

Ц 840а

Б1-10-80-729.

829/81



Зорин В.П. и Сороко Л.М.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

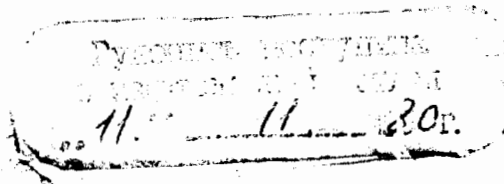
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

51-10-80-729

В.П.Зорин., Л.М.Сорско.

ФУРЬЕ-АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА
ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПУЧКЕ.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

Дубна, 1980 г.

Аннотация

Описан фурье-алгоритм получения томографических изображений на параллельном пучке. Приведены результаты моделирования алгоритма на различных геометрических фигурах и на медицинском фантоме. Время счета на ЭВМ СДС-6500 составляет $T_{\text{мин}}$ для матрицы изображения 64×64 при числе проекций 128 и точек отсчета в каждой проекции 128.

Введение

Последние успехи реконструктивной томографии, в основе которой лежат алгоритмы восстановления изображений по проекциям /1/, вызвали большую волну интереса к реконструктивной томографии в атомной энергетике /2/, в радиоастрономии /3/, кристаллографии /4/, биологии и медицине /5/. Вычислительные алгоритмы получения томографических изображений по проекциям непрерывно усовершенствуются и в настоящее время достигли высокого уровня быстродействия /1/.

Предполагают, что внедрение реконструктивной томографии в медицину коренным образом изменит методы диагностики злокачественных опухолей, а также методы исследования динамики переноса вещества и химических процессов в теле человека. Ожидают /1/, что важнейшая информация станет доступна врачу после того, как быстродействие алгоритмов реконструктивной томографии перешагнет рубеж, который требуется для того, чтобы наблюдать кино-томограммы сердца и легких человека, находящихся в непрерывном движении.

Реконструктивная томография должна стать незаменимым инструментом для лучевой терапии /6/, эффективность которой находится в прямой связи со степенью надежности диагностических заключений, которые способен сделать врач.

В Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ начаты первые эксперименты по исследованию возможности протонной томографии как нового метода диагностики при лучевой терапии. В данной работе описан Фурье-алгоритм восстановления томографических изображений на параллельном пучке, а также приведены результаты

моделирования алгоритма на объектах различных геометрических форм.

История метода

В настоящее время установлено, что основополагающий вклад в теорию восстановления изображений по проекциям был сделан J. Radon /7/. В процессе исследования интегральных уравнений, связывающих структуру произвольных двумерных объектов с их проекциями под различными направлениями J. Radon построил общую формулу обращения, которая не потеряла своего теоретического и прикладного значения через 50 лет после публикации работы /7/.

Первое применение идей реконструктивной томографии было сделано, по-видимому, в радиоастрономии еще в 1942 г. /1/. Внедрение реконструктивной томографии в медицину началось после теоретической работы A. Cormack /8/ в 1963 г. Синтез трехмерной структуры образцов по микрофотографиям, полученным в электронном микроскопе, был проведен в 1968 г. /9/. Большой вклад в развитие реконструктивной томографии был сделан Б.К.Вайнштейном /4,10/. Первый коммерческий сканер для медицины на основе реконструктивной томографии был изготовлен G. Haunsfield в фирме EMI в 1973 г. /12/. В том же году P. C. Lauterbur создал интроскопию ядерного магнитного резонанса, основанную на реконструктивной томографии /11/.

Принцип реконструктивной томографии

Реконструктивной томографией называют аппаратуру и алгоритмы, предназначенные для формирования изображений внутренней структуры

объекта в тонком слое, используя для этого данные о совокупности проекций, измеренных под различными направлениями (ракурсами).

В реконструктивной цифровой томографии процесс восстановления томографических изображений (томограмм) ведут при помощи ЭВМ /5/.

В реконструктивной аналоговой томографии для этой же цели используют аналоговые, преимущественно оптические системы /13/.

