| \frac{\partial P(B, E)}{\partial y_1}, \frac{\partial P(B, E)}{\partial y_2}, \frac{\partial P(B, E)}{\partial y_3}, \frac{\partial P(B, E)}{\partial y_4} \right\|, \quad (6.19)$$

получим выражение для $\Delta P(B, E)$ с точностью до членов второго порядка в следующем виде

$$\Delta P(B, E) = \frac{\partial P(B, E)}{\partial \tilde{y}}(c) \cdot q(x) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} q(x) \cdot P(B(c), E(c)). \quad (6.20)$$

Заметим, что выражение

$$\frac{\partial P(B(c), E(c))}{\partial \tilde{y}}$$

в дальнейшем будет обозначать значение производной

$$\frac{\partial P(B, E)}{\partial \tilde{y}}$$

на оси C .

6.6. Разность матрицы Y для приосевой и осевой частиц. Запишем матрицу Y для приосевой частицы в виде

$$Y = Y(c) + \Delta Y = I_4 + \Delta Y. \quad (6.21)$$

Напомним, что матрица Y равна

$$Y = Y_{\lambda\lambda} [I_4 + I_4(x) P(k, 0) y(x) \tilde{\epsilon}(\lambda)], \quad (6.22)$$

где

$$Y_{\lambda\lambda} = [1 - \tilde{\epsilon}(\lambda) P(k, 0) y(x)]^{-1}. \quad (6.23)$$

Учитывая, что

$$\Delta y(x) = q(x), \quad (6.24)$$

получим с точностью до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned}
 \Delta Y &= \Delta Y_{\lambda\lambda} \cdot \bar{I}_y + \bar{I}_y(x) P(\kappa, 0) q(x) \tilde{\epsilon}(\lambda) = \\
 &= Y_{\lambda\lambda}^2 \tilde{\epsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(x) \bar{I}_y + \bar{I}_y(x) P(\kappa, 0) q(x) \tilde{\epsilon}(\lambda) = \\
 &= \bar{I}_y \tilde{\epsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(x) + \bar{I}_y(x) P(\kappa, 0) q(x) \tilde{\epsilon}(\lambda).
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

6.7. Линеаризация уравнений движения. Уравнения движения заряженной частицы в криволинейной системе координат имеют вид

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} y(x) \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{I}_y \\ \bar{G} & \bar{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ u(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{pmatrix},
 \tag{6.26}$$

где

$$\bar{G} = u_\lambda(y) \bar{I}_y(x) Y \left\{ u_\lambda(y) P(\kappa, 0) - [P(\beta, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) \right\},
 \tag{6.27}$$

$$\bar{F} = \bar{I}_y(x) Y [P(\beta, E) + 2u_\lambda(y) P(\kappa, 0)],
 \tag{6.28}$$

$$\bar{f} = u_\lambda(y) \bar{I}_y(x) \cdot Y [P(\beta, E) + u_\lambda(y) P(\kappa, 0)] \tilde{\epsilon}(\lambda),
 \tag{6.29}$$

$$\bar{I}_y(x) Y = \bar{I}_y(x) [1 - \tilde{\epsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) u(x)]^{-1} [\bar{I}_y + P(\kappa, 0) u(x) \tilde{\epsilon}(\lambda)].
 \tag{6.30}$$

Мы будем рассматривать только уравнение для $u(x)$

$$\frac{du(x)}{ds} = \bar{G} y(x) + \bar{F} u(x) + \bar{f},
 \tag{6.31}$$

так как уравнение для $y(x)$ является тождеством. Учитывая попрежнему, что

$$\Delta u(x) = p(x),
 \tag{6.32}$$

$$\Delta (\bar{I}_y(x) Y) = \bar{I}_y(x) [\bar{I}_y \tilde{\epsilon}(\lambda) P(\kappa, 0) q(x) + P(\kappa, 0) q(x) \tilde{\epsilon}(\lambda)],
 \tag{6.33}$$

найдем $\Delta \bar{G}$, $\Delta \bar{F}$ и $\Delta \bar{f}$.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{G} &= \Delta u_\lambda I_\nu(x) \{ u_\lambda(c) P(\kappa', 0) - [\rho(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) \} + \\ &+ u_\lambda(c) \Delta (I_\nu(x) Y) \{ u_\lambda(c) P(\kappa', 0) - [\rho(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) \} + \\ &+ u_\lambda(c) I_\nu(x) \{ \Delta u_\lambda \cdot P(\kappa', 0) - [\Delta \rho(B, E) + \Delta u_\lambda P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) \} = \\ &= u_\lambda(c) I_\nu(x) \{ \Delta u_\lambda [2 P(\kappa', 0) - (\rho(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda(c) P(\kappa, 0))] P(\kappa, 0) \} + \\ &+ \Delta (I_\nu(x) Y) \{ u_\lambda(c) P(\kappa', 0) - [\rho(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] P(\kappa, 0) \} - \\ &- \Delta \rho(B, E) \cdot P(\kappa, 0). \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{F} &= \Delta (I_\nu(x) Y) [\rho(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] + \\ &+ I_\nu(x) [\Delta \rho(B, E) + 2 \Delta u_\lambda \cdot P(\kappa, 0)]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f} &= \Delta u_\lambda \cdot I_\nu(x) [\rho(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) + u_\lambda(c) \Delta (I_\nu(x) Y) [\rho(B(c), E(c)) + \\ &+ u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) + u_\lambda(c) [\Delta \rho(B, E) + \Delta u_\lambda P(\kappa, 0)] i(\lambda). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Используя равенство (4.16)

$$[\rho(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) = \ell(x), \quad (6.37)$$

где

$$\ell(x) = E_\lambda(c) i(\nu) - \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} E^{(\nu)}(x, c), \quad (6.38)$$

запишем выражение для $\Delta \bar{F} \cdot u_\nu(c) i(\nu)$ и для $\Delta \bar{F} \cdot u_\nu(c) i(\nu) + \Delta \bar{f}$.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{F} u_\nu(c) i(\nu) &= \Delta (I_\nu(x) Y) [\rho(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] u_\nu(c) i(\nu) + \\ &+ I_\nu(x) [\Delta \rho(B, E) + 2 \Delta u_\lambda \cdot P(\kappa, 0)] u_\nu(c) i(\nu) = \\ &= \Delta (I_\nu(x) Y) u_\nu(c) E^{(\nu)}(x, c) + I_\nu(x) \Delta \rho(B, E) u_\nu(c) i(\nu). \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{F} \cdot u_y(c) i(y) + \Delta \bar{f} &= \Delta u_\lambda I_y(x) [P(B(c), E(c)) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) + \\
 &+ \Delta (I_y(x) Y) \left\{ u_\lambda(c) [P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) + u_y(c) E^{(y)}(x, c) \right\} + \\
 &+ I_y(x) \Delta P(B, E) [u_\lambda(c) i(\lambda) + u_y(c) i(y)] = \\
 &= \Delta u_\lambda I_y(x) [P(B(c), E(c)) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) + \\
 &+ \Delta (I_y(x) Y) u_\lambda(c) E_\lambda(c) i(y) + \\
 &+ I_y(x) \Delta P(B, E) [u_\lambda(c) i(\lambda) + u_y(c) i(y)].
 \end{aligned}$$

(6.40)

Подставляя в (6.40) выражения (6.16), (6.20) и (6.33), получим

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{F} \cdot u_y(c) i(y) + \Delta \bar{f} &= u_\lambda(c) I_y(x) [P(B(c), E(c)) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) q(x) + \\
 &+ \frac{u_y(c)}{u_\lambda(c)} I_y(x) [P(B(c), E(c)) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) \tilde{i}(y) \cdot p(x) + \\
 &+ u_\lambda(c) E_\lambda(c) i(y) \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) \cdot q(x) + \\
 &+ I_y(x) \frac{\partial}{\partial y} \cdot P(B(c), E(c)) [u_\lambda(c) i(\lambda) + u_y(c) i(y)] q(x) = \\
 &= u_\lambda(c) I_y(x) \left\{ [P(B(c), E(c)) \cdot i(\lambda) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, 0) i(\lambda) + E_\lambda(c) i(y)] \tilde{i}(\lambda) P(\kappa, 0) + \right. \\
 &+ \tilde{\nabla}(y) P(B(c), E(c)) [i(\lambda) + \frac{u_y(c)}{u_\lambda(c)} i(y)] q(x) + \\
 &+ \frac{u_y(c)}{u_\lambda(c)} I_y(x) [P(B(c), E(c)) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] i(\lambda) \tilde{i}(y) p(x).
 \end{aligned}$$

(6.41)

Поскольку

$$\frac{d}{ds} \begin{vmatrix} q(x) \\ p(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{ds} \begin{vmatrix} \Delta y(x) \\ \Delta u(x) \end{vmatrix} = \Delta \cdot \frac{d}{ds} \begin{vmatrix} y(x) \\ u(x) \end{vmatrix} \quad (6.42)$$

то, применяя скалярную операцию Δ к уравнению (6.31), получим с точностью до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \frac{du(x)}{ds} &= \frac{d}{ds} \cdot \Delta u(x) = \frac{dp(x)}{ds} = \\ &= \bar{G}(c) q(x) + \bar{F}(c) p(x) + \Delta \bar{G} \cdot y(x, c) + \Delta \bar{F} \cdot u(x, c) + \Delta \bar{f}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Так как

$$y(x, c) = y_4(c) i(4), \quad u(x, c) = u_4(c) i(4), \quad (6.44)$$

то получим

$$\frac{dp(x)}{ds} = \bar{G}(c) q(x) + \bar{F}(c) p(x) + \Delta \bar{G} \cdot y_4(c) i(4) + \Delta \bar{F} \cdot u_4(c) i(4) + \Delta \bar{f}, \quad (6.45)$$

где

$$\bar{G}(c) = u_\lambda(c) I_4(x) \{ u_\lambda(c) P(k', 0) - [P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(k, 0)] P(k, 0) \}, \quad (6.46)$$

$$\bar{F}(c) = I_4(x) [P(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda(c) P(k, 0)]. \quad (6.47)$$

Так как четвертые столбец и строка матриц $P(k, 0)$ и $P(k', 0)$ являются нулевыми, то

$$P(k, 0) i(4) = 0, \quad P(k', 0) i(4) = 0. \quad (6.48)$$

Поэтому

$$\Delta \bar{G} \cdot y_4(c) i(4) = 0. \quad (6.49)$$

Подставим в (6.45) выражения (6.46), (6.47), и (6.41). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dp(x)}{ds} &= u_\lambda(c) I_\nu(x) \left\{ \left[P(B(c), E(c)) i(\lambda) + 2 u_\lambda'(c) P(\kappa, 0) i(\lambda) + E_\lambda(c) i(\lambda) \right] \tilde{e}(\lambda) P(\kappa, 0) + \right. \\
 &+ \tilde{v}(y) P(B(c), E(c)) \left[i(\lambda) + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} i(\lambda) \right] + u_\lambda(c) P(\kappa', 0) - \\
 &- \left. \left[P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0) \right] P(\kappa, 0) \right\} q_\nu(x) + \\
 &+ I_\nu(x) \left\{ \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} \left[P(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda'(c) P(\kappa, 0) \right] i(\lambda) \tilde{e}(\lambda) + \right. \\
 &+ \left. P(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda(c) P(\kappa, 0) \right\} p(x) = \\
 &= u_\lambda(c) I_\nu(x) \left\{ u_\lambda(c) P(\kappa', 0) - \left[P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0) \right] I_\nu(x) P(\kappa, 0) + \right. \\
 &+ u_\lambda(c) P(\kappa, 0) I_\nu(\lambda) P(\kappa, 0) + E_\lambda(c) i(\lambda) \tilde{e}(\lambda) P(\kappa, 0) + \\
 &+ \tilde{v}(y) P(B(c), E(c)) \left[i(\lambda) + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} P(\kappa, 0) \right] q_\nu(x) + \\
 &+ \left. I_\nu(x) \left[P(B(c), E(c)) + 2 u_\lambda(c) P(\kappa, 0) \right] \left[I_\nu + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} i(\lambda) \tilde{e}(\lambda) \right] p(x) \right\}. \quad (6.50)
 \end{aligned}$$

Уравнение (6.50) перепишем в виде:

$$\frac{dp(x)}{ds} = u_\lambda(c) I_\nu(x) [V \cdot q_\nu(x) + W \cdot p(x)], \quad (6.51)$$

где

$$\begin{aligned}
 V &= u_\lambda(c) P(\kappa', 0) - \left[P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0) \right] I_\nu(x) P(\kappa, 0) + \\
 &+ u_\lambda(c) P(\kappa, 0) I_\nu(\lambda) P(\kappa, 0) + E_\lambda(c) i(\lambda) \tilde{e}(\lambda) P(\kappa, 0) + \\
 &+ \tilde{v}(y) P(B(c), E(c)) \left[i(\lambda) + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} i(\lambda) \right], \quad (6.52)
 \end{aligned}$$

$$W = \left[\frac{1}{u_\lambda(c)} P(B(c), E(c)) + 2 P(\kappa, 0) \right] \left[I_\nu + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} i(\lambda) \tilde{e}(\lambda) \right]. \quad (6.53)$$

Подставляя в (6.53) выражение (6.37), получим формулу для

W в ином виде:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{u_\lambda(c)} P(B(c), E(c)) + 2P(\kappa, 0) + \frac{u_4(c)}{u_\lambda(c)} P(\kappa, 0) i(\lambda) \tilde{i}(4) + \\
 &+ \frac{1}{u_\lambda(c)} \left[P(B(c), E(c)) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0) \right] \frac{u_4(c)}{u_\lambda(c)} i(\lambda) \tilde{i}(4) = \\
 &= \frac{1}{u_\lambda(c)} P(B(c), E(c)) + 2P(\kappa, 0) + \\
 &+ \frac{u_4(c)}{u_\lambda^2(c)} \left\{ u_\lambda(c) P(\kappa, 0) i(\lambda) \tilde{i}(4) + E_\lambda(c) \tilde{I}(4) - \frac{u_4(c)}{u_\lambda(c)} E^{(4)}(\lambda, c) \tilde{i}(4) \right\}. \quad (6.53a)
 \end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения движения частиц в шестимерном фазовом пространстве $(q_i(x), p_i(x))$ можно записать следующим образом

$$\frac{d}{dy_\lambda} \begin{pmatrix} q(x) \\ p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x) \\ p(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & u_\lambda^{-1}(c) I_q(x) \\ I_p(x) V & I_p(x) W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(x) \\ p(x) \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Пример 6.1. Полагая $\lambda = 1$ и вводя векторы \bar{q} и \bar{p} , где

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \Delta y_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \Delta u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(c) y_2' \\ u_1(c) y_3' \\ \Delta u_4 \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

записать линеаризованные уравнения движения частиц.

