

ИВАНЧЕНКО И.М. и ЧВЫРОВ А.С.

Б1-10-9569,

С344.1ш+С344.1ц

И-231



1319/76

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-10-9569

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

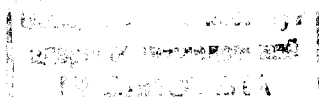
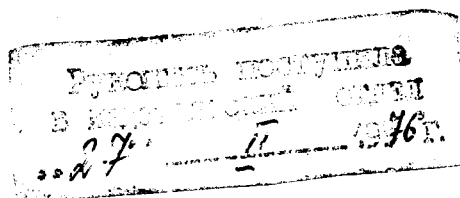
Дубна 1976

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б1-10-9569

И.М.Иванченко, А.С.Чвыров

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХЧАСТИЧНЫХ СОБЫТИЙ



Дубна, 1975 г.

В экспериментальной физике высоких энергий важную роль играют эксперименты, в которых регистрируются 2 частицы (одна в начальном состоянии, одна в конечном - рассеяние; две в конечном - распад).

Основными геометрическими параметрами события в подобных экспериментах (их схемы показаны на рис. I) являются направления регистрируемых частиц, угол θ между ними и координаты X_0 , Y_0 , Z_0 точки взаимодействия. Первичной экспериментальной информацией, регистрируемой в таких экспериментах, являются X, Y -координаты точек пересечения частицами фиксированных плоскостей $Z = Z_i$ ($i = \overline{1, N}$). Эти координаты измеряются с некоторой ошибкой, что делает невозможным точное определение геометрических параметров событий. Возможно лишь нахождение оценок, которые в той или иной степени приближаются к истинным значениям и свойства которых могут существенно зависеть от используемых алгоритмов и области изменения искомых величин.

Ниже рассматриваются алгоритмы получения оценок геометрических параметров событий, приводятся сравнительные характеристики алгоритмов.

Алгоритм I. Возьмем в качестве модели события две пересекающиеся прямые a и b . Такая модель описывается аналитически системой четырех уравнений:

$$x^a = A_x^a (z - z_0) + x_0$$

$$y^a = A_y^a (z - z_0) + y_0$$

$$x^b = A_x^b (z - z_0) + x_0$$

$$y^b = A_y^b (z - z_0) + y_0$$

Геометрические параметры $A_x^a, A_y^a, A_x^b, A_y^b, x_0, y_0, z_0$ события находятся из условия минимума функции:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i^a} (x_i^a - A_x^a (z_{x_i^a}^a - z_0) - x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n_y^a} w_{y_i^a} (y_i^a - A_y^a (z_{y_i^a}^a - z_0) - y_0)^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i^b} (x_i^b - A_x^b (z_{x_i^b}^b - z_0) - x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n_y^b} w_{y_i^b} (y_i^b - A_y^b (z_{y_i^b}^b - z_0) - y_0)^2, \end{aligned}$$

$$w_{x_i^a} = 1/\sigma_{x_i^a}^2, \quad w_{y_i^a} = 1/\sigma_{y_i^a}^2, \quad w_{x_i^b} = 1/\sigma_{x_i^b}^2, \quad w_{y_i^b} = 1/\sigma_{y_i^b}^2$$

x_i^j - измеренное при $z = z_{x_i^j}^j$ значение x -координаты частицы j ;

y_i^j - измеренное при $z = z_{y_i^j}^j$ значение y -координаты частицы j ($j = a, b$);

n_x^j, n_y^j - количество значений x и y -координат частицы j , зарегистрированных установкой.

Необходимое условие минимума по искомым параметрам

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial A_x^i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial A_y^i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_0} = 0, \quad i = a, b \right)$$

приводит к нелинейной системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i^a} [x_i^a - A_x^a (z_{x_i^a}^a - z_0) - x_0] (z_{x_i^a}^a - z_0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_y^a} w_{y_i^a} [y_i^a - A_y^a (z_{y_i^a}^a - z_0) - y_0] (z_{y_i^a}^a - z_0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b [x_i^b - A_x^b (z_{x_i}^b - z_0) - x_0] (z_{x_i}^b - z_0) = 0 \\ & \sum_{i=1}^{n_y^b} w_{y_i}^b [y_i^b - A_y^b (z_{y_i}^b - z_0) - y_0] (z_{y_i}^b - z_0) = 0 \\ & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a [x_i^a - A_x^a (z_{x_i}^a - z_0) - x_0] + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b [x_i^b - A_x^b (z_{x_i}^b - z_0) - x_0] = 0 \\ & \sum_{i=1}^{n_y^a} w_{y_i}^a [y_i^a - A_y^a (z_{y_i}^a - z_0) - y_0] + \sum_{i=1}^{n_y^b} w_{y_i}^b [y_i^b - A_y^b (z_{y_i}^b - z_0) - y_0] = 0 \\ & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a [x_i^a - A_x^a (z_{x_i}^a - z_0) - x_0] A_x^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b [x_i^b - A_x^b (z_{x_i}^b - z_0) - x_0] A_x^b + \\ & + \sum_{i=1}^{n_y^a} w_{y_i}^a [y_i^a - A_y^a (z_{y_i}^a - z_0) - y_0] A_y^a + \sum_{i=1}^{n_y^b} w_{y_i}^b [y_i^b - A_y^b (z_{y_i}^b - z_0) - y_0] A_y^b = 0, \end{aligned}$$