Чтобы пояснить сущность реконструктивной томографии, рассмотрим схему формирования одной из многих проекций параллельными лучами проникающего излучения. Пусть функция $f(x, y)$ характеризует линейный коэффициент экспоненциального ослабления интенсивности рентгеновских лучей в малой окрестности точки (x, y) , лежащей в некотором заранее выбранном тонком плоском слое исследуемого объекта (Рис.1). Каждое проекционное измерение выражается логарифмом отношения интенсивности рентгеновских лучей в двух точках: перед объектом и с задней стороны объекта относительно просвечивающих рентгеновских лучей. Благодаря линейной природе коэффициента экспоненциального ослабления рентгеновских лучей $f(x, y)$, логарифм полного ослабления рентгеновских лучей в объекте можно записать в виде интеграла зависит от двух параметров: расстояния z от начала системы координат до линии проектирования, а также угла θ между осью Ox и нормалью, проведенной из начала системы координат к линии проектирования. Этот линейный интеграл можно записать в виде преобразования Радона /1/:

$$g(z, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z \cos \theta - u \sin \theta, z \sin \theta + u \cos \theta) du, \quad (I)$$

где u — координата точки вдоль линии проектирования. Совокупность проекционных данных $g(z, \theta)$, полученных для всех z и θ , позволяет найти искомую функцию $f(x, y)$ при помощи обратного

преобразования Радона /1/:

$$f(x, y) = \frac{P}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{x \cos \theta + y \sin \theta - z} \frac{dg(z, \theta)}{dz} dz, \quad (2)$$

Чтобы устранить сингулярность от множителя

$$\frac{1}{x \cos \theta + y \sin \theta - z}$$

интеграл по z в (2) берут в смысле главного значения Коши.

Подинтегральное выражение в (2) содержит операцию дифференцирования по z функции $g(z, \theta)$, которая в реальном эксперименте представляет собой дискретную совокупность отсчетов. Поэтому реализация обратного преобразования Радона (2) на ЭВМ представляет собой некорректную задачу /14/. Алгоритмы решения подобных задач описаны, в частности, в /15/. Однако традиционные строго формализованные методы регуляризации не могут быть использованы на практике из-за очень большого объема вычислений на ЭВМ. Поэтому были разработаны быстродействующие, хотя и приближенные алгоритмы восстановления томограмм по совокупности проекций. Прямые алгоритмы можно разбить на три основных группы /16/: алгоритм Фурье, алгоритм обратной проекции с фильтрацией и сверточные алгоритмы. Кроме этого были разработаны итеративные алгебраические алгоритмы, а также нелинейный алгоритм восстановления при помощи метода максимума энтропии /17/. Последний алгоритм дает томограммы хорошего качества даже в том случае, когда имеется усеченная или прорешенная совокупность исходных проекционных данных. Метод максимума энтропии обладает наивысшим иммунитетом к шумам и погрешностям измерений.

Фурье-алгоритм

Сущность Фурье-алгоритма восстановления томограмм непосредственно вытекает из теоремы /18/, которая связывает Фурье-образ $F(\omega_x, \omega_y)$ двумерной функции $f(x, y)$ с Фурье-образом проекции $g(r, \theta)$, которая в свою очередь является радоновским образом исходной функции $f(x, y)$. Эта теорема формулируется следующим образом: одномерный Фурье-образ проекции $g(r, \theta)$ вдоль переменной r при фиксированном угле θ , который можно записать в виде

$$G_r(\omega_r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r, \theta) \exp(-i\omega_r r) dr, \quad (3)$$

совпадает с центральным сечением двумерного Фурье-образа $F(\omega_x, \omega_y)$, равного

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(x\omega_x + y\omega_y)] dx dy, \quad (4)$$

под тем же углом θ .