Для данного случая имеем:

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_1 &= q_2(x), & \bar{q}_2 &= q_3(x), & \bar{q}_3 &= q_4(x), \\
 \bar{p}_1 &= p_2(x), & \bar{p}_2 &= p_3(x), & \bar{p}_3 &= p_4(x).
 \end{aligned} \quad (6.56)$$

Уравнение движения (6.51) запишем в виде:

$$\frac{d\bar{p}}{dy_1} = \bar{p}' = \bar{V} \bar{q} + \bar{W} \bar{p}. \quad (6.57)$$

Найдем матричные элементы матриц \bar{V} и \bar{W} .

$$\begin{aligned} \bar{V}_{11} = V_{22} &= - \left[P_{23}(B(c), E(c)) + u_1'(c) P_{23}(k, 0) \right] P_{32}(k, 0) + \\ &+ u_1(c) P_{21}(k, 0) P_{12}(k, 0) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left[P_{21}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{24}(B(c), E(c)) \right] = \\ &= \left[B_1(c) + u_1(c) K_1 \right] K_1 - u_1(c) K_3^2 - \frac{\partial B_3}{\partial y_2}(c) + \frac{1}{u_1(c)} \frac{\partial E_2}{\partial y_2}(c) \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{12} = V_{23} &= u_1(c) P_{23}(k', 0) + u_1(c) P_{21}(k, 0) P_{13}(k, 0) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_3} \left[P_{21}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{24}(B(c), E(c)) \right] = \\ &= u_1(c) (K_1' + K_2 K_3) - \frac{\partial B_3}{\partial y_3}(c) + \frac{1}{u_1(c)} \frac{\partial E_2}{\partial y_3}(c). \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{13} = V_{24} &= \frac{\partial}{\partial y_4} \left[P_{21}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{24}(B(c), E(c)) \right] = \\ &= - \frac{\partial B_3}{\partial y_4}(c) + \frac{1}{u_1(c)} \frac{\partial E_2}{\partial y_4}(c). \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{21} = V_{32} &= u_1(c) P_{32}(K, 0) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left[P_{31}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{34}(B(c), E(c)) \right] + \\ &+ u_1(c) P_{31}(K, 0) P_{12}(K, 0) = \\ &= u_1(c) (K_2 K_3 - K_1') + \frac{\partial B_2}{\partial y_2}(c) + \frac{1}{u_1(c)} \frac{\partial E_3}{\partial y_2}(c). \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{22} = V_{33} &= - \left[P_{32}(B(c), E(c)) + u_1(c) P_{32}(K, 0) \right] P_{23}(K, 0) + \\ &+ u_1(c) P_{31}(K, 0) P_{13}(K, 0) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left[P_{31}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{34}(B(c), E(c)) \right] = \\ &= (B_1(c) + u_1(c) K_1) K_1 - u_1(c) K_2^2 + \frac{\partial B_2}{\partial y_3}(c) + \frac{1}{u_1(c)} \frac{\partial E_3}{\partial y_3}(c). \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{23} = V_{34} &= \frac{\partial}{\partial y_4} \left[P_{31}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{34}(B(c), E(c)) \right] = \\ &= \frac{\partial B_2}{\partial y_4}(c) + \frac{1}{u_1(c)} \frac{\partial E_3}{\partial y_4}(c). \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{31} = V_{42} &= - P_{43}(B(c), E(c)) P_{32}(K, 0) + E_1(c) P_{12}(K, 0) + \frac{\partial}{\partial y_2} P_{41}(B(c), E(c)) = \\ &= E_3(c) K_1 + E_1(c) K_3 + \frac{\partial E_1}{\partial y_2}(c). \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{32} = V_{43} &= - P_{42}(B(c), E(c)) P_{23}(K, 0) + E_1(c) P_{13}(K, 0) + \frac{\partial}{\partial y_3} P_{41}(B(c), E(c)) = \\ &= - E_2(c) K_1 - E_1(c) K_2 + \frac{\partial E_1}{\partial y_3}(c). \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\bar{V}_{33} = V_{44} = \frac{\partial E_1}{\partial y_4}(c). \quad (6.66)$$

$$\bar{W}_{11} = W_{22} = 0. \quad (6.67)$$

$$\bar{W}_{22} = W_{33} = 0. \quad (6.68)$$

$$\bar{W}_{33} = W_{44} = \frac{u_4(c)}{u_1(c)} E_1(c) = \frac{1}{8u_1^2(c)} E_1(c). \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{12} = W_{23} &= \frac{1}{u_1(c)} P_{23}(B(c), E(c)) + 2P_{23}(K, 0) = \\ &= \frac{B_1(c)}{u_1(c)} + 2K_1. \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{13} = W_{24} &= \frac{1}{u_1(c)} P_{24}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{24}(K, 0) - \\ &- \frac{u_4^2(c)}{u_1^3(c)} E_2(c) = -\frac{u_4(c)}{u_1(c)} K_3 - \frac{1}{u_1^3(c)} E_2(c). \end{aligned} \quad (6.71)$$

$$\bar{W}_{21} = W_{32} = -\bar{W}_{12} = -\frac{B_1(c)}{u_1(c)} - 2K_1. \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{23} = W_{34} &= \frac{1}{u_1(c)} P_{34}(B(c), E(c)) + \frac{u_4(c)}{u_1(c)} P_{34}(K, 0) - \\ &- \frac{u_4^2(c)}{u_1^3(c)} E_3(c) = \frac{u_4(c)}{u_1(c)} K_2 - \frac{1}{u_1^3(c)} E_3(c). \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\bar{W}_{31} = W_{42} = \frac{1}{u_1(c)} P_{42}(B(c), E(c)) = \frac{E_2(c)}{u_1(c)}. \quad (6.74)$$

$$\bar{W}_{32} = W_{43} = \frac{E_3(c)}{u_1(c)}. \quad (6.75)$$

Упражнение 6.1. Показать, что в статическом магнитном поле уравнения движения частиц в криволинейной системе координат для репера Френе имеют вид ($\lambda = 1$):

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ V^{(2)} & W^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}, \quad (6.76)$$

где элементы квадратных (2x2) матриц $V^{(2)}$ и $W^{(2)}$ имеют вид:

$$V_{11}^{(2)} = \left(\frac{B_1(c)}{\gamma v_1(c)} + \alpha \right) \alpha - \kappa^2 - \frac{1}{\gamma v_1(c)} \frac{\partial B_3}{\partial y_2}(c), \quad (6.77)$$

$$\alpha = \frac{1}{\tau}, \quad \kappa = \frac{1}{\rho}.$$

$$V_{12}^{(2)} = \alpha' - \frac{1}{\gamma v_1(c)} \frac{\partial B_3}{\partial y_3}(c), \quad (6.78)$$

$$V_{21}^{(2)} = \frac{1}{\gamma v_1(c)} \frac{\partial B_2}{\partial y_2}(c) - \alpha', \quad (6.79)$$

$$V_{22}^{(2)} = \left(\frac{B_1(c)}{\gamma v_1(c)} + \alpha \right) \alpha + \frac{1}{\gamma v_1(c)} \frac{\partial B_2}{\partial y_3}(c). \quad (6.80)$$

$$W_{11}^{(2)} = W_{22}^{(2)} = 0, \quad (6.81)$$

$$W_{12}^{(2)} = -W_{21}^{(2)} = \frac{B_1(c)}{\gamma v_1(c)} + 2\alpha. \quad (6.82)$$

Здесь ρ - радиус кривизны кривой C , τ - радиус кручения, причем $B_3(c)$, $\kappa = \frac{1}{\rho}$ и $u_1(c) = \gamma v_1(c)$ связаны между собой соотношением:

$$B_3(c) = -u_1(c) \kappa = -\frac{1}{\rho} \gamma v_1(c), \quad (6.83)$$

а компонента магнитного поля B_2 на оси C равна нулю:

$$B_2(c) = 0. \quad (6.84)$$

6.8. О сохранении фазового объема. Как известно, если в линейном дифференциальном уравнении

$$x' = P(s)x \quad (6.85)$$

след матричной ($n \times n$) функции равен нулю,

$$\langle P \rangle \equiv 0, \quad (6.86)$$

то фазовый объем в фазовом пространстве (x) является постоянной величиной. Так, например, для движения частиц в статическом магнитном поле

$$x = \left\| \begin{array}{c} y_2 \\ y_3 \\ y_2' \\ y_3' \end{array} \right\|, \quad \rho = \left\| \begin{array}{cc} 0 & I_2 \\ V^* & W^* \end{array} \right\|, \quad (6.87)$$

$$\langle P \rangle = \langle W^* \rangle = W_{11}^* + W_{22}^* = 0. \quad (6.88)$$

то есть при движении фазового множества $M(y_1)$ в четырехмерном фазовом пространстве (y_2, y_3, y_2', y_3') объем множества $M(y_1)$ не зависит от y_1 и равен $M(y_0)$. При этом предполагается, что движение любой точки множества $M(y_1)$ определяется уравнением движения (6.85) с учетом (6.87), то есть отсутствуют столкновения частиц как со стенками вакуумной камеры, так и с другими частицами.

При движении в произвольном электромагнитном поле

$$x = \left\| \begin{array}{c} q(x) \\ p(x) \end{array} \right\|, \quad \rho = \left\| \begin{array}{cc} 0 & u_{\lambda}^{-1}(c) I_{\nu}(x) \\ I_{\nu}(x) V & I_{\nu}(x) W \end{array} \right\| \quad (6.89)$$

$$\langle P \rangle = \langle W \rangle = W_{\nu\nu} = \frac{u_{\nu}(c)}{u_{\lambda}^2(c)} E_{\lambda}(c), \quad (6.90)$$

объем фазового множества $M(y_1)$ в шестимерном фазовом пространстве $(q(x), p(x))$ в течение движения меняется и определяется продольной компонентой электрического поля $E_{\lambda}(c)$. Однако, можно перейти к новым фазовым координатам $q(x), p^*(x)$, в пространстве которых фазовый объем будет являться постоянной величиной.

Пусть

$$\bar{p}^+(x) = \bar{p}(x), \quad p_y^+ = \frac{1}{u_\lambda} p_y = \frac{d}{dy_\lambda} (\Delta y_y) = (\Delta y_y)' = \frac{\Delta u_y}{u_\lambda}. \quad (6.91)$$

Введем следующие вспомогательные обозначения:

$$w(x) = \begin{Bmatrix} q_y(x) \\ p(x) \end{Bmatrix}, \quad w^+(x) = \begin{Bmatrix} q_y(x) \\ p^+(x) \end{Bmatrix}, \quad (6.92)$$

$$I^+ = \begin{Bmatrix} I_y & 0 \\ 0 & I_y(x) + \frac{1}{u_\lambda} I_y(y) \end{Bmatrix}. \quad (6.93)$$

Из последнего выражения следует, что

$$(I^+)^{-1} = \begin{Bmatrix} I_y & 0 \\ 0 & I_y(x) + u_\lambda I_y(y) \end{Bmatrix}. \quad (6.94)$$

Тогда связь между новыми фазовыми координатами $w^+(x)$ и старыми $w(x)$ можно представить в виде

$$w(x) = (I^+)^{-1} w^+(x). \quad (6.95)$$

Уравнения движения для новых фазовых координат при этом примут вид:

$$w^{+'}(x) = I^+ p (I^+)^{-1} w^+(x) - I^+ (I^{+'})^{-1} w^+(x) = p^+ w^+(x). \quad (6.96)$$

где

$$p^+ = I^+ p (I^+)^{-1} - I^+ (I^{+'})^{-1}, \quad (6.97)$$

$$p = \begin{Bmatrix} 0 & u_\lambda^{-1}(y) I_y(x) \\ I_y(x) V & I_y(x) W \end{Bmatrix}, \quad (6.98)$$

$$(I^{+-1})' = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & u_\lambda' I_\nu(u) \end{array} \right\| \quad (6.99)$$

$$I^+(I^{+-1})' = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \\ & u_\lambda^{-1} u_\lambda' I_\nu(u) \end{array} \right\|. \quad (6.100)$$

Используя уравнение движения для осевой частицы

$$\frac{d u_\lambda(c)}{ds} = E_\lambda(c) u_\nu(c), \quad (6.101)$$

с точностью до членов второго порядка малости получим

$$I^+ \cdot (I^{+-1})' = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I_\nu(u) \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda^2(c)} E_\lambda(c) \end{array} \right\|. \quad (6.102)$$

Упражнение 6.2. Показать, что если матрицу ρ^+ представить в виде (с точностью до членов второго порядка малости):

$$\rho^+ = \left\| \begin{array}{cc} 0 & I_\nu(x) [u_\lambda^{-1}(c) I_\nu(x) + I_\nu(u)] \\ I_\nu(x) V^+ & I_\nu(x) W^+ \end{array} \right\|, \quad (6.103)$$

то матрицы V^+ и W^+ имеют вид

$$V^+ = u_\lambda(c) P(\kappa', 0) + T \cdot P(\kappa, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot P(B(c), 0) i(1) + \quad (6.104) \\ + \frac{u_\nu(c)}{u_\lambda(c)} \cdot \frac{\partial E^{(4)}(c)}{\partial y} + \frac{1}{u_\lambda(c)} \cdot \frac{\partial E_\lambda(c) \cdot i(4)}{\partial y},$$

$$T = u_\lambda(c) P(\kappa, 0) I_\nu(\lambda) - [P(B(c), 0) + u_\lambda(c) P(\kappa, 0)] I_\nu(\lambda) + \frac{1}{u_\lambda(c)} \dot{\nu}(c) [E_\lambda(c) \tilde{\nu}(\lambda) - \tilde{E}^{(4)}(\lambda, c)]. \quad (6.105)$$

$$\tilde{E}^{(4)}(c) = \| E_1(c), E_2(c), E_3(c), 0 \|, \quad (6.106)$$

$$P(B(c), E(c)) = P(B(c), 0) + \dot{\nu}(c) \tilde{E}^{(4)}(c) + E^{(4)}(c) \tilde{\nu}(c), \quad (6.107)$$

$$W^+ = \frac{1}{u_\lambda(c)} [P(B(c), 0) + 2u_\lambda(c) P(\kappa, c)] + \frac{1}{u_\lambda^2(c)} \dot{\nu}(c) \tilde{E}^{(4)}(c) - \frac{1}{u_\lambda^2(c)} E^{(4)}(\lambda, c) \tilde{\nu}(c) + u_\nu(c) P(\kappa, 0) \dot{\nu}(\lambda) \tilde{\nu}(c). \quad (6.108)$$

Таким образом, уравнения движения в новых фазовых координатах имеют вид

$$\frac{d}{dy_\lambda} \begin{pmatrix} q(\lambda) \\ p^+(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(\lambda) \\ p^+(\lambda) \end{pmatrix}' = P^+ \begin{pmatrix} q(\lambda) \\ p^+(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.109)$$

$$P^+(\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(c) \cdot \bar{y}'(\lambda) \\ (\Delta y_4)' \end{pmatrix}. \quad (6.110)$$

При этом след матрицы P^+ равен нулю,

$$\langle P^+ \rangle \equiv 0, \quad (6.111)$$

и при движении некоторого множества в пространстве $(q(\lambda), p^+(\lambda))$ его объем остается постоянным.