решения которой являются оценками геометрических характеристик. Угол θ между прямыми а, в находим по обычной формуле

$$\cos \theta = \frac{A_x^a A_x^b + A_y^a A_y^b + 1}{\sqrt{(A_x^{a2} + A_y^{a2} + 1)(A_x^{b2} + A_y^{b2} + 1)}}$$

Для нахождения свойств получаемых таким способом оценок, нами был обработан смоделированный по методу Монте-Карло материал и вычислены значения смещений ($\Delta \theta$, Δx , Δy , Δz) и стандартных отклонений (σ_θ , σ_x , σ_y , σ_z) оценок для конфигурации бесфильмового искрового спектрометра (БИС)^{/1/} (рис. 1б, $N=9$, $z_1=-5628$, $z_2=-5480$, $z_3=5332$, $z_4=-4256$, $z_5=-4108$, $z_6=-3960$, $z_7=-2863$, $z_8=-2715$, $z_9=-2567$, $z_0=-10000$) и установки по изучению рассеяния протонов на углероде^{/2/} (ИТЭФ) (рис. 1а, $z_1=500$, $z_2=560$, $z_3=620$, $z_4=1880$, $z_5=1940$, $z_6=2000$, $z_7=3000$, $z_8=03060$, $z_9=3120$, $z_{10}=4380$, $z_{11}=4440$, $z_{12}=4500$, $z_0=2500$). Результаты были получены для различных значений углов θ , погрешностей измерения координат b (бралось $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = \sigma_{z_i} = \sigma$, $i, j, k, l = \overline{1, N}$) и при различных количествах камер N_a , зарегистрировавших частицу a , $N_a = 6$ или 3 для установки ИТЭФ (во втором случае не работают 4-6 камеры) и 9 - для БИС. Эти результаты приведены в таблице I.

Алгоритм 2. Представление события двумя скрещивающимися прямыми, описываемыми уравнениями

$$X^a = A_x^a z + B_x^a$$

$$y^a = A_y^a z + B_y^a$$

$$X^b = A_x^b z + B_x^b$$

$$y^b = A_y^b z + B_y^b$$

приводит к независимой минимизации четырех функций вида

$$\Phi_2^{xj} = \sum_{i=1}^{n_x^j} (x_i^j - A_x^j z_{x_i^j} - B_x^j)^2 w_{x_i^j},$$

$$\Phi_2^{yj} = \sum_{i=1}^{n_y^j} (y_i^j - A_y^j z_{y_i^j} - B_y^j)^2 w_{x_i^j} \quad (j = a, b),$$

в результате чего получаются, как известно^{/3/}, следующие оценки параметров:

$$A_x^j = \frac{1}{\tilde{\Delta}_x^j} \left[\sum_{i=1}^{n_x^j} w_{x_i^j} x_i^j z_{x_i^j} \cdot \sum w_{x_i^j} - \sum w_{x_i^j} x_i^j \cdot \sum w_{x_i^j} z_{x_i^j} \right]$$

$$B_x^j = \frac{1}{\tilde{\Delta}_x^j} \left[\sum_i w_{x_i^j} x_i^j \cdot \sum w_{x_i^j} (z_{x_i^j})^2 - \sum w_{x_i^j} x_i^j z_{x_i^j} \cdot \sum w_{x_i^j} z_{x_i^j} \right],$$

$$\tilde{\Delta}_x^j = \sum w_{x_i^j} \cdot \sum w_{x_i^j} \cdot (z_{x_i^j})^2 - (\sum w_{x_i^j} z_{x_i^j})^2, \quad j = a, b$$

(аналогичные выражения для A_y^j, B_y^j).

В качестве оценки координат точки взаимодействия берутся координаты середины общего к прямым a и b перпендикуляра^{/4/}, а θ вычисляется, как и в алгоритме I.

В таблице I приведены свойства оценок, получаемых по алгоритму 2.

Сравнение приведенных в таблице I результатов показывает эквивалентность описанных алгоритмов для различных изучаемых

процессов и конфигураций установок. Практическая же реализация алгоритма 2 существенно проще, а программы требуют меньше памяти и времени для их выполнения.

Алгоритм 3. Алгоритм I может быть несколько модифицирован, если дополнительно известна Z_0 . (мишень - ионизационная камера, мишень - черенковский счетчик, достаточно тонкая мишень). В этом случае мы приходим к системе (I), но без последнего уравнения и с известной Z_0 . Теперь эта система линейна, и она легко решается ($l_i^j = z_{x_i}^j - z_0$):

$$A_x^a = \Delta_1 / \Delta, \quad A_x^b = \Delta_2 / \Delta, \quad x_0 = \Delta_3 / \Delta,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a (l_i^a)^2 & 0 & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a l_i^a \\ 0 & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b (l_i^b)^2 & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b l_i^b \\ \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a l_i^a & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b l_i^b & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a x_i^a l_i^a & 0 & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a l_i^a \\ \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b x_i^b l_i^b & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a (l_i^a)^2 & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b l_i^b \\ \sum_{i=1}^{n_x^a} x_i^a w_{x_i}^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} x_i^b w_{x_i}^b & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b l_i^b & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_{x_i}^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_{x_i}^b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a (l_i^a)^2 & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a x_i^a l_i^a & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a l_i^a \\ 0 & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b x_i^b l_i^b & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b l_i^b \\ \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a l_i^a & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a x_i^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b x_i^b & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a (l_i^a)^2 & 0 & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a x_i^a l_i^a \\ 0 & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b (l_i^b)^2 & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b x_i^b l_i^b \\ \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a l_i^a & \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b l_i^b & \sum_{i=1}^{n_x^a} w_i^a x_i^a + \sum_{i=1}^{n_x^b} w_i^b x_i^b \end{vmatrix}$$

Аналогично вычисляются A_y^a, A_y^b, y_0 .