Действительно, если x и y в (4) выразить через естественные координаты для каждой проекции r и u ,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta - u \sin \theta, \\ y &= r \sin \theta + u \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

далее принять во внимание, что

$$dx dy = du dr, \quad (6)$$

а также вместо ω_x и ω_y взять ω_r и ω_u , которые определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \omega_z &= \omega_x \cos \theta + \omega_y \sin \theta, \\ \omega_u &= -\omega_x \sin \theta + \omega_y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

то в плоскости пространственных частот на линии $\omega_u = 0$ уравнение (4) перейдет в соотношение:

$$F(\omega_z, \omega_u = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau \cos \theta - u \sin \theta, \tau \sin \theta + u \cos \theta) \cdot \exp(-i \tau \omega_z) d\tau du, \quad (8)$$

которое совпадает с выражением (3) и представляет собой математическую формулировку данной теоремы.

Из этой теоремы непосредственно следует, что если задана совокупность проекционных измерений $g(\tau, \theta)$ под многими углами θ , то в плоскости пространственных частот можно построить совокупность центральных сечений двумерного Фурье-образа $F(\omega_x, \omega_y)$ искомой функции $f(x, y)$ под теми же углами θ , а затем по этим сечениям найти оценку искомой функции $\hat{f}(x, y)$.

Чтобы использовать эту теорему для расчетов на ЭВМ, необходимо сделать переход от непрерывного представления функций к дискретному, а бесконечную последовательность проекций заменить на конечную. Здесь могут встретиться следующие частные случаи. Если искомая функция $f(x, y)$ зависит только от τ и не зависит от θ , то достаточно измерить только одну, произвольную, проекцию $g(\tau)$. В этом случае Фурье-образ $F(\omega_x, \omega_y)$ искомой функции $f(x, y)$ представляет собой фигуру вращения, которую строят путем вращения разреза, полученного под каким-нибудь одним углом θ .

Если исходную функцию $f(x, y)$ можно факторизовать в виде

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y), \quad (9)$$

то для восстановления такой функции достаточно измерить две проекции:

$$g_1(\tau, \theta = 0^\circ) \text{ и } g_2(\tau, \theta = 90^\circ) .$$

Чтобы решить задачу восстановления искомого функции $f(x, y)$, не обладающей никакими свойствами симметрии, по конечной совокупности проекций, необходимо, чтобы эта функция входила в класс с ограниченной полосой пространственных частот или могла быть аппроксимирована такими функциями. Тогда полная информация об искомой функции может быть представлена конечным числом отсчетов /19/. Это открывает возможность вести все вычисления на ЭВМ без каких-либо дополнительных аппроксимаций. На Рис.2 показан пример, иллюстрирующий процесс формирования трех проекций с конечным числом отсчетов.

Системы координат

Естественный метод реализации Фурье-алгоритма восстановления томограмм основан на использовании полярной сетки в плоскости пространственных частот. Если $F(\omega, \theta)$ - Фурье-образ искомой функции $f(x, y)$, записанный в полярной системе координат, то оценка функции $\hat{f}(x, y)$ равна

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} F(\omega, \theta) \cdot \exp[i(x\omega \cos \theta + y\omega \sin \theta)] \cdot |\omega| \cdot d\theta . \quad (10)$$

Функция $F(\omega, \theta)$ при фиксированном θ представляет собой центральное сечение Фурье-образа $F(\omega_x, \omega_y)$ под углом θ .

При использовании формулы (10) необходимо учесть, что число центральных сечений, а также число отсчетов вдоль переменной в каждом центральном сечении конечны. Поэтому возникает проблема аппроксимации функции $F(\omega, \theta)$ в промежутках между дискретными

значениями, полученными в ходе измерений проекций. Если центральные сечения Фурье-образа идут равномерно по углу θ , а шаг между отсчетами вдоль переменной ω постоянен, то исходные данные в плоскости пространственных частот заданы на регулярной полярной сетке, которая показана на Рис.3.