Упражнение 6.3. Показать, что при $\lambda=1$ для фазовых координат

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \Delta y_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}^+ = \begin{pmatrix} u_1(c) y_2' \\ u_1(c) y_3' \\ (\Delta y_4)' \end{pmatrix}, \quad (6.112)$$

уравнения движения заряженных частиц имеют вид:

$$\begin{vmatrix} \bar{q} \\ \bar{p}^+ \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 0 & L \\ V^+ & W^+ \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{q} \\ \bar{p}^+ \end{vmatrix}, \quad (6.113)$$

где элементы матриц L , V^+ и W^+ определяются следующими выражениями:

$$L_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k).$$

$$L_{11} = L_{22} = \frac{1}{u_1(c)} = \frac{1}{\gamma(c) \bar{v}_1(c)}$$

$$L_{33} = 1.$$

$$V_{11}^+ = (B_1(c) + \gamma(c) \bar{v}_1(c) \cdot K_1) K_1 - \gamma(c) \bar{v}_1(c) K_3^2 - \frac{\partial B_3}{\partial y_2}(c) + \frac{1}{\bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_2}{\partial y_2}(c).$$

$$V_{12}^+ = \gamma(c) \bar{v}_1(c) (K_1' + K_2 K_3) - \frac{\partial B_3}{\partial y_3}(c) + \frac{1}{\bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_2}{\partial y_3}(c).$$

$$V_{13}^+ = - \frac{\partial B_3}{\partial y_4}(c) + \frac{1}{\bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_2}{\partial y_4}(c).$$

$$V_{21}^+ = \gamma(c) \bar{v}_1(c) (K_2 K_3 - K_1') + \frac{\partial B_2}{\partial y_2}(c) + \frac{1}{\bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_3}{\partial y_2}(c).$$

$$V_{22}^+ = [B_1(c) + \gamma(c) \bar{v}_1(c)] K_1 - \gamma(c) \bar{v}_1(c) K_2^2 + \frac{\partial B_2}{\partial y_3}(c) + \frac{1}{\bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_3}{\partial y_3}(c).$$

$$V_{23}^+ = \frac{\partial B_2}{\partial y_4}(c) + \frac{1}{\bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_3}{\partial y_4}(c).$$

$$V_{31}^+ = \frac{1}{\gamma(c) \bar{v}_1(c)} \left[E_1(c) K_3 + E_3(c) K_1 + \frac{\partial E_1}{\partial y_2}(c) \right].$$

$$V_{32}^+ = \frac{1}{\gamma(c) \bar{v}_1(c)} \cdot \left[\frac{\partial E_1}{\partial y_3}(c) - E_2(c) K_1 - E_1(c) K_2 \right]$$

$$V_{33}^+ = \frac{1}{\gamma(c) \bar{v}_1(c)} \frac{\partial E_1}{\partial y_4}(c).$$

$$W_{\alpha\alpha}^+ = 0, \quad \langle \alpha = 1, 2, 3 \rangle.$$

$$W_{12}^+ = \frac{B_1(c)}{\gamma(c) \bar{v}_1(c)} + 2K_1.$$

$$W_{13}^+ = - \frac{1}{\gamma^2(c) \cdot \bar{v}_1^2(c)} E_2(c) - \gamma(c) K_3.$$

$$W_{21}^+ = -W_{12}^+ = - \frac{B_1(c)}{\gamma(c) \bar{v}_1(c)} + 2K_1.$$

$$W_{23}^+ = - \frac{1}{\gamma^2(c) \bar{v}_1^2(c)} E_3(c) + \gamma(c) K_2.$$

$$W_{31}^+ = \frac{E_2(c)}{\gamma^2(c) \bar{v}_1^2(c)}$$

$$W_{32}^+ = \frac{E_3(c)}{\gamma^2(c) \bar{v}_1^2(c)}$$

§ 7. Линеаризация уравнений Максвелла в вакууме в криволинейной системе координат.

В предположении, что плотностью тока и плотностью зарядов можно пренебречь, уравнения Максвелла в вакууме в криволинейной системе координат записываются следующим образом:

$$\tilde{\nabla}(y) \gamma P(B, E) \cdot G + \tilde{\nabla}(\lambda) \gamma [P(B, E) G \cdot P(K, 0) - P(K, 0) P(B, E) G] = 0. \quad (7.1)$$

$$\tilde{\nabla}(y) \gamma P(-E, B) + \tilde{\nabla}(\lambda) \gamma [P(-E, B) \cdot P(K, 0) - P(K, 0) \cdot P(-E, B)] = 0. \quad (7.2)$$

В этих уравнениях действия оператора $\tilde{\nabla}(y)$ относятся только к матричным функциям $P(B, E)$ и $P(-E, B)$. Матрица G имеет вид

$$G = \begin{vmatrix} -I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.3)$$

Поскольку в матрице $P(k, 0)$ четвертый столбец и строка являются нулевыми, то справедливо следующее равенство

$$G \cdot P(k, 0) = P(k, 0) G. \quad (7.4)$$

Поэтому уравнение (7.1) можно переписать в виде

$$\underbrace{\tilde{V}(y) \cdot Y \cdot P(B, E)} + \tilde{I}(\lambda) Y [P(B, E) \cdot P(k, 0) - P(k, 0) \cdot P(B, E)] = 0. \quad (7.5)$$

Рассмотрим, чему равно выражение $\tilde{V}(y) P(B, E)$ на оси пучка. Допустим, с точностью до членов первого порядка малости:

$$\tilde{V}(y) \cdot P(B, E) = \tilde{V}(y) [P(B(c), E(c)) + \underbrace{\tilde{V}(y) \cdot q(\lambda) \cdot P(B(c), E(c))}] \quad (7.6)$$

Но матрица $P(B(c), E(c))$ зависит только от y_λ . Поэтому

$$\tilde{V}(y) P(B, E) = \tilde{V}(y) I(\lambda) P(B(c), E(c)) + \underbrace{\tilde{V}(y) \cdot q(\lambda) \cdot \tilde{V}(y)} \cdot P(B(c), E(c)). \quad (7.7)$$

Для произведения $q(\lambda) \tilde{V}(y)$ получим

$$\underbrace{q(\lambda) \tilde{V}(y)} = I(\lambda). \quad (7.8)$$

Заменяя $q(\lambda) \tilde{V}(y)$ на $I(\lambda)$, найдем выражение для $\tilde{V}(y) P(B, E)$.

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y) P(B, E) &= \tilde{V}(y) I(\lambda) P(B(c), E(c)) + \tilde{V}(y) I(\lambda) P(B(c), E(c)) = \\ &= \tilde{V}(y) P(B(c), E(c)). \end{aligned} \quad (7.9)$$

На оси C пучка уравнения (7.5) и (7.2) примут вид:

$$\tilde{\nabla}(y) P(B(c), E(c)) + \tilde{l}(\lambda) [P(B(c), E(c)) \cdot P(k, 0) - P(k, 0) P(B(c), E(c))] = 0, \quad (7.6)$$

$$\tilde{\nabla}(y) P(-E(c), B(c)) + \tilde{l}(\lambda) [P(-E(c), B(c)) P(k, 0) - P(k, 0) \cdot P(-E(c), B(c))] = 0. \quad (7.7)$$

Под выражением вида $\tilde{\nabla}(y) P(B(c), E(c))$ мы понимаем значение выражения $\tilde{\nabla}(y) P(B, E)$ на оси C .

Положим $\lambda = 1$ и запишем уравнения (7.6) и (7.7) для каждой из векторных компонент. Тогда для уравнения (7.6) получим следующие скалярные уравнения:

$$-\frac{\partial B_3}{\partial y_2}(c) + \frac{\partial B_2}{\partial y_3}(c) + \frac{\partial E_1}{\partial y_4}(c) = 0. \quad (7.8)$$

$$B_3'(c) - \frac{\partial B_1}{\partial y_3}(c) + \frac{\partial E_2}{\partial y_4}(c) + B_2(c)K_1 - B_1(c)K_2 = 0. \quad (7.9)$$

$$-B_2'(c) + \frac{\partial B_1}{\partial y_2}(c) + \frac{\partial E_3}{\partial y_4}(c) + B_3(c)K_1 - B_1(c)K_3 = 0. \quad (7.10)$$

$$E_1'(c) + \frac{\partial E_2}{\partial y_2}(c) + \frac{\partial E_3}{\partial y_3}(c) + E_3(c)K_2 - E_2(c)K_3 = 0. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.7) дает следующие четыре уравнения:

$$\frac{\partial E_3}{\partial y_2}(c) - \frac{\partial E_2}{\partial y_3}(c) + \frac{\partial B_1}{\partial y_4}(c) = 0, \quad (7.12)$$

$$-E_3'(c) + \frac{\partial E_1}{\partial y_3}(c) + \frac{\partial B_2}{\partial y_4}(c) + E_1(c)K_2 - E_2(c)K_1 = 0. \quad (7.13)$$

$$E_2'(c) - \frac{\partial E_1}{\partial y_2}(c) + \frac{\partial B_3}{\partial y_4}(c) + E_1(c)K_3 - E_3(c)K_1 = 0. \quad (7.14)$$

$$-B_1'(c) - \frac{\partial B_2}{\partial y_2}(c) - \frac{\partial B_3}{\partial y_3}(c) + B_2(c)k_3 - B_3(c)k_2 = 0. \quad (7.15)$$

Аналогичным образом можно получить уравнения Максвелла для коэффициентов при первой и более высоких степенях $y_2, y_3, \Delta y_4$.

В частном случае статического магнитного поля для репера Френе ($k_1 = \chi = \frac{1}{c}$, $k_2 = 0$, $k_3 = \kappa = \frac{1}{\rho}$) уравнения Максвелла на оси S в криволинейной системе координат принимают вид:

$$\frac{\partial B_2}{\partial y_3}(c) - \frac{\partial B_3}{\partial y_2}(c) = 0,$$

$$B_3'(c) - \frac{\partial B_1}{\partial y_3}(c) = 0.$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial y_2}(c) + B_3(c) \frac{1}{c} - B_1(c) \frac{1}{\rho} = 0.$$

$$B_1'(c) + \frac{\partial B_2}{\partial y_2}(c) + \frac{\partial B_3}{\partial y_3}(c) = 0.$$

Г Л А В А 5.

ТЕОРИЯ ОГИБАЮЩИХ И ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФОКУСИРОВКА

В данной главе мы рассмотрим методы, позволяющие одновременно следить за движением всех частиц, входящих в некоторое фазовое множество M . Эти методы основаны на том, что достаточно рассмотреть изменение границы Γ множества M , чтобы получить представление о движении пучка частиц в расширенном фазовом пространстве. Под расширенным фазовым пространством $\mathcal{P}(F, S)$ мы понимаем прямое произведение $R \times F$ вещественной оси S и фазового пространства F , то есть пространство, в которое входят все фазовые координаты и независимая переменная S , определяющая движение пучка частиц.

Аналитическое описание границы Γ множества $M \subset F$ неразрывно связано с понятиями теории квадратичных форм.

§ 1. Квадратичные формы.

Рассмотрим некоторые определения и теоремы из теории квадратичных форм, которые понадобятся нам при дальнейшем изложении.

Квадратичной формой от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется однородный многочлен $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ второй степени от этих переменных. Если взять арифметический вектор x с компонентами x_1, x_2, \dots, x_n , то квадратичную форму $\varphi(x)$ можно записать в матричном виде

$$\varphi(x) = \tilde{x} A x, \quad (1.1)$$

где квадратная $n \times n$ матрица A называется матрицей квадратичной формы. Выражение (1.1) тождественно равно нулю в том и только в том случае, если A - антисимметричная

(кососимметричная) матрица $(A = -\tilde{A})$. Поскольку произвольную матрицу можно представить в виде суммы симметричной (Симметрической) и антисимметричной (кососимметрической) матриц, то под матрицей A в выражении (1.1) будем подразумевать симметричную (действительную) матрицу

$$A = \tilde{A}. \quad (1.2)$$

Квадратичная форма (1.1) называется положительно определенной, отрицательно определенной, неотрицательной или неположительной, если для всех нетривиальных x соответственно

$$\tilde{x}Ax > 0, \quad \tilde{x}Ax < 0, \quad \tilde{x}Ax \geq 0, \quad \tilde{x}Ax \leq 0.$$

Произведем линейное преобразование переменных x формы (1.1) согласно подстановке

$$x = T \cdot y, \quad (1.3)$$

где T - квадратная $(n \times n)$ неособенная матрица. Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$\varphi(y) = \tilde{y} \tilde{T} A T y. \quad (1.4)$$

Обозначая

$$\tilde{T} A T = B, \quad (1.5)$$

запишем (1.4) в виде

$$\varphi(y) = \tilde{y} B y. \quad (1.6)$$

Из (1.5) следует, что матрица B является симметричной матрицей $(B = \tilde{B})$. Таким образом, матрица линейного однородного преобразования T переводит квадратичную форму от переменных x в квадратичную форму от новых переменных y .

Для каждой действительной квадратичной формы (1.1) существует действительная ортогональная $(T \tilde{T} = I_n)$ матрица T , при-

водящая матрицу A к диагональному виду, а квадратичную форму (1.1) к нормальному виду:

$$\tilde{x} A x = \tilde{y} \tilde{T} A T y = \lambda_i y_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

где множество действительных чисел λ_i составляет спектр собственных значений матрицы A .

С помощью добавочного преобразования

$$y_\alpha = |\lambda_\alpha|^{1/2} z_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \quad (1.8)$$

выражение (1.7) приводится к каноническому виду

$$\tilde{x} A x = \text{sign } \lambda_i \cdot z_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.9)$$

где $\text{sign } \lambda_i$ равно $+1$, -1 или 0 , если соответствующее собственное значение λ_i положительно, отрицательно или равно нулю.