Матрица ошибок параметров A_x^a, A_x^b, x_0 имеет вид

$$C = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

$$c_{11} = (\sum w_i^a + \sum w_i^b) \sum w_i^b (l_i^b)^2 - (\sum w_i^b l_i^b)^2$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum w_i^b l_i^b \cdot \sum w_i^a l_i^a$$

$$c_{13} = c_{31} = -\sum w_i^a l_i^a \cdot \sum w_i^b (l_i^b)^2$$

$$c_{22} = \sum w_i^a (l_i^a)^2 (\sum w_i^a + \sum w_i^b) - (\sum w_i^a l_i^a)^2$$

$$c_{33} = \sum w_i^a (l_i^a)^2 \cdot \sum w_i^b (l_i^b)^2$$

Для малых углов $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$ ($\theta_x = A_x^b - A_x^a$, $\theta_y = A_y^b - A_y^a$)

представляет интерес точности определения величин θ_x , θ_y .

Для дисперсии θ_x получаем выражение

$$\sigma_{\theta_x}^2 = \frac{1}{\Delta} \|1_a - 1\| \cdot \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\Delta} (c_{11} + c_{22} - 2c_{21}) =$$

$$= \frac{(\sum w_i^a + \sum w_i^b)(\sum w_i^a (l_i^a)^2 + \sum w_i^b (l_i^b)^2) - (\sum w_i l_i^a + \sum w_i l_i^b)^2}{\Delta}$$

Сравним величину $\sigma_{\theta_x}^2$ с аналогичной характеристикой алгоритма 2 $\tilde{\sigma}_{\theta_x}^2$, которая вычисляется из выражения^{/3/}:

$$\tilde{\sigma}_{\theta_x}^2 = \tilde{\sigma}_{A_x^a}^2 + \tilde{\sigma}_{A_x^b}^2 = \frac{\sum w_i^a}{\tilde{\Delta}_x^a} + \frac{\sum w_i^b}{\tilde{\Delta}_x^b}$$

$$\frac{\sigma_{\theta_x}^2}{\tilde{\sigma}_{\theta_x}^2} = \frac{(\tilde{\Delta}_x^a + \tilde{\Delta}_x^b - 2 \sum w_i^a l_i^a \cdot \sum w_i^b l_i^b) \cdot \tilde{\Delta}_x^a \tilde{\Delta}_x^b}{(\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a (l_i^a)^2 + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b (l_i^b)^2) (\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b)} = 1 + \chi,$$

$$\chi = \frac{(\tilde{\Delta}_x^a + \tilde{\Delta}_x^b - 2 \sum w_i^a l_i^a \cdot \sum w_i^b l_i^b) \tilde{\Delta}_x^a \tilde{\Delta}_x^b - (\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a (l_i^a)^2 + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b (l_i^b)^2) (\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b)}{(\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a (l_i^a)^2 + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b (l_i^b)^2) (\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b)} +$$

$$+ \frac{\tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b (l_i^b)^2 [\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b]}{(\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a (l_i^a)^2 + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b (l_i^b)^2) (\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b)}$$

После некоторых алгебраических преобразований получаем

$$\chi = - \frac{(\tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^a l_i^a + \tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^b l_i^b)^2}{(\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a (l_i^a)^2 + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b (l_i^b)^2) (\tilde{\Delta}_x^b \sum w_i^a + \tilde{\Delta}_x^a \sum w_i^b)}$$

Поскольку $\chi \leq 0$, $\sigma_{\theta_x}^2 \leq \tilde{\sigma}_{\theta_x}^2$.

Предположим равноточность камер и симметричность установки, т.е.

$$n^a = n^b ; \quad z_i^a = -z_i^b, \quad w_i^a = w_j^b = w \quad (i, j = \overline{1, n^a})$$

В этих предположениях $\tilde{\Delta}_x^a = \tilde{\Delta}_x^b$; положив $N = n^a + n^b$, получаем

$$\chi = - \frac{(\sum (z_i^a - z_0) + \sum (-z_i^a - z_0))^2}{N (\sum (z_i^a - z_0)^2 + \sum (-z_i^a - z_0)^2)} = - \frac{0.5 N}{N + \sum \frac{z_i^2}{z_0^2}} .$$

Видно, что $\chi = 0$ и $\tilde{\sigma}_{\theta_x} = \tilde{\sigma}_{\theta_x}$ при $z_0 = 0$, т.е. в тех случаях, когда рассеяние происходит вблизи точки симметрии установки. Максимальное значение $|\chi|$ принимает при $z_i \sim z_0$

$$0 \leq \chi < \frac{1}{4}$$

При $z_i^a = z_i^b$ ("распад") $\chi = \frac{2(\sum^n (z_i - z_0))^2}{N \sum (z_i - z_0)^2}$

В этом случае $|\chi| > 0$ для любой геометрии установки, причем преимущество алгоритма 3 тем сильнее, чем больше точка распада удалена от системы камер, регистрирующих частицы.