Однако дискретный двумерный Фурье-образ $F(\omega_x, \omega_y)$, который будет подвергнут двумерному дискретному преобразованию на ЭВМ, должен быть задан в узлах декартовой сетки. Поэтому переходят от отсчетов Фурье-образа на полярной сетке к отсчетам Фурье-образа на декартовой сетке. Здесь можно использовать простейшие интерполяционные алгоритмы [18]: полиномиальный нулевого порядка или линейную интерполяцию. При интерполяции нулевого порядка значение отсчета на декартовой сетке принимают равными значению ближайшего отсчета на полярной сетке. При линейной интерполяции значение отсчета на декартовой сетке в точке A , $F(A)$, принимают равным средневзвешанному значению четырех ближайших отсчетов на полярной сетке $F(P_i)$ в точках P_i , $i=1,2,3,4$, причем значение весов обратно пропорциональны евклидовому расстоянию d_i между соответствующими четырьмя отсчетами на полярной сетке и данным отсчетом в точке A на декартовой сетке. В этом случае интерполированное значение в точке A равно

$$F(A) = [d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1} + d_4^{-1}]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^4 d_i^{-1} F(P_i). \quad (II)$$

Таким образом Фурье-алгоритм восстановления томограммы сводится к следующим основным этапам:

I. Вычисление одномерных дискретных Фурье-образов последовательности проекционных отсчетов под всеми углами θ . Эти вычисления дают совокупность центральных сечений Фурье-образа искомой

томограммы в плоскости пространственных частот на полярной сетке.

2. Вычисление оценки Фурье-образа томограммы на декартовой сетке при помощи интерполяционных формул в плоскости пространственных частот по отсчетам Фурье-образа на полярной сетке.

3. Вычисление оценки отсчетов томограммы путем выполнения обратного двумерного дискретного преобразования Фурье на декартовой сетке.

4. Переход от двумерной последовательности дискретных оценок томограммы к непрерывной функции при помощи функций отсчетов. Здесь используют предположение о том, что Фурье-образ искомой томограммы обращается в нуль вне квадрата в плоскости пространственных частот со сторонами $2\omega_0$, т.е. при $|\omega_x| > \omega_0$ и $|\omega_y| > \omega_0$.

Алгоритм прямой аппроксимации

Кроме описанного выше алгоритма перехода от полярной сетки к декартовой можно построить алгоритм прямой аппроксимации значений отсчетов $F(\omega, \theta)$ кусочно-плоскими функциями. Каждая такая функция является плоской внутри криволинейной трапеции, вершины которой находятся в ближайших точках отсчета, а ее значение выражается через аппроксимирующие коэффициенты А, В, С и Д следующим образом /18/:

$$F(\theta, \omega) \approx A + B(\omega - \omega_k) + C(\theta - \theta_k) + D(\omega - \omega_k)(\theta - \theta_i), \quad (12)$$

где

$$A = F(\theta_i, \omega_k),$$

$$B = \frac{F(\theta_i, \omega_{k+1}) - F(\theta_i, \omega_k)}{\Delta \omega},$$

$$C = \frac{F(\theta_{i+1}, \omega_k) - F(\theta_i, \omega_k)}{\Delta \theta} \quad (I3)$$

$$D = \frac{F(\theta_{i+1}, \omega_{k+1}) - F(\theta_{i+1}, \omega_k) - F(\theta_i, \omega_{k+1}) + F(\theta_i, \omega_k)}{\Delta \omega \Delta \theta},$$

$$\Delta \theta_i = \left\{ \begin{array}{l} \theta_{i+1} - \theta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 2, \\ \theta_0 - \theta_{N_2+1} + \bar{\alpha}, \quad i = N_2 - 1, \end{array} \right\} \quad (I4)$$

$$\Delta \omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\sqrt{2} \omega_0}{N_1}.$$

Индекс k принимает $(N_1 + 1)$ значений:

$$-\frac{N_1}{2} + 1, \dots, 0, 1, \dots, \frac{N_1}{2}, \quad N_1 - \text{четно},$$

а индекс $i - N_2$ значений от 0 до $N_2 - 1$.