Для того, чтобы вещественная квадратичная форма (1.1) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы при приведении ее к диагональному виду вещественным неособенным линейным преобразованием переменных (1.3) все коэффициенты при квадратах новых переменных y в выражении (1.7) были положительны

$$\text{sign } \lambda_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

§ 2. Замкнутые гиперповерхности второго порядка.

2.1. Объем тела, ограниченного замкнутой центральной гиперповерхностью второго порядка. Как известно, уравнение замкнутой центральной гиперповерхности второго порядка в пространстве R^n описывается уравнением

$$\tilde{x} A x = 1, \quad (2.1)$$

где матрица A является матрицей положительно определенной квадратичной формы. Рассмотрим линейное преобразование

$$x = T \cdot y, \quad (2.2)$$

приводящее квадратичную форму $\tilde{x} A x$ к каноническому виду

$$\tilde{y} y = 1. \quad (2.3)$$

При этом матрица T должна удовлетворять уравнению

$$\tilde{T} A T = I_n, \quad (2.4)$$

а ее определитель подчиняется уравнению:

$$|\tilde{T}| \cdot |A| \cdot |T| = |T|^2 \cdot |A| = 1, \quad (2.5)$$

откуда следует

$$|T| = |A|^{-1/2}. \quad (2.6)$$

Мы рассматриваем матрицы T с положительными определителями.

Введем матрицу B , обратную матрице A ,

$$B \equiv A^{-1}. \quad (2.7)$$

Определитель матрицы B равен

$$|B| = |A|^{-1}. \quad (2.8)$$

Тогда получим

$$|T| = \sqrt{B}. \quad (2.9)$$

Найдем объем n -мерного тела, заключенного внутри поверхности

$$\tilde{x} A x = 1. \quad (2.10)$$

Обозначая этот объем через V_n , получим

$$V_n = \int_{\tilde{x} A x \leq 1} dx. \quad (2.11)$$

Переходя к переменной y , определяемой преобразованием (2.2) с матрицей T , подчиняющейся уравнению (2.4), найдем

$$V_n = \int_{\tilde{x} A x \leq 1} dx = \int_{\tilde{y} y \leq 1} \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| dy = \int_{\tilde{y} y \leq 1} |T| dy = \quad (2.12)$$

$$= |T| \int_{\tilde{y} y \leq 1} dy = \sqrt{|\beta|} \cdot \int_{\tilde{y} y \leq 1} dy = \sqrt{|\beta|} \cdot \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})},$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция от x , а

$$|\beta|^{-1/2} \cdot V_n = |A|^{1/2} \cdot V_n$$

является объемом n -мерной сферы. Для случая четного n ($n = 2k$) и нечетного n ($n = 2k-1$) получим:

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \sqrt{|\beta|}, \quad (2.13)$$

$$V_{2k-1} = \frac{\pi^{k-1} \cdot 2^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2k-1} \cdot \sqrt{|\beta|}. \quad (2.14)$$

Таким образом, определитель матрицы β , обратной матрице A квадратичной формы, с точностью до коэффициента равен квадрату объема тела, заключенного внутри поверхности (2.10).

В дальнейшем $V^+ = \sqrt{|\beta|}$ будем называть приведенным объемом

множества, определяемого неравенством

$$\tilde{x} A x \leq 1, \quad (2.15)$$

где матрица $A = B^{-1}$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы

$$\tilde{x} A x > 0. \quad (2.16)$$

2.2. Объем тела, ограниченного замкнутой нецентральной гиперповерхностью второго порядка. Рассмотрим общее уравнение поверхности второго порядка в виде

$$\tilde{x} A x + \tilde{b} x + \tilde{x} v = c, \quad (2.17)$$

где A - симметричная вещественная неособенная матрица порядка $n \times n$; \tilde{b} - n -мерный вектор; c - скаляр, причем

$$c + \tilde{b} A^{-1} v = c + \tilde{b} b v > 0. \quad (2.18)$$

Произведем в (2.17) замену переменных согласно преобразованию

$$x = y - b v. \quad (2.19)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{x} A x + \tilde{b} x + \tilde{x} v &= (\tilde{y} - \tilde{b} b) A (y - b v) + \tilde{b} (y - b v) + (\tilde{y} - \tilde{b} b) v = \\ &= \tilde{y} A y - \tilde{b} y - \tilde{y} v + \tilde{b} b v + \tilde{b} y - \tilde{b} b v + \tilde{y} v - \tilde{b} b v = \tilde{y} A y - \tilde{b} b v. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, уравнение поверхности (2.17) для переменных y можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{x} A x + \tilde{b} x + \tilde{x} v &= (\tilde{y} - \tilde{b} b) A (y - b v) + \tilde{b} (y - b v) + (\tilde{y} - \tilde{b} b) v = \\ &= \tilde{y} A y - \tilde{b} y - \tilde{y} v + \tilde{b} b v + \tilde{b} y - \tilde{b} b v + \tilde{y} v - \tilde{b} b v = \tilde{y} A y - \tilde{b} b v. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Будем считать, что матрица A является положительно определенной. Тогда матрица \bar{A} вследствие (2.18) также будет поло-

хительно определенной, а уравнения (2.17) и (2.21) будут определять замкнутую поверхность. Уравнение (2.21) в пространстве y определяет центральную поверхность. Объем $V_n(y)$ тела заключенного внутри этой поверхности, равный объему тела $V_n(x)$ внутри поверхности (2.17), тогда определится выражениями:

$$V_{2k}(y) = V_{2k}(x) = V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \sqrt{|\bar{\sigma}_{2k}|}, \quad (2.22)$$

$$V_{2k-1}(y) = V_{2k-1}(x) = V_{2k-1} = \frac{\pi^{k-1} \cdot 2^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k-1} \sqrt{|\bar{\sigma}_{2k-1}|}, \quad (2.23)$$

где

$$|\bar{\sigma}_{2k}| = |\bar{A}_{2k}^{-1}| = (c + \tilde{b} \sigma b)^{2k} |\sigma|, \quad (2.24)$$

$$|\bar{\sigma}_{2k-1}| = |\bar{A}_{2k-1}^{-1}| = (c + \tilde{b} \sigma b)^{2k-1} |\sigma|. \quad (2.25)$$

Таким образом, приведенные объемы

$$V_{2k}^+ = \frac{k!}{\pi^k} V_{2k}, \quad (2.26)$$

$$V_{2k-1}^+ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k-1}{\pi^{k-1} \cdot 2^k} \cdot V_{2k-1}, \quad (2.27)$$

для множества, определяемого неравенствами

$$\tilde{x} A x + \tilde{b} x + \tilde{x} b \leq c, \quad (2.28)$$

$$\tilde{x} A x + \tilde{b} x + \tilde{x} b + \tilde{b} \sigma b > 0, \quad (2.29)$$

$$c + \tilde{b} b b > 0, \quad (2.30)$$

определяются формулами:

$$V_{2k}^+ = (c + \tilde{b} b b)^k \cdot \sqrt{|b|}, \quad (2.31)$$

$$V_{2k-1}^+ = (c + \tilde{b} b b) \sqrt{\frac{|b|}{c + \tilde{b} b b}}. \quad (2.32)$$

Очевидно, что объем n -мерного тела внутри незамкнутой поверхности является бесконечно большой величиной. Поэтому необходимым и достаточным условием замкнутости поверхности можно считать конечность объема, заключенного внутри этой поверхности. Это утверждение справедливо как для гиперповерхностей II порядка, так и для гиперповерхностей более высокого порядка.

Пример 2.1. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве определена замкнутая гиперповерхность второго порядка

$$\tilde{x} A x = 1. \quad (2.33)$$

Для $n=2$ уравнение (2.33) имеет вид

$$A_{11} x_1^2 + 2 A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_2^2 = 1. \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) является уравнением эллипса с центром в начале координат на координатной плоскости (x_1, x_2) . Двумерным объемом тела, заключенным внутри эллипса (2.34), является площадь эллипса, которая равна

$$V_2 = S = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}}. \quad (2.35)$$

Пример 2.2. Для $n = 3$ уравнение (2.33) описывает поверхность эллипсоида

$$A_{11} x_1^2 + A_{22} x_2^2 + A_{33} x_3^2 + 2A_{12} x_1 x_2 + 2A_{13} x_1 x_3 + 2A_{23} x_2 x_3 = 1 \quad (2.36)$$

с центром в начале системы координат (x_1, x_2, x_3) . Объем эллипсоида будет равен

$$V_3 = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{1}{|A|}}; \quad (2.37)$$

где

$$|A| = A_{11} A_{22} A_{33} + 2A_{12} A_{23} A_{13} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} - A_{23}^2 A_{11}. \quad (2.38)$$

2.3. Проекция замкнутой поверхности на плоскости. В случае n -мерного евклидова пространства рассмотрим проекции поверхности

$$\tilde{X} A X = 1. \quad (2.39)$$

на плоскости (x_i, x_k) , где $i, k = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, что такие проекции будут иметь форму эллипса, определяемого уравнением

$$\|x_i, x_k\| \cdot \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i \\ x_k \end{vmatrix} = 1, \quad (2.40)$$

или

$$A_{ii} x_i^2 + 2A_{ik} x_i x_k + A_{kk} x_k^2 = 1, \quad (2.41)$$

где матрица

$$A(i, k) = \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

является матрицей положительно определенной квадратичной формы

$$\varphi(x_i, x_k) = \|x_i, x_k\| \cdot A(i, k) \cdot \begin{vmatrix} x_i \\ x_k \end{vmatrix}.$$

Матрицу $A(i, k)$ будем называть проекцией матрицы A на двумерное пространство (x_i, x_k) .

2.4. Экстремальные значения компонент вектора x на поверхности $\tilde{x}Ax = 1$. Обозначим множество точек на поверхности

$$\tilde{x}Ax = 1 \quad (2.43)$$

через $\Gamma(A)$. Очевидно, что каждая из компонент вектора x пробегает на поверхности (2.43) значения от некоторого $x_{i, \min}$ до некоторого $x_{i, \max}$, где

$$x_{i, \max} = \max_{x_i \in \Gamma(A)} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.44)$$

$$x_{i, \min} = \min_{x_i \in \Gamma(A)} x_i.$$

Найдем $x_{i, \max}$ и $x_{i, \min}$ для центральной поверхности (2.43). Для этого будем искать по множеству $\Gamma(A)$ экстремум функции $f(\rho)$, где

$$f(\rho) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i^2 = \tilde{x} \bar{I}_n(i) x \quad (2.45)$$

при наличии соотношения

$$\varphi(\rho) = 0 = \tilde{x}Ax - 1. \quad (2.46)$$

Как известно, такая задача сводится к нахождению экстремума для функции Лагранжа $L(\rho)$,

$$L(\rho) = f(\rho) + \lambda \varphi(\rho) = \tilde{x} [I_n(i) + \lambda A] x - \lambda, \quad (2.47)$$

где λ - постоянный скалярный множитель. В точке экстремума ρ_0 дифференциал $dL(\rho_0)$ должен обращаться в нуль:

$$dL(\rho_0) = d\tilde{x} [I_n(i) + \lambda A] x(\text{ext}_2(i)) + \tilde{x}(\text{ext}_2(i)) [I_n(i) + \lambda A] dx = 0, \quad (2.48)$$

где $x(\text{ext}_2(i))$ - вектор x с одной из экстремальных компонент, а именно x_i . Выражение (2.48) обращается в нуль, если

$$(I_n(i) + \lambda A) x(\text{ext}_2(i)) = 0, \quad (2.49)$$

или

$$\left(\frac{1}{\lambda} B I_n(i) + I_n \right) x(\text{ext}_2(i)) = 0. \quad (2.50)$$

Поскольку тождественное равенство $x \equiv 0$ не удовлетворяет условию (2.46), то для существования решения однородного линейного уравнения (2.50), отличного от нуля, необходимо, чтобы определитель матрицы $\lambda^{-1} B I_n(i) + I_n$ был равен нулю.

Поэтому получаем

$$\left| I_n + \lambda^{-1} B I_n(i) \right| = 0. \quad (2.51)$$

Матрица $I_n + \lambda^{-1} B I_n(i)$ является матрицей элементарного изгиба с i -ой производящей строкой. Следовательно, ее определитель равен диагональному элементу, стоящему на пересечении i -ой строки и i -ого столбца,

$$\left| I_n + \lambda^{-1} B I_n(i) \right| = 1 + \lambda^{-1} b_{ii} = 0, \quad (2.52)$$

откуда находим

$$\lambda = -\sigma_{ii}. \quad (2.53)$$

Подставляя (2.49) и (2.53) в (2.47), получаем

$$L(P_0) = \sigma_{ii}. \quad (2.54)$$

Но, поскольку

$$\varphi(P) = 0, \quad (2.55)$$

то имеем

$$L(P) \equiv f(P), \quad (2.56)$$

откуда следует

$$f(P_0) = x_i^2(\text{ext}_2(i)) = x_{i, \text{ext}_2}^2 = \sigma_{ii}. \quad (2.57)$$

Очевидно, что для центральной поверхности (2.43) имеет место

$$x_{i, \max} = \max_{x_i \in \Gamma(A)} x_i = \sqrt{\sigma_{ii}}. \quad (2.58)$$

$$x_{i, \min} = \min_{x_i \in \Gamma(A)} x_i = -\sqrt{\sigma_{ii}}. \quad (2.59)$$

Обозначая через $x(\max(i))$ такое значение вектора x , при котором его i -ая компонента равна $x_{i, \max}$, найдем из уравнения (2.50):

$$x_k(\max(i)) = \frac{\sigma_{ki}}{\sqrt{\sigma_{ii}}}, \quad k, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.60)$$

$$X_k(\min(i)) = - \frac{b_{ki}}{\sqrt{b_{ii}}} \quad (2.61)$$

Таким образом, экстремальные значения компонент вектора x на поверхности $\tilde{x}Ax=1$ определяются соответствующими диагональными элементами матрицы $B=A^{-1}$.

Упражнение 2.1. Показать, что если множества всех точек, принадлежащих замкнутой нецентральной поверхности

$$\tilde{x}Ax + \tilde{b}x + \tilde{x}b = c \quad (2.62)$$

обозначить через $\Gamma(A, b, c)$, то имеют место следующие формулы:

$$X_{j, \max} = \max_{x_j \in \Gamma(A, b, c)} x_j = \sqrt{(c + \tilde{b}b) b_{jj}} - \tilde{l}(j) b \cdot b, \quad (2.63)$$

$$X_{j, \min} = \min_{x_j \in \Gamma(A, b, c)} x_j = -\sqrt{(c + \tilde{b}b) b_{jj}} - \tilde{l}(j) b \cdot b, \quad (2.64)$$

$$X_k(\max(j)) = \sqrt{c + \tilde{b}b} \cdot \frac{b_{ki}}{\sqrt{b_{ii}}} - \tilde{l}(k) b \cdot b, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (2.65)$$

$$X_k(\min(j)) = -\sqrt{c + \tilde{b}b} \cdot \frac{b_{ki}}{\sqrt{b_{ii}}} - \tilde{l}(k) b \cdot b, \quad (2.66)$$

где

$X_k(\max(j))$ ($X_k(\min(j))$) - k -ая компонента такого вектора x , j -ая компонента которого на поверхности (2.62) имеет максимальное (минимальное) значение из всех возможных значений x_j на этой поверхности.