Для несимметричных установок алгоритм 3 дает преимущество и при анализе актов рассеяния.

Кроме того, при больших углах рассеяния использование этого алгоритма повышает точность оценки и для симметричных установок.

Сказанное иллюстрируется таблицей I, где приведены результаты обработки по алгоритму 3 смоделированного материала.

При обработке экспериментальной информации важно не только восстановить траектории частиц a, b , но и убедиться в том, что эти траектории действительно пересекаются в пространстве. При использовании алгоритма 1 естественно считать прямые пересекающимися, если ϕ_1 не превосходит некоторой заданной величины. Для алгоритма 2 в качестве критерия выбирается малость квадрата расстояния r^2 между восстановленными в пространстве траекториями a, b .

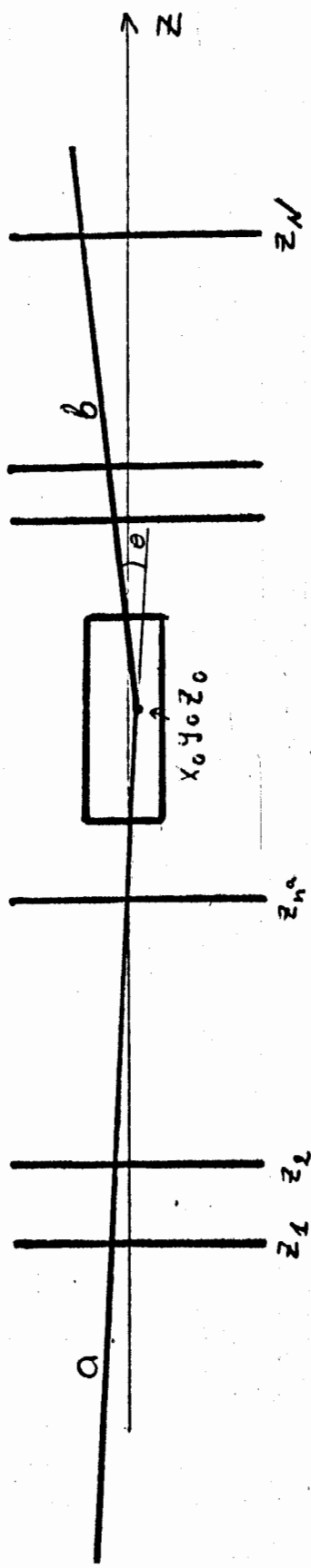
Для сравнения эффективности алгоритмов в этом отношении нами были получены распределения величин ϕ_1, r^2 для действительно пересекающихся траекторий, и были выбраны максимальные значения этих величин, соответствующие 10% и 20% вероятности совершения ошибки первого рода. Затем эти критерии были применены при анализе событий, в которых прямые в действительности скрещиваются, и расстояние между ними - одно и то же для всей выборки. Оказалось, что при расстоянии между прямыми 1,8 мм при 10% и 20% уровнях ошибки первого рода ошибка второго рода совершается при использовании алгоритма 1 в 33% и 49% случаев, а при использовании алгоритма 2 - в 7.5% и 15% случаев для установки ИТЭФ, в которой срабатывают первые 4 камеры до мишени. Таким образом, с точки зрения отбора пар пересекающихся прямых алгоритм 2 является более эффективным.

На рис. 2, 3 приведены распределения величин ϕ_1, r^2 для пересекающихся (2а, 3а) и скрещивающихся (2б, 3б) прямых. Показаны 10% и 20% уровни совершенных ошибок первого рода. Величина ϕ_1 в случае пересекающихся прямых распределена как χ^2 с $13(2 \cdot 10 - 7)$ степенями свободы.