Аппроксимируя указанным способом функцию внутри всех криволинейных трапеций, приходим к оценке томограммы в явном виде:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{2\omega_0^2}{3\pi N_1^2} F(\theta_0, 0) + \frac{2\omega_0^2}{\pi^2 N_1^2} \sum_{i=0}^{N_2-1} \Delta \theta_i \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=-\frac{N_1}{2}+1}^{\left(\frac{N_1}{2}\right)} |k| \cdot F\left(\theta_i, \frac{2\sqrt{2} k \omega_0}{N_1}\right). \quad (I5)$$

$$\cdot \exp\left\{i \frac{2\sqrt{2} k \omega_0}{N_1} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)\right\}.$$

Прямая реализация выражения (I5) на ЭВМ нецелесообразна из-за большого объема вычислений. Положение меняется, если выражению (I5) дать иную интерпретацию и записать его в виде алгоритма, который можно реализовать в исходном координатном пространстве (x, y) . В (5) приведена связь между декартовыми координатами x, y и естественными координатами τ и u для каждой проекции под углом θ . Обратное соотношение для i -ой проекции под углом θ_i имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &= x \cos \theta_i + y \sin \theta_i, \\ u_i &= -x \sin \theta_i + y \cos \theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (I6)$$

Если далее учесть, что i -ая проекция $g(\tau_i, \theta_i)$ зависит в явном виде только от естественной координаты τ_i и не зависит от u_i , а также принять во внимание связь между этими системами координат (I6), то (I5) можно записать в виде следующей суммы:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{2\omega_0^2}{N_1^2} \left\{ \frac{1}{3\pi} F(\theta_0, 0) + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N_2-1} \Delta\theta_i \cdot R_i(x, y) \right\} \quad (I7)$$

где функция

$$\begin{aligned} R_i &= R_i(x, y) = R_i(\tau_i, u_i) = \\ &= \sum_{k=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} |k| \cdot F(\theta_i, k\Delta\omega) \exp[jk u_i \Delta\omega], \end{aligned} \quad (I8)$$

называемая отфильтрованной растянутой проекцией /I8/, зависит только от τ_i . Выражение (I8) отличается от дискретного преобра-

зования Фурье тем, что в (I8) имеется дополнительный множитель $|k|$, который учитывает изменение плотности отсчетов в полярной сетке с пространственной частотой ω .

Полный алгоритм нахождения оценки томограммы $\hat{f}(x, y)$ при помощи формул (I7) и (I8) сводится к следующим операциям. Сначала вычисляют дискретный Фурье-образ проекции $g_{\theta_i}(r_i)$ и находят функцию $F(\theta_i, k\Delta\omega)$. После умножения ее на $|k|$ выполняют обратное дискретное преобразование Фурье. Полученные значения $R_i(x, y)$ умножают на весовые множители и суммируют. После добавления к сумме постоянного смещения — первого слагаемого в (I7) — получают оценку томограммы $\hat{f}(x, y)$.

Сетка концентрических квадратов

Алгоритм восстановления томограммы, использованный в данной работе, построен на сетке концентрических квадратов, которая была введена в /I8/. Сущность этого алгоритма следует из свойств функций конечного порядка M с ограниченной полосой пространственных частот /20/. Фурье-образ таких функций можно представить в виде полинома степени $(M-1)$ от переменной

$$Z = \exp\left(-j \frac{\pi}{\omega_0} \omega\right). \quad (I9)$$

Для двумерных функций конечного порядка M по каждой переменной с ограниченной полосой пространственных частот Фурье-образ обращается в нуль за пределами квадрата

$$|\omega_x| \leq \omega_0, \quad |\omega_y| \leq \omega_0, \quad (20)$$

и является полиномом степени $(M-1)$ по каждой из переменных

$$Z_x = \exp(-j \frac{\pi}{\omega_0} \omega_{xc}), \text{ и } Z_y = \exp(-j \frac{\pi}{\omega_0} \omega_y). \quad (21)$$

Следовательно, если Фурье-образ указанных функций известен в любой из M точек вдоль любой горизонтальной или вертикальной плоскости спектров, то он известен во всех точках данной линии. Так как ширина спектра зависит от угла θ и определяется выражением

$$\omega_\theta = \frac{\omega_0}{\max\{|\cos \theta|, |\sin \theta|\}}, \quad (22)$$