Таким образом, экстремальные значения компонент x_j векто-

ра x на поверхностях (2.43) или (2.62) имеют простой аналитический вид, получаемый при использовании матрицы B и определяемый выражениями (2.58)-(2.61) и (2.63)-(2.66).

§ 3. Огибающие семейства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.1. Огибающие фазовые поверхности. Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{ds} = P(s)x, \quad (3.1)$$

где $P(s)$ - матричная $n \times n$ функция, а x - n -мерный арифметический вектор. Пусть множество начальных данных задачи Коши описывается неравенством

$$\tilde{x}_0 A_0 x_0 \leq 1, \quad (3.2)$$

где A_0 - симметричная постоянная $n \times n$ матрица, а

$$x_0 = x(s_0). \quad (3.3)$$

Поверхность

$$\tilde{x}_0 A_0 x_0 = 1 \quad (3.4)$$

назовем начальной огибающей фазовой поверхностью в фазовом пространстве (x) для семейства решений уравнения (3.1) с множеством начальных данных (3.2). Множество начальных данных (3.2) обозначим через $M(A(s_0)) = M_0$, а множество начальных данных, лежащих на поверхности (3.4), обозначим через $\Gamma(A(s_0)) = \Gamma_0$.

Запишем решение задачи Коши уравнения (3.1) для

$$x_0 \in M_0$$

через матрицант $R(p, s/s_0) = R(s/s_0) = R.$

$$x(s) = R(p, s/s_0) x_0 = R x_0. \quad (3.5)$$

Пусть x_0 находится на поверхности (3.4), то есть

$$x_0 \in \Gamma_0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим, как меняется поверхность Γ с изменением s .

Для этого подставим в уравнение (3.4) значение x_0 , равное :

$$x_0 = R^{-1} \cdot x. \quad (3.7)$$

Тогда получим

$$\tilde{x}_0 A_0 x_0 = \tilde{x} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} x = 1. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) можно записать в виде

$$\tilde{x} A x = 1, \quad (3.9)$$

где

$$A = \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} = \tilde{R}^{-1}(p, s/s_0) A_0 R^{-1}(p, s/s_0). \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) является уравнением гиперповерхности второго порядка, которую мы обозначим через $\Gamma(A(s))$, и определяет множество решений $\Gamma(A(s))$, причем $\Gamma(A(s))$ является образом $\Gamma(A(s_0)) = \Gamma_0$ в силу уравнения (3.1), а матрица $A(s)$ - образом матрицы A_0 . При этом множество решений $M(A(s)) = M(A_0) = M_0$ переходит в множество решений $M(A)$, описываемое неравенством

$$\tilde{x} A x \leq 1. \quad (3.11)$$

поверхность $\Gamma(A)$ является огибающей фазовой поверхностью в фазовом пространстве (x) семейства решений из множества $M(A)$.

Матрицу A назовем матрицей формы огибающей поверхности, или просто матрицей формы. Уравнение (3.10) служит уравнением этой матрицы.

Вводя матрицу B , обратную матрице A ,

$$B = A^{-1}. \quad (3.12)$$

получим

$$B = R(P, s/s_0) B_0 \tilde{R}(P, s/s_0) = R B_0 \tilde{R}. \quad (3.13)$$

Матрицу B , играющую важную роль в теории огибающих, назовем огибающей матрицей. Уравнение (3.13) показывает, как с изменением s меняется матрица B .

Найдем определитель матрицы B .

$$|B| = |R|^2 |B_0|. \quad (3.14)$$

Обозначая попрежнему через $\langle P \rangle$ след матрицы P ,

$$\langle P \rangle = \sum_{j=1}^n P_{jj} = \tilde{\epsilon}(j) P \epsilon(j), \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (3.15)$$

и, учитывая, что

$$|R(P, s/s_0)| = \exp \int_{s_0}^s \langle P(s') \rangle ds', \quad (3.16)$$

получим

$$|\mathcal{B}(s)| = \exp 2 \int_{s_0}^s \langle P(s) \rangle ds. \quad (3.17)$$

Используя результаты предыдущего параграфа, найдем объем множества $M(A)$, обозначаемый через $V_n(A)$.

$$V_{2k}(A) = \frac{\pi^k}{k!} \exp \int_{s_0}^s \langle P(s) \rangle ds \cdot \sqrt{|\mathcal{B}_0|}. \quad (3.18)$$

$$V_{2k-1}(A) = \frac{\pi^{k-1} \cdot 2^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k-1} \exp \int_{s_0}^s \langle P(s) \rangle ds \cdot \sqrt{|\mathcal{B}_0|}. \quad (3.19)$$

Матрица формы $A(s)$ и огибающая матрица $\mathcal{B}(s)$ определяют форму гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве R^n . При этом объем тела (множества), заключенного внутри замкнутой поверхности (3.9), определяется выражениями (3.18) и (3.19).

3.2. Огибающие кривые. Максимальные и минимальные значения фазовых координат x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) по множеству $M(A)$ или, что то же самое, по множеству $\Gamma(A)$, будут иметь вид

$$x_{j, \max} = \max_{x_j \in \Gamma(A)} x_j = \sqrt{\mathcal{B}_{jj}} = \sqrt{\tilde{\mathcal{I}}(j) R \mathcal{B}_0 \tilde{R}^i(j)}, \quad \langle j = 1, 2, \dots, n \rangle. \quad (3.20)$$

$$x_{j, \min} = \min_{x_j \in \Gamma(A)} x_j = -\sqrt{\mathcal{B}_{jj}} = -\sqrt{\tilde{\mathcal{I}}(j) R \mathcal{B}_0 \tilde{R}^i(j)}. \quad (3.21)$$

Кривую $x_{j, \max}(s)$ назовем максимальной огибающей кривой, а кри-

вуд $x_{j, \min}(s)$ - минимальной огибающей.

Возьмем некоторую точку x_0 из множества $M(A_0) = M_0$. В результате решения уравнения (3.1) получим некоторую траекторию x ,

$$x = R(P, s/s_0) \cdot x_0 = R \cdot x_0. \quad (3.22)$$

Проекция этой траектории на плоскость (x_j, s) будет $x_j(s)$,

где

$$x_j(s) = \tilde{i}(j) R(P, s/s_0) \cdot x_0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

Про такую траекторию можно сказать, что она должна обязательно находиться между максимальной и минимальной огибающими кривыми,

$$x_{j, \min}(s) \leq x_j(s) \leq x_{j, \max}(s). \quad (3.24)$$

Вектор, компонентами которого являются $x_{1, \max}(s)$, $x_{2, \max}(s)$, $x_{3, \max}(s)$, ..., $x_{n, \max}(s)$, обозначим через $x_{\max}(s)$ и назовем максимальным огибающим фазовым вектором. Аналогично определим минимальный огибающий фазовый вектор $x_{\min}(s)$. Нормы (длины) этих векторов будут равны квадратному корню из следа матрицы B :

$$\sqrt{\tilde{x}_{\max} \cdot x_{\max}} = \sqrt{\tilde{x}_{\min} \cdot x_{\min}} = \sqrt{\langle B(s) \rangle} \quad (3.25)$$

Огибающий фазовый вектор можно трактовать также следующим образом. Начальная огибающая фазовая поверхность $\Gamma(A_0) = \Gamma_0$ при изменении параметра s в расширенном фазовом пространстве (x, s) образует поверхность $\Gamma_s(A)$. Проекция этой поверхности $\Gamma_s(A)$ на плоскость (x_j, s) , то есть пере-

сечение поверхности $\Gamma_s(A)$ с плоскостью (x_j, s) , даст две кривые: $x_{j, \max}$ и $x_{j, \min}$. Таким образом, проектируя $\Gamma_s(A)$ на каждую из плоскостей (x_j, s) , где $j = 1, 2, \dots, n$, мы получим все компоненты максимального и минимального фазовых векторов.

3.3. Дифференциальное уравнение для огибающей матрицы. Уравнение для огибающей матрицы

$$B = R B_0 \tilde{R} \quad (3.26)$$

является решением некоторого дифференциального уравнения. Получим это уравнение, дифференцируя $B(s)$ по s . Производные по s будем обозначать штрихом.

$$B' = R' B_0 \tilde{R} + R B_0 \tilde{R}' \quad (3.27)$$

Вместо R' и \tilde{R}' подставим выражения

$$R' = P(s) R, \quad (3.28)$$

$$\tilde{R}' = \tilde{R} \tilde{P}(s). \quad (3.29)$$

Тогда получим

$$B' = P(s) R B_0 \tilde{R} + R B_0 \tilde{R} \tilde{P}(s). \quad (3.30)$$

Подставляя в (3.30) выражение (3.26), найдем

$$B' = P(s) B + B \tilde{P}(s). \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) является матричным дифференциальным уравнением для огибающей матрицы $B(s)$. Его решением служит выражение (3.26).

3.4. Нецентральные огибающие поверхности. Пусть начальной огибающей поверхностью семейства решений уравнения (3.1) будет нецентральная замкнутая поверхность

$$\tilde{\chi}_0 A_0 x_0 + \tilde{b}_0 x_0 + \tilde{\chi}_0 b_0 = 1. \quad (3.32)$$

Множество точек на этой поверхности обозначим через $\Gamma(A_0, b_0)$, а множество точек, описываемое неравенством

$$-\tilde{b}_0 b_0 b_0 < \tilde{\chi}_0 A_0 x_0 + \tilde{b}_0 x_0 + \tilde{\chi}_0 b_0 \leq 1, \quad (3.33)$$

обозначим через $M(A_0, b_0)$.

Тогда огибающей фазовой поверхностью при некотором значении параметра s является поверхность

$$\tilde{\chi} Ax + \tilde{b} x + \tilde{\chi} b = 1, \quad (3.34)$$

где

$$A = \tilde{R}^{-1}(P, s/s_0) A_0 R^{-1}(P, s/s_0) = b^{-1}, \quad (3.35)$$

$$b = \tilde{R}^{-1}(P, s/s_0) \cdot b_0. \quad (3.36)$$

Упражнение 3.1. Показать, что объем множества $M(A, b)$ из фазового пространства F для четных и нечетных n определяется выражениями:

$$V_{2k}(A, b) = \frac{\pi^k}{k!} (1 + \tilde{b}_0 b_0 b_0)^k \exp \int_{s_0}^s \langle P(s) \rangle ds \cdot \sqrt{|b_0|}, \quad (3.37)$$

$$V_{2k-1}(A, b) = \frac{\pi^{k-1} \cdot 2^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k-1} (1 + \tilde{b}_0 b_0 b_0)^{k-1/2} \exp \int_{s_0}^s \langle P(s) \rangle ds \cdot \sqrt{|b_0|}. \quad (3.38)$$

Упражнение 3.2. Показать, что максимальная и минимальная огибающие кривые для нецентральной фазовой огибающей поверхности (3.32) имеют вид:

$$x_{j, \max}(s) = \max_{x_j \in \Gamma(A, b)} x_j(s) = \sqrt{(1 + \tilde{b}_0 \tilde{b}_0 b_0) \tilde{i}(j) R \tilde{b}_0 \tilde{R} i(j)} - \tilde{i}(j) R \tilde{b}_0 b_0, \quad (3.39)$$

$$x_{j, \min}(s) = \min_{x_j \in \Gamma(A, b)} x_j(s) = -\sqrt{(1 + \tilde{b}_0 \tilde{b}_0 b_0) \tilde{i}(j) R \tilde{b}_0 \tilde{R} i(j)} - \tilde{i}(j) R \tilde{b}_0 b_0, \quad \langle j = 1, 2, \dots, n \rangle. \quad (3.40)$$

где

$$i_k(j) = \delta(k, j), \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.41)$$

Пример 3.1. Найти огибающий фазовый вектор для дифференциального уравнения

$$x'' + k(s)x = 0, \quad (3.42)$$

где

$$k(s) = \beta^2 \left[1 + \left(\frac{s - s_c}{d} \right)^2 \right]^{-2}, \quad (3.43)$$

β^2 , s_c и d - параметры, считая, что начальная фазовая огибающая поверхность задается уравнением

$$A_{011} x_0^2 + 2 A_{012} x_0 x_0' + A_{022} x_0'^2 = 1. \quad (3.44)$$

Записывая уравнение (3.42) в нормальной форме

$$z' = P(s)z, \quad z = \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}, \quad P(s) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -K(s) & 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

найдем элементы матрицанта $R(P, s/s_0) = R$.

$$R_{11} = \frac{1}{\omega \sin \psi} \left[\omega \cdot \sin \psi_0 \cos \omega (\psi - \psi_0) + \cos \psi_0 \sin \omega (\psi - \psi_0) \right], \quad (3.45)$$

$$R_{12} = - \frac{d}{\omega \sin \psi_0} \frac{\sin \omega (\psi - \psi_0)}{\sin \psi}, \quad (3.46)$$

$$R_{21} = R'_{11} = \frac{1}{d} \left\{ \sin \psi_0 \left[\cos \psi \cdot \cos \omega (\psi - \psi_0) + \omega \cdot \sin \psi \cdot \sin \omega (\psi - \psi_0) \right] + \right. \\ \left. + \cos \psi_0 \left[\frac{1}{\omega} \cos \psi \cdot \sin \omega (\psi - \psi_0) - \sin \psi \cdot \cos \omega (\psi - \psi_0) \right] \right\}, \quad (3.47)$$

$$R_{22} = R'_{12} = \frac{1}{\omega \sin \psi_0} \left[\omega \cdot \sin \psi \cos \omega (\psi - \psi_0) - \cos \psi \sin \omega (\psi - \psi_0) \right]. \quad (3.48)$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega^2 = 1 + \beta^2 d^2, \quad \operatorname{ctg} \psi = \frac{s - s_c}{d}, \quad \operatorname{ctg} \psi_0 = \frac{s_0 - s_c}{d}. \quad (3.49)$$

Уравнение (3.44) запишем в виде

$$\tilde{z}_0 A_0 z_0 = 1. \quad (3.50)$$

Введя огибающую матрицу B , где

$$B_0 = A_0^{-1} = \frac{1}{|A_0|} \begin{Bmatrix} A_{012} & -A_{011} \\ -A_{012} & A_{011} \end{Bmatrix}, \quad (3.51)$$

запишем

$$G = R B_0 \tilde{R}. \quad (3.52)$$

Значения компонент максимального огибающего вектора тогда будут равны

$$Z_{1, \max}^2 = X_{\max}^2 = B_{11} = R_{11}^2 B_{011} + 2 R_{11} R_{12} B_{012} + R_{12}^2 B_{022}, \quad (3.53)$$

$$Z_{2, \max}^2 = X_{\max}^2 = B_{22} = R_{21}^2 B_{011} + 2 R_{21} R_{22} B_{012} + R_{22}^2 B_{022}, \quad (3.54)$$

где

$$B_{011} = \frac{A_{022}}{A_{011} A_{022} - A_{012}^2}, \quad B_{012} = -\frac{A_{012}}{A_{011} A_{022} - A_{012}^2}, \quad B_{022} = \frac{A_{011}}{A_{011} A_{022} - A_{012}^2}, \quad (3.55)$$

а элементы матрицанта $R = R(P, s/s_0)$ определяются выражениями (3.45)-(3.48).