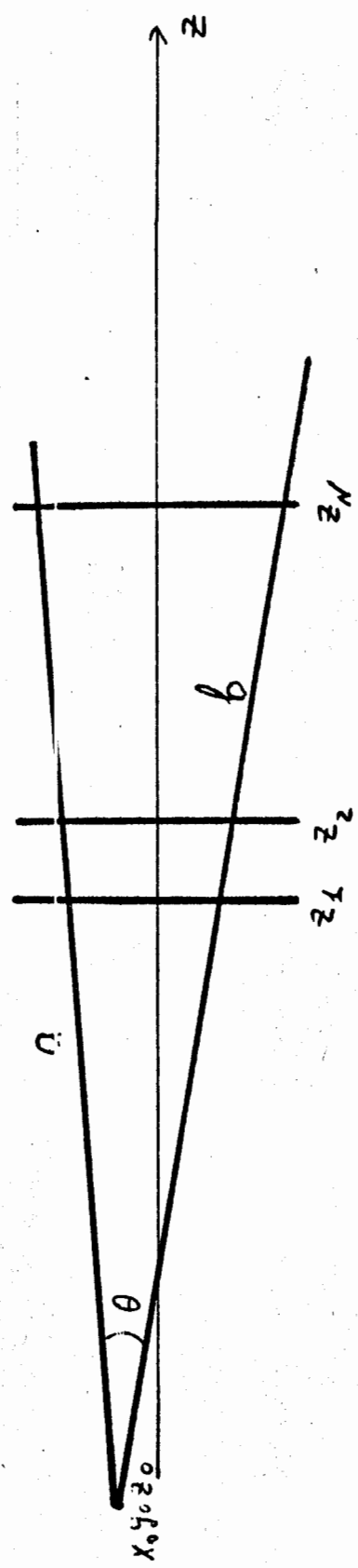
В заключение авторы выражают благодарность Н.Н.Говоруну за полезные обсуждения, В.А.Жамсаранову и А.И.Карпушову за большой вклад на начальных этапах исследования алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Г.Басиладзе и др. ОИЯИ Р1-5361, Дубна, 1970.