то разложение каждой проекции $g_\theta(z)$ в ряд по функциям отсчета приобретает вид:

$$g_\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_\theta\left(\frac{n\pi}{\omega_\theta}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\omega_\theta}{\pi} \left(\tau - \frac{n\pi}{\omega_\theta}\right)}{\frac{\omega_\theta}{\pi} \left(\tau - \frac{n\pi}{\omega_\theta}\right)}. \quad (23)$$

Для интервала углов $\theta: 0 \leq \theta \leq \pi$, имеем

$$g_\theta\left(\frac{2\omega_0 k}{M \cos \theta}\right) = \frac{\pi \cos \theta}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_\theta\left(\frac{n\pi \cos \theta}{\omega_0}\right). \quad (24)$$

$$\cdot \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} nk\right], \quad k = -\frac{M}{2} + 1, \dots, +\frac{M}{2}.$$

Если число возможных значений углов θ в интервале $0 \leq \theta_i \leq \pi$ равно N , то двумерный Фурье-образ такой функции задан в узлах сетки отсчетов, которая для $M=8$ показана на Рис.4. На этом же рисунке даны положения M^2 точек

отсчета дискретного Фурье-образа искомой томограммы $\hat{f}(x, y)$. Видно, что через полученные точки отсчетов проекций можно провести M вертикальных и M горизонтальных линий, а точки отсчетов дискретного Фурье-образа лежат на тех же линиях. Таким образом M^2 отсчетов Фурье-образа $F(\omega_x, \omega_y)$ можно определить по N проекциям искомой функции $f(x, y)$. Для этого достаточно использовать одномерную полиномиальную интерполяцию. Чтобы не потерять требуемую информацию, число отсчетов нельзя брать меньше того значения, которое определяется выражением (22) для ω_θ и разложением (23) в ряд по функциям отсчетов.

Здесь целесообразно использовать неравномерное расположение углов проектирования θ . Алгоритм вычислений упрощается, если точки пересечения с концентрическими квадратами расположить равномерно по сторонам каждого из концентрических квадратов. Другим преимуществом сетки из концентрических квадратов над полярной сеткой является то, что теперь не требуется вести интерполяцию вдоль сечений. Задача сводится к полиномиальной интерполяции высокого порядка по переменным $\exp(j\omega_x)$ или $\exp(j\omega_y)$ вдоль сторон концентрических квадратов. Указанную интерполяцию можно выполнить на ЭВМ при помощи дискретного преобразования Фурье.

Запишем в явном виде выражение для алгоритма восстановления томограммы при помощи сетки из концентрических квадратов. Введем две новые переменные в плоскости пространственных частот: переменную ω , которая для каждого квадрата имеет постоянное значение, и нормированную длину дуги λ . Тогда для частного случая $N=8$ получим:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\omega_0} d\omega \left\{ \int_0^1 F(\omega, \lambda) \exp [j\omega (x + \lambda y)] d\lambda - \right. \\
 & - \int_0^3 F(\omega, \lambda) \exp \{ j\omega [(2 - \lambda)x + y] \} d\lambda - \\
 & - \int_0^5 F(\omega, \lambda) \exp \{ j\omega [-x + (4 - \lambda)y] \} d\lambda + \\
 & + \int_0^7 F(\omega, \lambda) \exp \{ j\omega [(\lambda - 6)x - y] \} d\lambda + \\
 & \left. + \int_0^8 F(\omega, \lambda) \exp \{ j\omega [x + (\lambda - 8)y] \} d\lambda \right\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Применим к отсчетам на сетке из concentрических квадратов формулу трапеций. Предположим, что отсчеты заданы на регулярной сетке квадратов равномерно по ω и по λ . Окончательное выражение имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(x, y) = & \frac{4\omega_0^2}{\pi^2 M^2} \left\{ \frac{F(\theta_0, 0)}{8} + \right. \\
 & + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{(N/4)-1} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{(M/2)} |k| \hat{F} \left(\frac{2\omega_0 k}{M}, \frac{4i}{N} \right) \cdot \\
 & \cdot \exp \left[j \frac{2\omega_0 k}{M} \left(x + \frac{4i}{N} y \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{i=N/4}^{\frac{3N}{4}-1} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{(M/2)} |k| \hat{F} \left(\frac{2\omega_0 k}{M}, \frac{4i}{N} \right) \cdot \\
 & \cdot \exp \left[j \frac{2\omega_0 k}{M} \left(\frac{2N-4i}{N} x + y \right) \right] + \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i=\frac{3N}{4}}^{N-1} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{(M/2)} |k| \cdot \hat{F} \left(\frac{2\omega_0 k}{M}, \frac{4i}{N} \right) \cdot \exp \left[j \frac{2\omega_0 k}{M} \left(-x + \frac{4N-4i}{N} y \right) \right]$$