§ 4. Огибающие семейства решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений.

4.1. Огибающая фазовая поверхность. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$x' = P(s)x + f(s), \quad (4.1)$$

решение которого через матрицант записывается в виде формулы Коши:

$$x = R(P, s/s_0) \cdot x_0 + \varphi(s), \quad (4.2)$$

где

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s R(P, s/\tau) \cdot f(\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

Из (4.2) найдем x_0 .

$$x_0 = R^{-1}(P, s/s_0)(x - \varphi(s)) = R^{-1} \cdot (x - \varphi). \quad (4.4)$$

Пусть начальная огибающая поверхность $\Gamma(A_0) = \Gamma_0$ является центральной поверхностью

$$\tilde{x}_0 A_0 x_0 = 1. \quad (4.5)$$

Подставляя в (4.5) выражение (4.4), получим

$$\begin{aligned} (\tilde{x} - \tilde{\varphi}) \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} (x - \varphi) &= \tilde{x} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} x - \\ &- \tilde{\varphi} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} x - \tilde{x} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} \varphi + \\ &+ \tilde{\varphi} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} \varphi = 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя прежние обозначения

$$A(P(s)) = \tilde{R}^{-1}(P, s/s_0) A_0 R^{-1}(P, s/s_0) = \hat{R}^{-1} A_0 R^{-1} = A, \quad (4.7)$$

$$B(P(s)) = A^{-1}(P, s) = R(P, s/s_0) B_0 \tilde{R}(P, s/s_0) = R B_0 \tilde{R} = B, \quad (4.8)$$

и вводя новые

$$b(P(s)) = \tilde{b} = -A \cdot \varphi = -B^{-1} \varphi, \quad (4.9)$$

$$c(P(s)) = c = 1 - \tilde{\varphi} A \varphi = 1 - \tilde{b} B b, \quad (4.10)$$

представим выражение (4.6) в виде:

$$\tilde{x} A x + \tilde{b} x + \bar{x} b = c. \quad (4.11)$$

Замена переменных

$$x = \bar{x} - b = \bar{x} + \varphi \quad (4.12)$$

переводит уравнение (4.11) в уравнение

$$\tilde{x} A \bar{x} = 1, \quad (4.13)$$

которое является уравнением замкнутой гиперповерхности второго порядка. При этом \bar{x} является решением однородного уравнения

$$\bar{x}' = \rho(s) \bar{x}. \quad (4.14)$$

Таким образом, появление неоднородной добавки $f(s)$ в уравнении (4.1) приводит к тому, что начальная центральная огибающая фазовая поверхность (4.5) с изменением s становится нецентральной поверхностью (4.11).

4.2. Максимальный и минимальный огибающие векторы. Выражения для компонент экстремальных огибающих векторов (для максимальных и минимальных значений фазовых координат) в случае центральной начальной огибающей поверхности можно получить подстановкой выражений (4.9) и (4.10) в формулы (2.63)-(2.66). В результате подстановки получим (для $j, k = 1, 2, \dots, n$):

$$x_{j, \max} = \sqrt{b_{jj}} + \varphi_j = \bar{x}_{j, \max} + \varphi_j. \quad (4.15)$$

$$X_{j, \min} = -\sqrt{b_{jj}} + \varphi_j = \bar{X}_{j, \min} + \varphi_j, \quad (4.16)$$

$$X_k(\max(j)) = \frac{b_{kj}}{\sqrt{b_{jj}}} + \varphi_k = \bar{X}_k(\max(j)) + \varphi_k, \quad (4.17)$$

$$X_k(\min(j)) = -\frac{b_{kj}}{\sqrt{b_{jj}}} + \varphi_k = \bar{X}_k(\min(j)) + \varphi_k. \quad (4.18)$$

Таким образом, неоднородное слагаемое $f(s)$ в уравнении (4.1) приводит к смещению экстремальных значений однородного уравнения (4.14), причем это смещение равно смещению любого из решений уравнения (4.14) при переходе этого уравнения в неоднородное.

Заметим, что на величину фазового объема слагаемое $f(s)$ в уравнении (4.1) не влияет.

4.3. Начальная нецентральная огибающая поверхность. Полученные результаты легко обобщить на случай нецентральной начальной огибающей поверхности

$$\psi(x_0) = \tilde{x}_0 A_0 x_0 + \tilde{b}_0 x_0 + \tilde{x}_0 b_0 = c_0. \quad (4.19)$$

Подставляя в (4.19) выражение (4.4) для x_0

$$x_0 = R^{-1}(x - \varphi), \quad (4.20)$$

получим

$$\begin{aligned} \psi(x_0) = & (\tilde{x} - \tilde{\varphi}) \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} (x - \varphi) + \tilde{b}_0 R^{-1} (x - \varphi) + \\ & + (\tilde{x} - \tilde{\varphi}) \tilde{R}^{-1} b_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x_0) = & \tilde{x} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} x + [-\tilde{\varphi} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} + \tilde{b}_0 R^{-1}] x + \\ & + \tilde{x} [-\tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} \varphi + \tilde{R}^{-1} b_0] + \tilde{\varphi} \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} \varphi - \\ & - \tilde{b}_0 R^{-1} \varphi - \tilde{\varphi} \tilde{R}^{-1} b_0. \end{aligned}$$

(4.21)

Вводя обозначения

$$b = \tilde{R}^{-1} b_0 - \tilde{R}^{-1} A_0 R^{-1} \varphi = \tilde{R}^{-1} b_0 - A \varphi, \quad (4.22)$$

$$c = c_0 - \tilde{b} b + \tilde{b}_0 b_0, \quad (4.23)$$

получим

$$\tilde{x} A x + \tilde{b} x + \tilde{x} b = c. \quad (4.24)$$

Уравнение (4.24) определяет фазовую огибающую поверхность для уравнения (4.1).

Упражнение 4.1. Показать, что для случая нецентральной начальной фазовой огибающей поверхности имеют место следующие формулы

$$x_{j, \max} = \sqrt{(c_0 + \tilde{b}_0 b_0) b_{jj}} - \tilde{c}(j) R b_0 b_0 + \varphi_j, \quad (4.25)$$

$$x_{j, \min} = -\sqrt{(c_0 + \tilde{b}_0 b_0) b_{jj}} - \tilde{c}(j) R b_0 b_0 + \varphi_j. \quad (4.26)$$

4.4. Линеаризация нелинейных уравнений. После линеаризации нелинейных уравнений обычно получают уравнения вида

$$x' = P(s)x + f(s, x_0). \quad (4.27)$$

Соответствующие однородные уравнения запишем в следующих обозначениях:

$$\bar{x}' = P(s)\bar{x}. \quad (4.28)$$

Для уравнения (4.27) экстремальные значения фазовых координат на огибающей поверхности семейства решений можно записать в виде

$$X_{j, \max}(s) = \bar{X}_{j, \max}(s) + \varphi_{j, \max}(s), \quad (4.29)$$

$$X_{j, \min}(s) = \bar{X}_{j, \min}(s) + \varphi_{j, \min}(s), \quad (4.30)$$

где

$$\varphi_{j, \max}(s) = \max_{x_0 \in \Gamma(A_0, b_0, c_0)} \int_{s_0}^s R(s/\tau) f(\tau, x_0) d\tau, \quad (4.31)$$

$$\varphi_{j, \min}(s) = \min_{x_0 \in \Gamma(A_0, b_0, c_0)} \int_{s_0}^s R(s/\tau) f(\tau, x_0) d\tau. \quad (4.32)$$

Начальная фазовая огибающая поверхность, как и ранее, описывается уравнением

$$\tilde{x}_0 A_0 x_0 + \tilde{b}_0 x_0 + \tilde{x}_0 b_0 = c_0. \quad (4.33)$$

Для получения в таком случае огибающих кривых в виде функций от S необходимо для каждой точки из некоторого набора значений S отыскивать свой экстремум по векторному параметру x_0 , подчиняющемуся уравнению (4.33).

§ 5. Канонические системы линейных дифференциальных уравнений.

5.1. Определение канонического уравнения. Каноническим уравнением условимся называть уравнение

$$\bar{J} \frac{dz}{ds} = \bar{H}(s) z, \quad (5.1)$$

где $\bar{H}(s)$ - вещественная симметричная матрица - функция $(2n \times 2n)$:
 $\bar{H}(s) = \bar{H}(s)$, а \bar{J} - постоянная вещественная неособенная антисимметричная матрица: $\bar{J} = -\bar{J}$.

Любую антисимметричную вещественную неособенную матрицу \bar{J} можно представить в виде

$$\bar{J} = \tilde{S} J_{2n} S, \quad |S| \neq 0, \quad (5.2)$$

где S - вещественная матрица, а матрица J_{2n} имеет вид

$$J_{2n} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{array} \right\|. \quad (5.3)$$

Замена

$$x = S \cdot z \quad (5.4)$$

приводит уравнение (5.1) к виду

$$J_{2n} \cdot \frac{dx}{ds} = H(s) x, \quad (5.5)$$

где

$$H(s) = \tilde{S}^{-1} \bar{H}(s) S^{-1} \quad (5.6)$$

- вещественная симметричная матрица.

5.4. Симплектические матрицы. Вещественная матрица M , удовлетворяющая соотношению

$$\tilde{M} \bar{J} M = \bar{J},$$

называется симплектической (или \bar{J} - ортогональной). Матрицу J_{2n} назовем единичной симплектической матрицей. Для нее справедливы следующие выражения:

$$\tilde{J}_{2n} \equiv -J_{2n} \equiv J_{2n}^{-1}, \quad J_{2n}^2 = -I_{2n}. \quad (5.7)$$

Симплектическая матрица T , подчиняющаяся уравнению

$$\tilde{T} J_{2n} T = J_{2n} \quad (5.8)$$

удовлетворяет также уравнению

$$T J_{2n} \tilde{T} = J_{2n}. \quad (5.9)$$

Для доказательства (5.9) умножим (5.8) справа на $J_{2n} \tilde{T}$. Тогда получим

$$\tilde{T} J_{2n} T J_{2n} \tilde{T} = J_{2n}^2 \tilde{T} = -\tilde{T},$$

откуда следует

$$J_{2n} T J_{2n} \tilde{T} = -I_{2n}.$$

Учитывая (5.7), получаем

$$T J_{2n} \tilde{T} = -J_{2n}^{-1} = J_{2n},$$

что доказывает справедливость тождества (5.9).

5.3. Матрицант канонического уравнения. Обозначим

$$\bar{J}^{-1} \bar{H}(s) = P(s) \quad (5.10)$$

и запишем уравнение (5.1) в виде

$$z' = \frac{dz}{ds} = P(s) z. \quad (5.11)$$

Матрицант $R(P, s/s_0)$ уравнения (5.11) назовем матрицантом канонического уравнения (5.1). Он удовлетворяет матричному уравнению

$$\bar{J} R'(P, s/s_0) = \bar{H}(s) R(P, s/s_0). \quad (5.12)$$

Матрицант канонического уравнения (5.1) удовлетворяет тождеству

$$\tilde{R} \bar{J} R \equiv \bar{J}. \quad (5.13)$$

Для доказательства последнего утверждения продифференцируем обе части тождества (5.13).

$$\tilde{R}' \bar{J} R + \tilde{R} \bar{J} R' \equiv 0. \quad (5.14)$$

Подставим в (5.14) значение производных матрицанта, учитывая, что

$$\tilde{R}' \bar{J} = -\tilde{R}' \bar{J} = \tilde{R} \bar{H}(s). \quad (5.15)$$

Тогда получим

$$-\tilde{R} \bar{H}(s) \bar{J}^{-1} \bar{J} R + \tilde{R} \bar{H}(s) R \equiv 0 \quad (5.16)$$

Поскольку при $s = s_0$ тождество (5.13) справедливо, то вследствие (5.16) оно справедливо при любом значении s .

Пример 5.1. Покажем, что система уравнений

$$\begin{cases} x'' - K_{11}(s)x - K_{12}(s)y = 0, \\ y'' - K_{12}(s)x - K_{22}(s)y = 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

является канонической. Для этого введем фазовый вектор

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

и запишем систему (5.17) в нормальной форме

$$z' = P(s)z, \quad (5.19)$$

где матричная функция $P(s)$ имеет вид

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ K(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad K(s) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Умножим уравнение (5.9) слева на симплектическую матрицу J_4 .

$$J_4 z' = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ K(s) & 0 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -K(s) & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} z. \quad (5.11)$$

Матрица

$$- I7I -$$

$$\left\| \begin{array}{cc} -K(s) & 0 \\ 0 & I_2 \end{array} \right\| = H(s). \quad (5.12)$$

является симметричной и поэтому ее можно обозначить через $H(s)$. Таким образом, систему уравнений (5.17) мы привели к виду, аналогичному (5.5), что говорит о том, что эта система является канонической.