2. В.В.Журкин и др. ИТЭФ-82, Москва, 1974.
3. Д.Худсон. "Статистика для физиков". "Мир", М., 1970.
4. Н.Н.Говорун, И.М.Иванченко. ОИЯИ, IO-3357, Дубна, 1963.



а) регистрация рассеяния



б) регистрация расхода

Рис. 1. Срезы экспериментальной установки

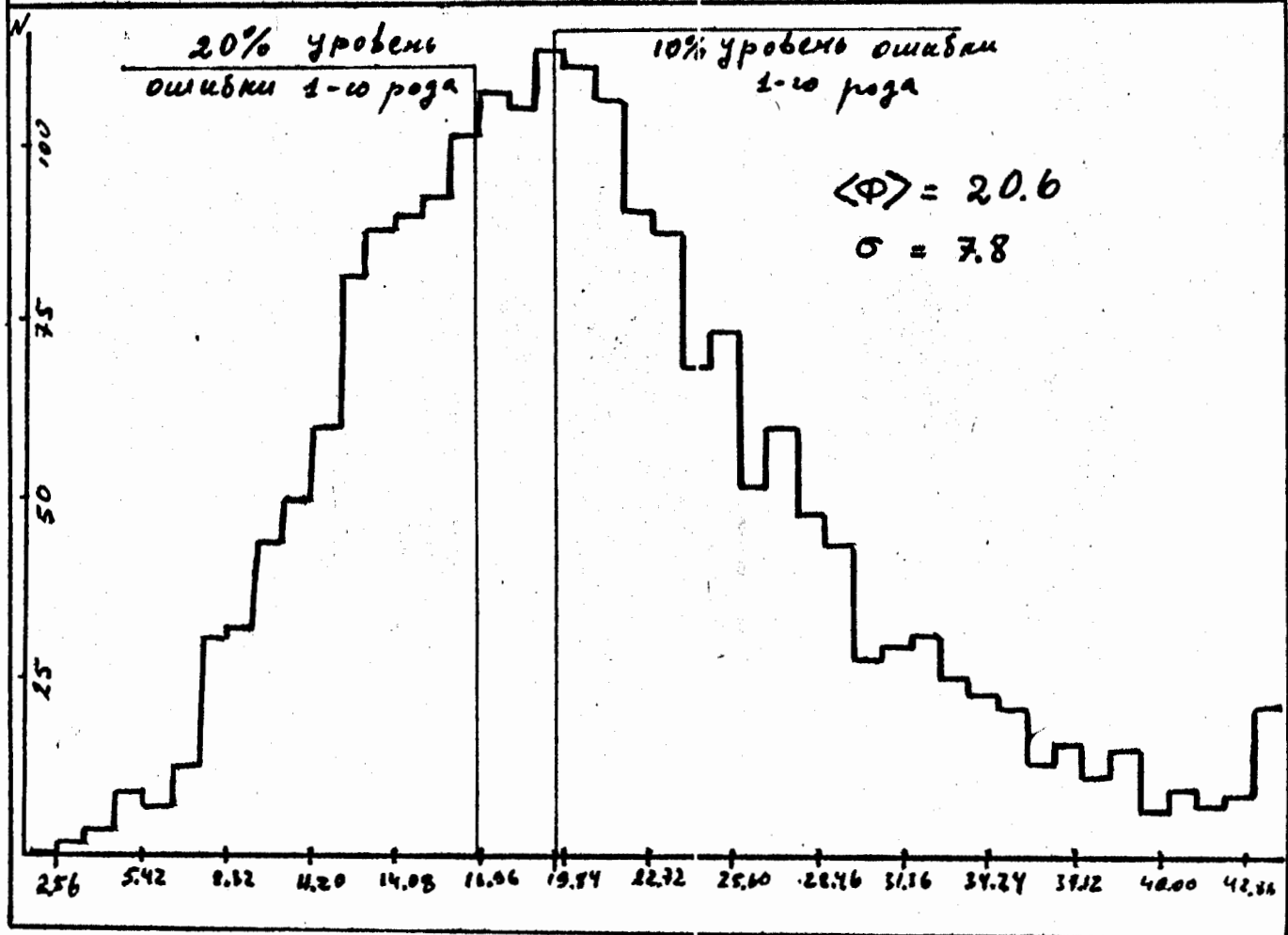
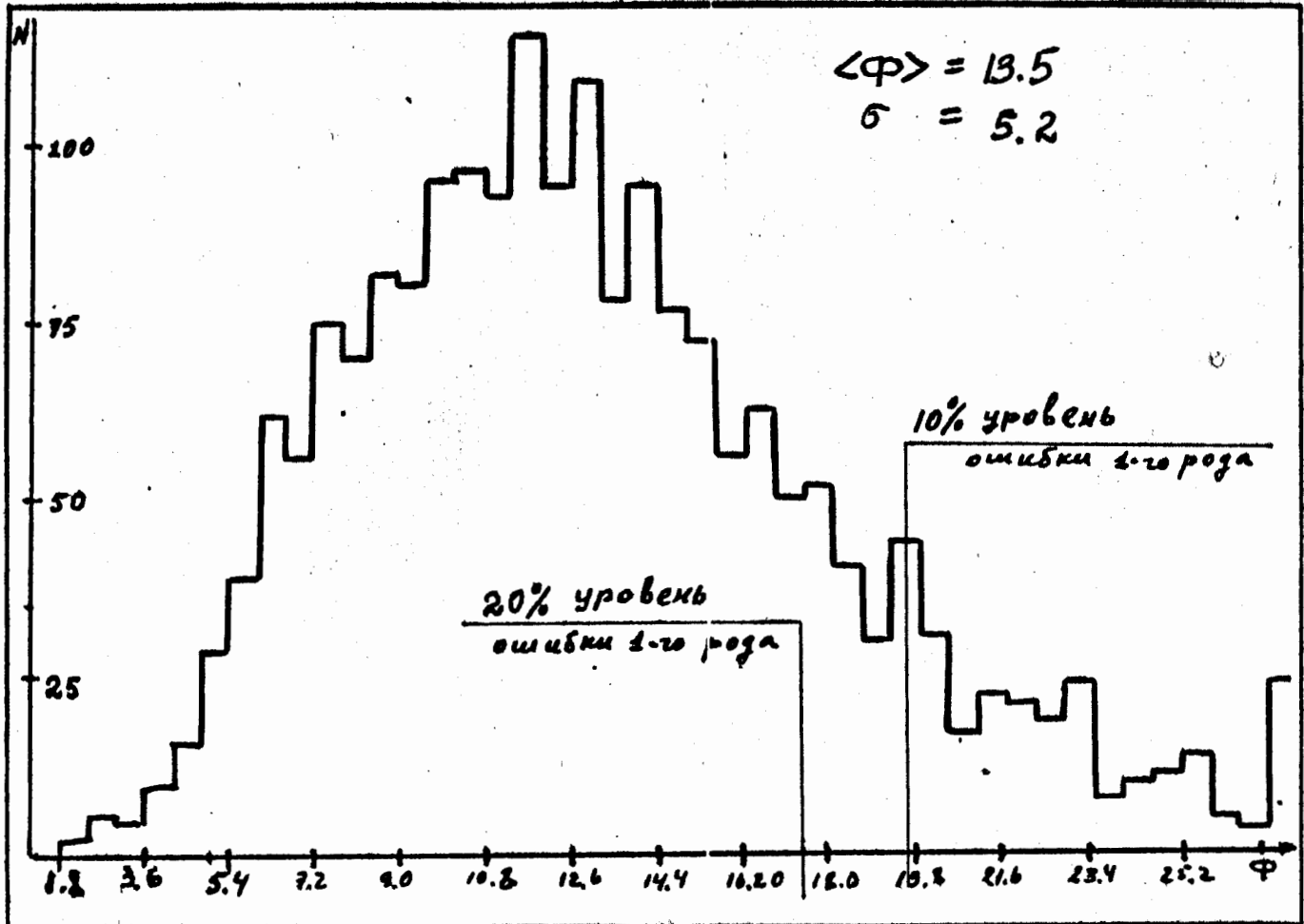