Алгоритм восстановления на сетке из концентрических квадратов прост с точки зрения вычислений и дает оценку, качество которой выше, чем всех остальных алгоритмов восстановления, рассмотренных выше /18/. Однако, неравномерно ориентированные отдельные проекции трудно реализовать экспериментально.

Алгоритм восстановления

В данной работе был использован алгоритм восстановления на сетке из концентрических квадратов, который сводится к следующим этапам:

1) дискретизация проекционных данных в соответствии с теоремой отсчетов /19/, дискретное преобразование Фурье дискретизованных проекционных данных и нахождение отсчетов Фурье-образа $F(\omega_x, \omega_y)$ на сетке из концентрических квадратов;

2) умножение дискретного Фурье-образа $F(\omega_x, \omega_y)$ на фильтрующую функцию $|k|$ и обратное дискретное преобразование Фурье полученной функции;

3) суммирование результатов полученных данных для всех проекций и выравнивание среднего уровня яркости для исходной и восстановленной томограмм.

В соответствии с этим алгоритмом восстановления была составлена программа на языке ФОРТРАН для ЭВМ СДС-6500. Программа состоит из следующих блоков:

- 1) ввод данных о проекциях объекта, шаге дискретизации, размерах расчетной матрицы;
- 2) дискретное преобразование Фурье измеренных проекций;
- 3) обратное дискретное преобразование Фурье и получение распределений плотности вещества в томографическом срезе исследуемого объекта;
- 4) вывод результатов вычислений на цифронепечать.

Кроме этого была составлена подпрограмма **SECT** для вычисления проекций простых геометрических фигур: цилиндра, трубы, параллелепипеда и различных их комбинаций. Эта подпрограмма была использована при отладке алгоритма восстановления и при нахождении оптимальных параметров основной программы.

Результаты вычислений томограмм представлены в виде массива чисел, округленных до третьего знака после запятой, а также в виде матрицы размером 64×64 , каждое число в которой представляет собой целую часть функции плотности $f(x, y) \cdot 10$. Время счета на ЭВМ СДС-6500 составляет около 1 мин при числе проекций 128 и числе точек отсчета в каждой проекции 123.

Структура исследуемых объектов

При помощи описанного выше алгоритма восстановления были получены томограммы цилиндра, трубы, а также медицинского фантома, имитирующего внутреннее строение грудной клетки человека. Проекции этих фигур вычислялись при помощи подпрограммы **SECT**.

Однородный цилиндр диаметром 15 см был "изготовлен" из материала с плотностью 1 г/см^3 . Труба внешним диаметром 8,2 см и толщиной стенок 0,35 см – из материала с плотностью $2,2 \text{ г/см}^3$. Медицинский фантом представлял собой комбинацию трубы и двух параллелепипедов. Труба имела внешний диаметр 3,0 см, внутренний – 0,9 см и плотность материала $2,2 \text{ г/см}^3$. Параллелепипед с горизонтальным сечением размерами $13 \times 9 \text{ см}^2$ был изготовлен из материала с плотностью $0,3 \text{ г/см}^3$. Расстояние между параллелепипедами равнялось 6 см. Труба имитировала позвоночник тела человека, а два параллелепипеда – его легкие.