Запишем матрицант системы (5.17) для постоянной матрицы $K(s) = \text{const}$, используя сокращенное обозначение матрицанта

$$R(p, s/s_0) = R. \quad (5.13)$$

Предварительно введем следующие обозначения:

$$c = \sqrt{(K_{11} - K_{22})^2 + 4K_{12}^2}, \quad \alpha = \frac{K_{11} - K_{22}}{c}, \quad \Delta = \frac{2K_{12}}{c}, \quad (5.14)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{K_{11} + K_{22} + c}{2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{K_{11} + K_{22} - c}{2}}, \quad (5.15)$$

$$\beta_1 (s - s_0) = \omega_1, \quad \beta_2 (s - s_0) = \omega_2. \quad (5.16)$$

Тогда элементы матрицанта R можно записать в виде

$$R_{11} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) \text{ch } \omega_1 + (1-\alpha) \text{ch } \omega_2], \quad R_{12} = \frac{\Delta}{2} (\text{ch } \omega_1 - \text{ch } \omega_2),$$

$$R_{13} = \frac{1}{2} \left[(1+\alpha) \frac{1}{\beta_1} \text{sh } \omega_1 + (1-\alpha) \frac{1}{\beta_2} \text{sh } \omega_2 \right], \quad R_{14} = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} \text{sh } \omega_1 - \frac{1}{\beta_2} \text{sh } \omega_2 \right),$$

$$R_{21} = \frac{\Delta}{2} (\operatorname{ch} \omega_1 - \operatorname{ch} \omega_2), \quad R_{22} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) \operatorname{ch} \omega_2 + (1-\alpha) \operatorname{ch} \omega_1],$$

$$R_{23} = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} \operatorname{sh} \omega_1 - \frac{1}{\beta_2} \operatorname{sh} \omega_2 \right), \quad R_{24} = \frac{1}{2} \left[(1+\alpha) \frac{1}{\beta_2} \operatorname{sh} \omega_2 + (1-\alpha) \frac{1}{\beta_1} \operatorname{sh} \omega_1 \right], \quad (5.17)$$

$$R_{31} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) \beta_1 \operatorname{sh} \omega_1 + (1-\alpha) \beta_2 \operatorname{sh} \omega_2], \quad R_{32} = \frac{\Delta}{2} (\beta_1 \operatorname{sh} \omega_1 - \beta_2 \operatorname{sh} \omega_2),$$

$$R_{33} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) \operatorname{ch} \omega_1 + (1-\alpha) \operatorname{ch} \omega_2], \quad R_{34} = \frac{\Delta}{2} (\operatorname{ch} \omega_1 - \operatorname{ch} \omega_2),$$

$$R_{41} = \frac{\Delta}{2} (\beta_1 \operatorname{sh} \omega_1 - \beta_2 \operatorname{sh} \omega_2), \quad R_{42} = \frac{1}{2} [\beta_2 (1+\alpha) \operatorname{sh} \omega_2 + \beta_1 (1-\alpha) \operatorname{sh} \omega_1],$$

$$R_{43} = \frac{\Delta}{2} (\operatorname{ch} \omega_1 - \operatorname{ch} \omega_2), \quad R_{44} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) \operatorname{ch} \omega_2 + (1-\alpha) \operatorname{ch} \omega_1].$$

Поскольку матрицант R является матрицантом канонического уравнения, то он удовлетворяет тождеству

$$\tilde{R} J_4 R = J_4, \quad (5.18)$$

что порождает 16 скалярных тождеств для элементов матрицанта (5.17). Поскольку матрица J_4 является единичной симплектической матрицей, то матрицант R удовлетворяет также тождеству

$$R J_4 \tilde{R} = J_4. \quad (5.19)$$

5.4. Матрице коэффициентов канонического уравнения. Рассмотрим каноническое уравнение

$$x' = P(s) x, \quad (5.20)$$

матрица коэффициентов $P(s)$ которого равна

$$P(s) = J_{2n}^{-1} H(s) = -J_{2n} H(s). \quad (5.21)$$

Запишем транспонированный вариант выражения (5.21).

$$\tilde{P}(s) = -H(s)\tilde{J}_{2n} = H(s)J_{2n}. \quad (5.22)$$

Из (5.21) и (5.22) следует, что матрица $P(s)$ удовлетворяет следующему соотношению

$$PJ_{2n} + J_{2n}\tilde{P} = 0. \quad (5.23)$$

4.5: Инвариант канонического уравнения. Возьмем квадратичную форму

$$\psi(x(s)) = \tilde{x}(s) \cdot A(s) \cdot x(s), \quad (5.24)$$

где $x(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x' = P(s)x, \quad (5.25)$$

и запишем ее производную по S .

$$\begin{aligned} \psi' &= \tilde{x}'Ax + \tilde{x}A'x + \tilde{x}Ax' = \tilde{x}(\tilde{P}A + A' + AP)x = \\ &= \tilde{x}A(\sigma\tilde{P} - \sigma' + P\sigma)Ax. \end{aligned} \quad (5.26)$$

В последнем выражении мы использовали тот факт, что поскольку

$$A\sigma = I_{2n} \quad (5.27)$$

то выполняются следующие равенства

$$A'\sigma + A\sigma' = 0, \quad (5.28)$$

$$A' = -A\sigma'A. \quad (5.29)$$

Выберем $\bar{b}(s)$ в следующем виде

$$\bar{b}(s) = \bar{T}(s) J_{2n} - J_{2n} \tilde{T}(s), \quad (5.30)$$

где

$$\bar{T}(s) = R(p, s/s_0) K R^{-1}(p, s/s_0) = R K R^{-1}, \quad (5.31)$$

$$P(s) J_{2n} + J_{2n} \tilde{P}(s) \equiv 0, \quad (5.32)$$

K - постоянная вещественная неособенная матрица ($|K| \neq 0$).

Продифференцируем тождество

$$R R^{-1} \equiv I_{2n}, \quad (5.33)$$

и найдем $(R^{-1})'$.

$$(R^{-1})' = -R^{-1} R' R^{-1} = -R^{-1} \cdot P(s). \quad (5.34)$$

Запишем производную по s от матричной функции $\bar{T}(s)$, используя (5.34).

$$\bar{T}' = R' K R^{-1} + R K (R^{-1})' = P(s) R K R^{-1} - R K R^{-1} P(s) = P(s) \bar{T} - \bar{T} P(s). \quad (5.35)$$

Найдем теперь выражение для производной $\bar{b}'(s)$, где $\bar{b}(s)$ определяется выражением (5.30) с учетом (5.31) и (5.32).

$$\bar{b}' = \bar{T}' J_{2n} - J_{2n} \tilde{T}' = [P(s) \bar{T} - \bar{T} P(s)] J_{2n} - J_{2n} [\tilde{T} \tilde{P}(s) - \tilde{P}(s) \tilde{T}]. \quad (5.36)$$

подставим в (5.36) выражение (5.32).

$$\begin{aligned} \bar{b}' &= P \bar{T} J_{2n} + \bar{T} J_{2n} \tilde{P} - J_{2n} \tilde{T} \tilde{P} - P J_{2n} \tilde{T} = \\ &= P (\bar{T} J_{2n} - J_{2n} \tilde{T}) + (\bar{T} J_{2n} - J_{2n} \tilde{T}) \tilde{P} = P \bar{b} + \bar{b} \tilde{P}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.26), получим

$$\psi'(s) \equiv 0. \quad (5.38)$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.1. Для канонического дифференциального уравнения

$$J_{2n} \frac{dx}{ds} = H(s)x, \quad (5.39)$$

матрицантом которого является матричная функция $R(P, s/s_0)$,

где

$$P(s) = -J_{2n} H(s), \quad (5.40)$$

квадратичная форма

$$\psi(x) = \tilde{x} A x, \quad (5.41)$$

где

$$B = A^{-1} = R(P, s/s_0) K R^{-1}(P, s/s_0) J_{2n} - J_{2n} \tilde{R}^{-1}(P, s/s_0) \tilde{K} \tilde{R}(P, s/s_0) \quad (5.42)$$

определенная на решениях уравнения (5.39), является инвариантом, то есть

$$\psi(x) = \text{const} \quad (5.43)$$

для любых $x(s)$, удовлетворяющих уравнению (5.39).

Следствие 1. Матрицу K можно связать с матрицей B_0 , используя выражение

$$B = R(P, s/s_0) B_0 \tilde{R}(P, s/s_0). \quad (5.44)$$

Тогда матрица B_0 запишется в виде:

$$\mathcal{B}_0 = R^{-1} \mathcal{B} \tilde{R}^{-1} = KR^{-1} J_{2n} \tilde{R}^{-1} - \tilde{R}^{-1} J_{2n} R^{-1} \tilde{K}. \quad (5.45)$$

Подставляя тождество

$$R J_{2n} \tilde{R} = J_{2n}, \quad (5.46)$$

получим

$$\mathcal{B}_0 = K J_{2n} - J_{2n} \tilde{K}. \quad (5.47)$$

Уравнение (5.47) дает возможность по матрице K найти матрицу \mathcal{B}_0 .

5.6. Об особенностях функции $P(s)$ для канонического уравнения. Рассмотрим функцию $H(s)$, где

$$H(s) = -J_{2n} \cdot P(s) = \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{11} & -P_{12} \end{vmatrix}. \quad (5.48)$$

Поскольку функция $H(s)$ для канонического уравнения является симметричной, то имеем

$$H = \tilde{H} = \begin{vmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{11} & -P_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{P}_{21} & -\tilde{P}_{11} \\ \tilde{P}_{22} & -\tilde{P}_{12} \end{vmatrix}. \quad (5.49)$$

Отсюда следует, что в каноническом уравнении квадратные

$(n \times n)$ матрицы-блоки матричной функции $P(s)$ имеют следующую симметрию

$$P_{21} = \tilde{P}_{21}, \quad P_{12} = \tilde{P}_{12}, \quad (5.50)$$

$$P_{22} = -\tilde{P}_{11}. \quad (5.51)$$

Из (5.51) следует равенство нулю следа матрицы

$$\langle P(s) \rangle \equiv 0. \quad (5.52)$$

§ 6. Огибающие в периодических системах.

6.1. Канонические уравнения с периодическими коэффициентами. Рассмотрим каноническое дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами

$$x' = P(s)x, \quad P(s) = P(s+L), \quad (6.1)$$

$$P_{12}(s) = \tilde{P}_{12}(s), \quad P_{21}(s) = \tilde{P}_{21}(s), \quad (6.2)$$

$$P_{11}(s) = -\tilde{P}_{22}(s). \quad (6.3)$$

Введем следующие обозначения

$$M(L) \equiv M \equiv R(P, L/0). \quad (6.4)$$

$$T(s) \equiv R(P, s+L/s). \quad (6.5)$$

Матрицу $T(s)$ можно представить в виде функции от матриц $M(L)$ и $R(P, s/0)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} T(s) &= R(P, s+L/L) R(L/s) = R(P, s/0) R(L/0) R(P, 0/s) = \\ &= R(s/0) M(L) R^{-1}(0/s) = RMR^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для уравнения (6.1) инвариантная квадратичная форма запишется в виде

$$\tilde{x} \bar{A}(s) x = \alpha, \quad (6.7)$$

где

$$\bar{B}(s) = \bar{A}^{-1}(s) = RKR^{-1}J_{2n} - J_{2n} \tilde{R}^{-1} \tilde{K} \tilde{R}, \quad (6.8)$$

α - постоянная скалярная величина, K - постоянная неособая

матрица. Возьмем в качестве матрицы K матрицу $M(L)$.

$$K = M(L) = M. \quad (6.9)$$

Тогда, подставляя в (6.8) выражение (6.6), получим

$$\bar{b}(s) = T(s) J_{2n} - J_{2n} \tilde{T}(s). \quad (6.10)$$

Но функция $T(s)$ для уравнения (6.1) является периодической с периодом L .

$$T(s+L) = R(p, s+2L/s+L) = R(p, s+L/s) = T(s). \quad (6.11)$$

Поэтому фазовая огибающая поверхность, характеризуемая матрицей \bar{b} , будет в этом случае периодической функцией с периодом L .

6.2. Устойчивость периодических решений. Если матрица \bar{b}_0 положительно определена, то это необходимо и достаточно для того, чтобы траектории были ограничены. Таким образом, условием устойчивости решений будет положительность определителя матрицы \bar{b}_0 .

$$|\bar{b}_0| = |M(L) J_{2n} - J_{2n} \tilde{M}(L)| > 0. \quad (6.12)$$

6.3. Нормировка огибающей. Постоянную α будем называть нормировочной постоянной. Ее можно определить в зависимости от того, что известно об огибающей. Если известен объем фазового множества, заключенного внутри инвариантной поверхности, то нормировочную постоянную α можно определить из уравнения:

$$V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \sqrt{\alpha^{2n} |M(L) J_{2n} - J_{2n} \tilde{M}(L)|} = \frac{\pi^n}{n!} \sqrt{\alpha^{2n} |\bar{b}_0|}. \quad (6.13)$$

Тогда получим

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n! V_{2n}}{|M(L)J_{2n} - J_{2n}\tilde{M}(L)|}} \quad (6.14)$$

6.4. Огибающие кривые. Запишем выражение для максимальных значений фазовых координат x_j ($j=1, 2, \dots, n$) по множеству $M(A)$, где последнее определяется неравенством

$$0 < \tilde{x} A(s)x = \tilde{x} \frac{1}{\alpha} \bar{A}(s)x \leq 1 \quad (6.15)$$

в следующем виде:

$$x_{j, \max}(s) = \max_{x_j \in M(A)} x_j = \sqrt{\alpha \bar{b}_{jj}(s)}. \quad (6.16)$$

Если известно, что значение $|x_{j, \max}(s)|$ не должно превышать некоторого значения a ,

$$x_{j, \max}^2(s) \leq a^2, \quad (6.17)$$

то, находя максимальное значение $\bar{b}_{jj}(s)$ по S по множеству значений $[0, L]$,

$$\bar{b}_{jj, \max} = \max_{s \in [0, L]} \bar{b}_{jj}(s), \quad (6.18)$$

можно еще одним способом получить нормировочную постоянную из уравнения

$$a^2 = \alpha \bar{b}_{jj, \max} \quad (6.19)$$

$$\alpha = \frac{a^2}{\bar{b}_{jj, \max}} \quad (6.20)$$

Если известно значение $x_{j, \max}^2(s)$ в некоторой точке \bar{s} , то получим

$$\alpha = \frac{x_{j, \max}^2(\bar{s})}{\bar{b}_{jj}(\bar{s})}. \quad (6.21)$$

§ 7. Периодическая фокусировка

7.1. Линейные уравнения второго порядка. В теории периодической фокусировки часто встречается уравнение второго порядка

$$x'' + \kappa(s)x = 0 \quad (7.1)$$

с периодической функцией

$$\kappa(s) = \kappa(s+L). \quad (7.2)$$

Вводя фазовый вектор

$$z = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

запишем уравнение (7.1) в нормальной форме

$$z' = \rho(s)z, \quad (7.4)$$

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} = \rho(s+L). \quad (7.5)$$

Умножим слева матрицу $\rho(s)$ на $-J_2$. Получим

$$H(s) = -J_2 \rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa(s) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Функция $H(s)$ является симметричной матрицей, поэтому уравне-

ние (7.11) является каноническим.