Рис. 2 Распределение величины Φ

- а) пересекающаяся прямая
- б) скрещивающаяся прямая

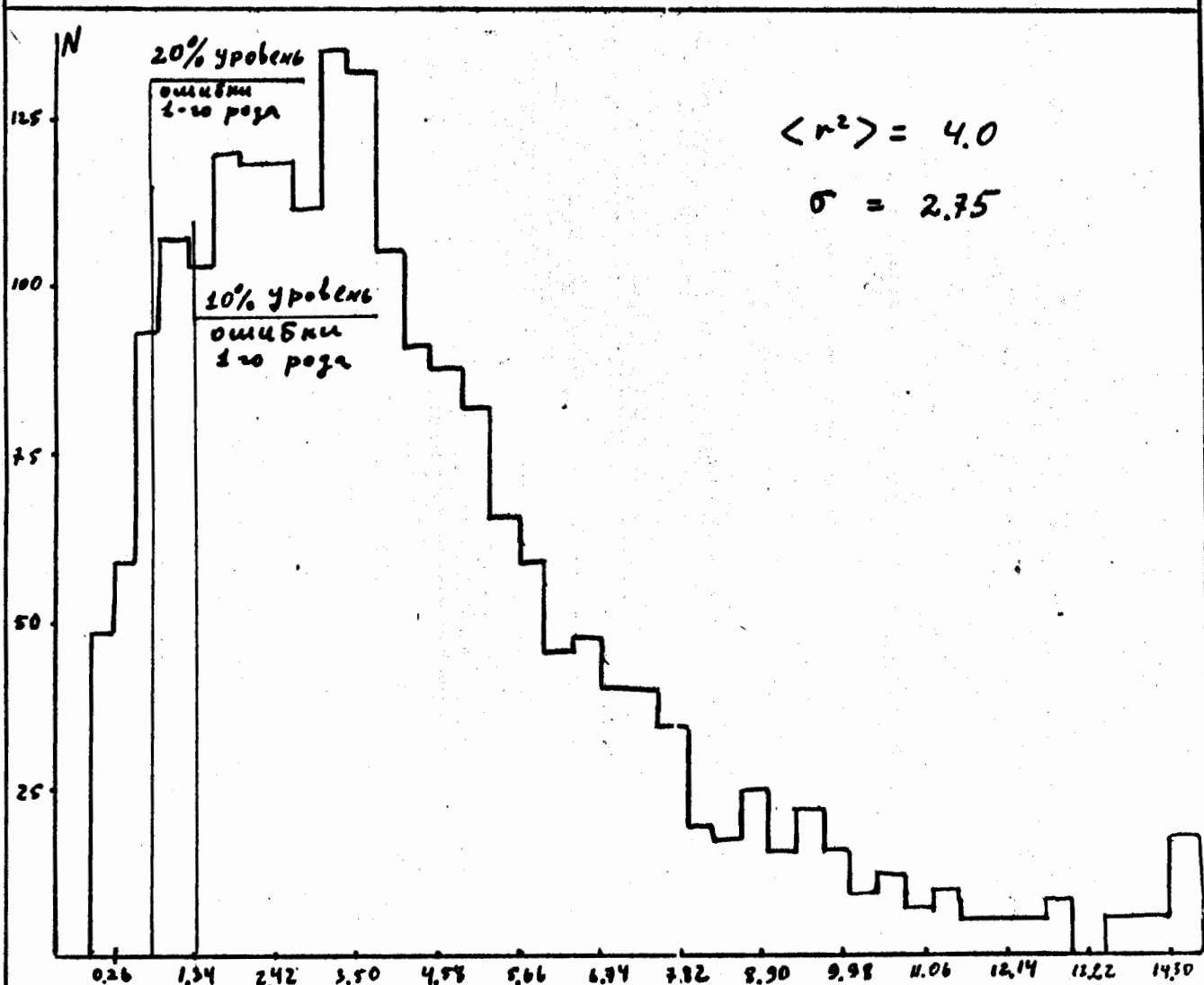
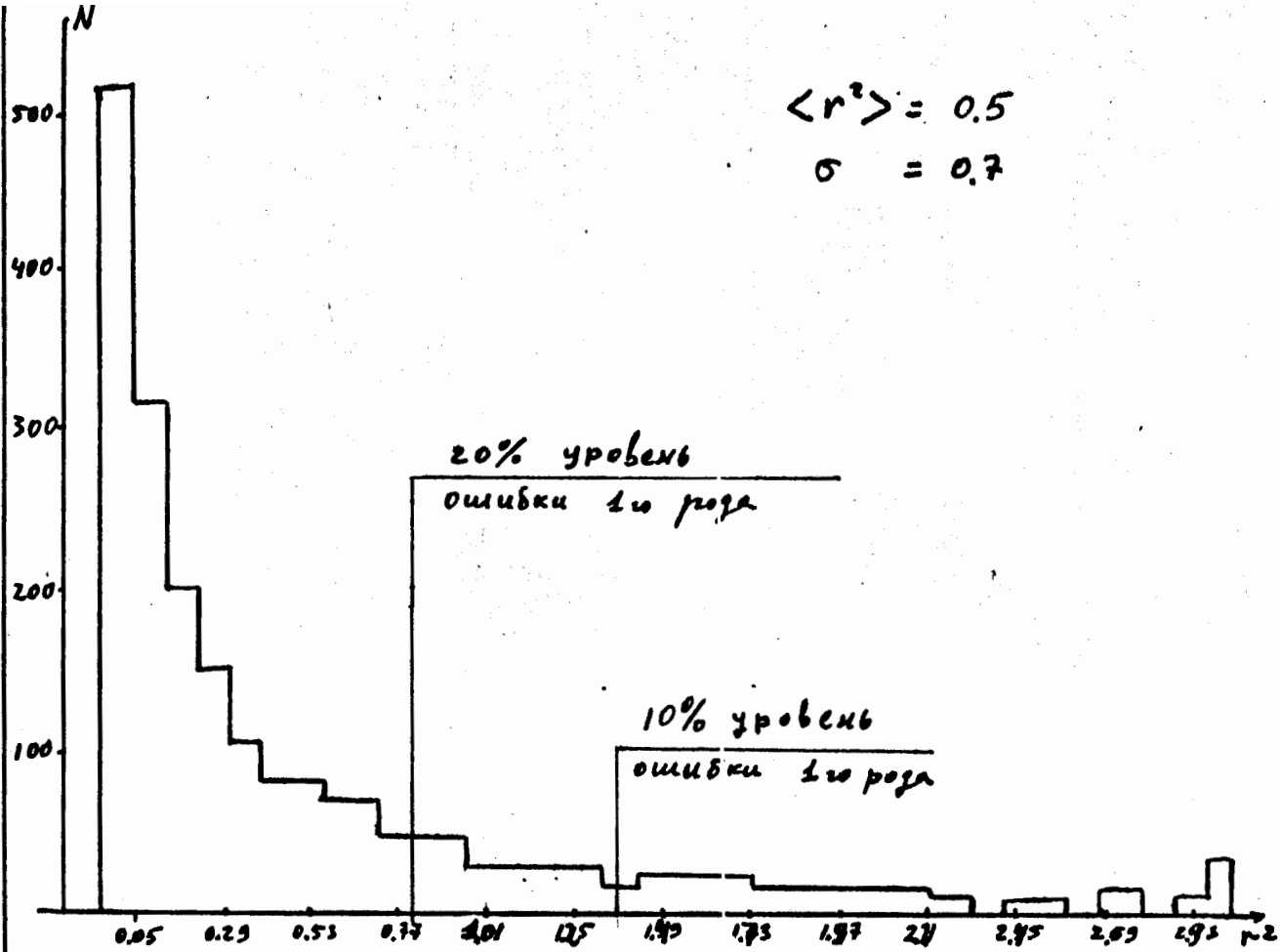


РИС. 3. Распределение величин r^2 :
 а) пересекающиеся прямые
 б) скрещивающиеся прямые

№	θ_x / θ_y (град)	b (мм)	Алгоритм № 1			Алгоритм № 2			Алгоритм № 3				
			$\sigma_x / \Delta x$	$\sigma_y / \Delta y$	$\sigma_z / \Delta z$	$\sigma_x / \Delta x$	$\sigma_y / \Delta y$	$\sigma_z / \Delta z$	$\sigma_x / \Delta x$	$\sigma_y / \Delta y$	$\sigma_z / \Delta z$		
3	0.2 / 0.2	0.4	6.57 / -0.07	6.56 / -0.07	32.83 / -0.36	4.78 / 0.14	7.27 / -0.17	7.35 / -0.08	32.83 / -0.91	4.78 / 0.17	0.33 / -0.06	0.34 / 0.00	0.4 / 0.00
3	$\theta_{x_1} = \theta_{y_1} = -\frac{\pi}{4}$ $\theta_{x_2} = \theta_{y_2} = \frac{\pi}{4}$	0.4	3.29 / -0.09	3.29 / -0.86	3.28 / -0.87	1.59 / 0.00	4.57 / -0.12	4.62 / -0.03	3.28 / -0.91	1.59 / 0.00			
3	0.2 / 0.2	1.6	26.89 / 1.41	26.93 / 1.42	134.5 / 7.0	19.19 / 0.27	29.8 / 0.6	29.39 / 0.52	133.6 / -1.8	19.18 / 0.88	1.3 / 0.01	1.4 / 0.17	1.6 / -0.02
3	$t_g \theta_{x_1} - t_g \theta_{y_1} = 1$ $t_g \theta_{x_2} - t_g \theta_{y_2} = 1$	0.4	6.45 / 0.12	6.46 / 0.13	6.45 / 0.12	4.70 / 0.08	7.2 / 0.11	7.15 / 0.12	6.45 / 0.08	4.70 / 0.07	0.33 / 0.00	0.34 / 0.00	0.273 / 0.00
3	$\theta_{x_1} = \theta_{y_1} = -\frac{\pi}{4}$ $\theta_{x_2} = \theta_{y_2} = \frac{\pi}{4}$	$\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = 2.0$ $\sigma_{x_2} = \sigma_{y_2} = 0.1$	16.39 / -0.32	16.39 / -0.32	16.39 / -0.32	7.96 / 0.00	22.83 / -0.26	23.17 / 0.17	16.39 / -0.45	7.96 / 0.00			
6	$\theta_{x_1} = \theta_{y_1} = 0$ $\theta_{x_2} = \theta_{y_2} = \frac{\pi}{4}$	0.4	0.29 / 0.00	0.29 / 0.00	0.34 / 0.00	0.250 / 0.00	0.29 / 0.00	0.29 / 0.00	0.34 / 0.00	0.25 / 0.00	0.24 / 0.00	0.24 / 0.00	0.236 / 0.01
6	0.2 / 0.2	0.4	0.29 / 0.00	0.29 / 0.00	1.69 / 0.02	0.33 / 0.01	0.29 / 0.00	0.29 / 0.00	1.69 / 0.02	0.33 / 0.01	0.24 / 0.00	0.24 / 0.00	0.33 / 0.01
9	0.035 / 0.035	0.4	1.0 / 0.00	1.0 / -0.03	39.4 / 0.01	0.167 / 0.00	1.0 / 0.00	1.0 / -0.05	39.4 / 0.22	0.167 / 0.00	1.0 / 0.00	1.0 / -0.05	0.047 / 0.00

Таблица 1. Свойства оценок геометрических параметров, полученных описанным алгоритмом.

№ - количество камер, зарегистрировавших частицу ρ ; σ - погрешности выверки; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (мм), $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - погрешности отрезков x, y, z - координат точки взаимодействия и угла между камерами; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (мм), $\Delta \theta$ (град) - смещение этих параметров по выборке в 2000 событий.