Попрежнему обозначая матрицу периода через $M(L)$,

$$M(L) = R(P, L/0) = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (7.7)$$

получим условия устойчивости в виде:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2M_{12}, M_{22} - M_{11} \\ M_{22} - M_{11}, -2M_{21} \end{vmatrix} > 0. \quad (7.8)$$

Раскрывая определитель, находим

$$\begin{aligned} -4M_{12}M_{21} - (M_{22} - M_{11})^2 &= -4M_{12}M_{21} - M_{22}^2 + 2M_{22}M_{11} - M_{11}^2 = \\ &= 4(M_{22}M_{11} - M_{12}M_{21}) - 2M_{11}M_{22} - M_{22}^2 - M_{11}^2 = 4 - (M_{11} + M_{22})^2 > 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Таким образом, получаем известное условие устойчивости

$$-2 < M_{11} + M_{22} < 2. \quad (7.10)$$

Нормируя огибающую через фазовый объем, найдем нормировочную постоянную

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{V_2}{\sqrt{4 - (M_{11} + M_{22})^2}}. \quad (7.11)$$

Тогда выражения для фазовых огибающих кривых запишутся следу-

ищем образом:

$$\bar{z}_{1, \max}^2(s) = x_{\max}^2(s) = \alpha \bar{b}_{11}(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V_2}{\sqrt{4 - (M_{11} + M_{22})^2}} \cdot T_{12}(s), \quad (7.12)$$

$$\bar{z}_{2, \max}^2(s) = x_{\max}^{\prime 2}(s) = \alpha \bar{b}_{22}(s) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{V_2}{\sqrt{4 - (M_{11} + M_{22})^2}} T_{21}(s). \quad (7.13)$$

здесь $T(s)$ - периодическая матрица,

$$T(s) = R(P, s+L/s) = RMR^{-1}, \quad (7.14)$$

которая определяет матрицу \bar{b} ,

$$\bar{b} = T(s)J_2 - J_2\bar{T}(s). \quad (7.15)$$

7.2. Линейные уравнения четвертого порядка. Рассмотрим систему двух линейных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x'' - K_{11}(s)x - K_{12}(s)y = 0, \\ y'' - K_{12}(s)x - K_{22}(s)y = 0, \end{cases} \quad (7.16)$$

где $K_{11}(s)$, $K_{12}(s)$ и $K_{22}(s)$ - периодические функции с периодом L ,

$$K_{11}(s) = K_{11}(s+L), \quad K_{12}(s) = K_{12}(s+L), \quad K_{22}(s) = K_{22}(s+L). \quad (7.17)$$

Вводя, как обычно, фазовый вектор Z ,

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

запишем систему (7.16) в нормальной форме

$$\dot{z} = P(s)z, \quad P(s) = \begin{vmatrix} 0 & I \\ K & 0 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{12}(s) & K_{22}(s) \end{vmatrix}. \quad (7.19)$$

Как следует из (5.11), уравнение (7.19) является каноническим.

Матрица \bar{B} для этого случая запишется в виде

$$\bar{B}(s) = \begin{vmatrix} 2T_{13} & T_{14} + T_{23} & T_{33} - T_{11} & T_{43} - T_{12} \\ T_{14} + T_{23} & 2T_{24} & T_{34} - T_{21} & T_{44} - T_{22} \\ T_{33} - T_{11} & T_{34} - T_{21} & -2T_{31} & -T_{32} - T_{41} \\ T_{43} - T_{12} & T_{44} - T_{22} & -T_{32} - T_{41} & -2T_{42} \end{vmatrix}, \quad (7.20)$$

где $T(s)$ - периодическая матрица,

$$T(s) = R(P, s+4/s) = RMR^{-1} \quad (7.21)$$

Вводя матрицу $M(4)$, условие устойчивости запишем следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 2M_{13} & M_{14} + M_{23} & M_{33} - M_{11} & M_{43} - M_{12} \\ M_{14} + M_{23} & 2M_{24} & M_{34} - M_{21} & M_{44} - M_{22} \\ M_{33} - M_{11} & M_{34} - M_{21} & -2M_{31} & -M_{32} - M_{41} \\ M_{43} - M_{12} & M_{44} - M_{22} & -M_{32} - M_{41} & -2M_{42} \end{vmatrix} > 0. \quad (7.22)$$

Нормируя огibaющую на значение $X_{\max}(0)$, получим

$$\alpha = \frac{X_{\max}^2(0)}{2M_{13}}.$$

Следовательно, огibaющие кривые будут иметь вид:

$$Z_{1,\max}^2(s) = X_{\max}^2(s) = \frac{X_{\max}^2(0)}{M_{13}} T_{13}(s), \quad (7.24)$$

$$Z_{2,\max}^2(s) = y_{\max}^2(s) = \frac{X_{\max}^2(0)}{M_{13}} T_{24}(s), \quad (7.25)$$

$$Z_{3,\max}^2(s) = X_{\max}^{\prime 2}(s) = - \frac{X_{\max}^2(0)}{M_{13}} T_{31}(s), \quad (7.26)$$

$$Z_{4,\max}^2(s) = y_{\max}^{\prime 2}(s) = - \frac{X_{\max}^2(0)}{M_{13}} T_{42}(s). \quad (7.27)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Запишем алгоритм программы численного интегрирования дифференциального уравнения

$$R'(s/s_0) = P(s) R(s/s_0), \quad (1)$$

$$R(s_0/s_0) = R(0), \quad (2)$$

на основе рекурсивного метода челнок-сумм.

Здесь $P(s)$ - квадратная $(\beta \times \beta)$ матрица-функция, для которой существует интеграл $\int_{s_0}^s P(s) ds$. $R(s/s_0)$ - прямоугольная $(\beta \times \gamma)$ матрица-функция, содержащая β строк и γ столбцов. При $\gamma = 1$ матрица $R(s/s_0)$ превращается в вектор.

Если $R(0) = \bar{I}_\beta$, где \bar{I}_β - единичная $(\beta \times \beta)$ матрица, то решение уравнения (1) является матрицантом для уравнения

$$x'(s) = P(s) x(s), \quad x(s_0) = x(0), \quad (3)$$

где $x(s)$ - вектор порядка β ; следовательно, решение уравнения (3) можно записать в виде:

$$x(s) = R(s/s_0) x(0), \quad R(s_0/s_0) = \bar{I}_\beta. \quad (4)$$

Если $\gamma = 1$ и $R(0) = x(0)$, то решение уравнения (1) есть решение уравнения (3), то-есть $R(s/s_0) = x(s)$.

Разобьем интервал $\bar{I} = (s_0, s)$ на n частичных интервалов $\bar{I}_j = (s_{j-1}, s_j)$, где $j = 1, 2, \dots, n$, и обозначим $s = s_n$, $s_j - s_{j-1} = h_j$, где h_j - шаг интегрирования, который может быть как постоянным, так и переменным.

Заменим функцию $P(s)$ ступенчатой /кусочно-постоянной/ функцией $P(j)$, где j - номер интервала \bar{I}_j . Выберем $P(j)$ в виде значения функции $P(s)$ в середине интервала \bar{I}_j :

$$P(j) = P\left(s_{j-1} + \frac{1}{2} h_j\right), \quad \bar{P}(j) = \bar{I}_\beta + P(j) \cdot h_j.$$

Зададим целое число α , которое определяет один из вариантов алгоритма интегрирования. Используем единичный вектор-строку $\tilde{i}(\alpha)$, где

$$\tilde{i}(\alpha) = \left\| \overbrace{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}^{\beta}, \right\|, \quad \alpha \leq \beta,$$

$$\tilde{i}(\alpha + \beta) = \tilde{i}(\alpha).$$

Компоненты $i_k(\alpha)$ вектора $\tilde{i}(\alpha)$ равны

$$i_k(\alpha) = \delta(k, \alpha),$$

где $\delta(k, \alpha)$ - символ Кронекера.

Новую матрицу $V(i, \tilde{c})$, получающуюся путем замены i -ой строки в квадратной $(\beta \times \beta)$ матрице V на вектор-строку \tilde{c} порядка β обозначим через

$$V(i, \tilde{c}) = \tilde{c} + \tilde{F}(i)V$$

и будем считать, что

$$\tilde{F}(i + \beta) = \tilde{F}(i).$$

Каждую из матриц $P(j)$ и $\bar{P}(j)$ запишем в виде вектора-столбца, компонентами которого служат строчки этих матриц.

$$P(j) = \left\| \begin{array}{c} P_{1>}(j) \\ P_{2>}(j) \\ \dots \\ P_{\beta>}(j) \end{array} \right\|, \quad \bar{P}(j) = \left\| \begin{array}{c} \bar{P}_{1>}(j) \\ \bar{P}_{2>}(j) \\ \dots \\ \bar{P}_{\beta>}(j) \end{array} \right\|.$$

Например,

$$P_{k>}(j) = \left\| P_{k1}(j), P_{k2}(j), \dots, P_{k\beta}(j) \right\|, \quad k = 1, 2, \dots, \beta.$$

Для заданных величин: $\beta, \alpha, \delta, n, h_j, P(j), R(0)$ запишем алгоритм j -го цикла /шага/ интегрирования / $j = 1, 2, \dots, n$ /

$$j. 1.1. \quad \tilde{a}_1(j) = \frac{1}{2} P_{\alpha>}(j) \cdot h_j + \tilde{a}_{\beta+1}(j-1)$$

$$j. 1.2. \quad S(j,1) = \tilde{a}_1(j) \cdot T(j-1) + \tilde{F}(\alpha) \cdot T(j-1)$$

.....

$$j. k. 1. \quad \tilde{a}_k(j) = \bar{p}_{\alpha+k-1>}(j)$$

$$j. k. 2. \quad S(j,k) = \tilde{a}_k(j) \cdot S(j,k-1) + \tilde{F}(\alpha+k-1) \cdot S(j,k-1)$$

.....

$$j. \beta. 1. \quad \tilde{a}_\beta(j) = \bar{p}_{\alpha+\beta-1>}(j)$$

$$j. \beta. 2. \quad S(j,\beta) = \tilde{a}_\beta(j) \cdot S(j,\beta-1) + \tilde{F}(\alpha+\beta-1) \cdot S(j,\beta-1)$$

$$j. \beta. 3. \quad S(j,\beta) = T(j)$$

$$j. \beta+1. 1. \quad \tilde{a}_{\beta+1}(j) = \frac{1}{2} P_{\alpha>}(j) h_j + \tilde{l}(\alpha)$$

$$j. \beta+1. 2. \quad S(j,\beta+1) = \tilde{a}_{\beta+1}(j) \cdot S(j,\beta) + \tilde{F}(\alpha) \cdot S(j,\beta)$$

$$j. \beta+1. 3. \quad S(j,\beta+1) = R(j)$$

Здесь $\tilde{a}_k(j)$ - вектор-строка из β компонент, $R(j)$, $S(j,k)$ и $T(j)$ - прямоугольные $(\beta \times \gamma)$ матрицы, $k = 1, 2, \dots, \beta + 1$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Для того, чтобы алгоритм заработал, необходимо задать начальные $\tilde{a}_{\beta+1}(0)$ и $T(0)$. Они задаются следующим образом:

$$\tilde{a}_{\beta+1}(0) = \tilde{l}(\alpha), \quad T(0) = R(0).$$

В результате j -го цикла получаем исходные значения $\tilde{a}_{\beta+1}(j)$ и $T(j)$ для $j+1$ -го цикла и значение матрицы $R(s/s_0)$ в точке $S = S_j$.

$$R(s_j/s_0) = R(j).$$

Если в j -ом цикле мы не собираемся выводить на печать значение матрицы $R(j)$, то последние две операции в этом цикле производить не нужно.



Л и т е р а т у р а

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., "Наука", 1967.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., "Наука", 1972.
3. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. Изд-во МГУ, 1974.
4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., "Мир", 1971.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Наука", 1971.
6. *Tobbe D.E. The beam envelope of an initially uncorrelated ellipsoidal beam. Nucl. Instr. and Meth., 82, 331-333, 1970.*
7. Дымников А.Д. Применение скобок Гаусса для расчета многоэлементных электроннооптических систем. ИТФ, 38, 1120, 1968.
8. Дымников А.Д. Метод скобок Гаусса в теории ускорителей. Труды II Сопещания по ускорителям, II, 35, М., "Атомиздат", 1973.
9. Дымников А.Д. Расчет электроннооптических систем с помощью рекурсивных челнок-сумм и челнок-интегралов. Тезисы докладов III Украинской конференции по электронной оптике. Харьков, 1974.
10. Васильев В.Ю., Дымников А.Д. Метод рекурсивных сумм и интегралов для решения многогрупповых уравнений диффузии. Атомная энергия, 37, вып.4, 1974.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
Глава 1. МАТРИЦЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ОПЕРАЦИИ.....	3
§ 1. Линейные и матричные кортежи.....	3
§ 2. Линейные рекурсивные операции.....	10
§ 3. Векторы и матрицы	14
§ 4. Рекурсивные операции в матричной алгебре...	24
Глава 2. МАТРИЧНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ...	39
§ 1. Нормальные системы дифференциальных урав- нений	39
§ 2. Матрицант	41
§ 3. Рекурсивные методы вычисления матрицанта...	48
§ 4. Уравнения второго порядка	58
§ 5. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения.....	63
Глава 3. ВЕКТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ И ПОДВИЖНЫЕ РЕПЕРЫ.....	67
§ 1. Подвижные реперы.....	67
§ 2. Подвижные системы координат	72
§ 3. Векторные дифференциальные операции	75
Глава 4. ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ.....	84
§ 1. Безразмерные величины	84
§ 2. Уравнения Максвелла	87
§ 3. Уравнения движения заряженных частиц.....	93
§ 4. О выборе подвижной системы координат	104
§ 5. Движение заряженных частиц в постоянном электромагнитном поле	107

§ 6. Линеаризация уравнений движения для частиц параксиального (приосевого) пучка.....	115
§ 7. Линеаризация уравнений Максвелла в вакууме в криволинейной системе координат.....	135
Глава 5. ТЕОРИЯ ОГИБАЮЩИХ И ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФОКУСИРОВКА.....	139
§ 1. Квадратичные формы	139
§ 2. Замкнутые гиперповерхности второго порядка	141
§ 3. Огибающие семейства решений обыкновенных дифференциальных уравнений	152
§ 4. Огибающие семейства решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений	161
§ 5. Канонические системы линейных дифференциальных уравнений	167
§ 6. Огибающие в периодических системах.....	177
§ 7. Периодическая фокусировка	180
Приложение	185
Литература	189