При получении томограммы цилиндра, обладающего аксиальной симметрией и характеризующегося только одной проекцией, были опробованы два корректирующих фильтра:

$$G_R(k) = \begin{cases} |k|, & |k| \leq k_c, \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}, \quad (27),$$

который предложен в работе /3/, а также

$$G_H(k) = \begin{cases} \frac{|k|}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi k}{k_c} \right], & |k| \leq k_c, \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases} \quad (28)$$

описанный в работе /21/.

На Рис.6 приведены томограммы цилиндра, полученные при помощи корректирующих фильтров (27) и (28). Число проекций равно 128, число точек отсчета в каждой проекции равно 128. На Рис.7 даны радиальные распределения плотности вещества в цилиндре для корректирующего фильтра (27) – в виде пунктирной, и для фильтра (28) в виде сплошной кривой. Число проекций равно 128, число отсчетов в каждой проекции 128. На Рис.8 представлена томограмма трубы, вычисленная при помощи корректирующего фильтра (27). Число

проекций равно 64, число точек отсчета в каждой проекции 64.

Томограмма медицинского фантома восстановленная при помощи корректирующих фильтров (27) и (28) по рассчитанным проекциям приведена на рис.9.

Выводы

1) Описан Фурье-алгоритм восстановления томографических изображений по проекциям, полученным при сканировании тонкого слоя объекта параллельным пучком проникающего излучения.

2) Описана программа вычисления томограммы на языке ФОРТРАН.

3) Для корректирующих фильтров двух типов получены томограммы простейших геометрических фигур и фантома, имитирующего грудную клетку человека.

4) Время счета на ЭВМ СДС-6500 составляет около 1мин для матрицы изображения размером 64x64 при числе проекций 128 и точек отсчета в каждой проекции 128.

Литература

1. Topics in Applied Physics. Vol. 32, Image Reconstruction from Projections, ed. by G.T.Herman, Heidelberg: Springer, 1979
2. J.Sanderson, IEEE Trans.on Nucl.Sci. v.NS-26, p.2685, 1979
3. R.N.Bracewell and A.C.Riddle. Astrophys. J., 1967, v.150,
4. Б.К.Вайнштейн, С.С.Орлов. Кристаллография, 1972, т.17, № 2, с. 253
5. А.С.Кэк. ТИИЭР, 1979, т.67, №9, с.79

6. В.П.Джелепов и др.- В кн.: Протонные пучки высоких энергий и лучевая терапия злокачественных опухолей, ОИЯИ-9035, 1975, с.7.
7. J.Radon. *Ber.Saechsische Akad.der Wiss.*, 1917, Bd, 29, s.262
8. A.M.Cormack. *J.Appl.Phys.* 1963, v.34, p.2722
9. D.J.De Rosier and A.Klug. *Nature*, 1968, v.217, p.130
10. Б.К.Вайнштейн. Кристаллография. 1970, т.15, с.894.
11. P.C.Lauterbur. *Nature*, 1973, v.242, p.190
12. G.N.Hounsfield. *Brit. J.Rad.* 1973, v.46, p.1016
13. A.F.Gmitro et al. *Optical Engineering*, 1980, v.19, p.260
14. А.В.Гончарский и др. Численные методы решения обратных задач астрофизики.- М., Наука, 1978.
15. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач., М., Наука, 1974.
16. Г.Дж.Скаддер. ТИИЭР, 1978, т.66, №6, с.5.
17. G.Minerbo. *Comp.Graph.Image Proc.* 1979, v.10, p.48
18. Р.Мерсеро, А.Оппенгейм. ТИИЭР, 1974, т.62, №10, с.29.
19. А.Джерри. ТИИЭР, 1977, т.65, №11, с.53.
20. Л.Рабинер, Б.Голд. Теория и применение цифровой обработки сигналов, М., Мир.1978.
21. D.A.Chesler, S.J.Riederer, *Phys.Med.Biol.* 1975, v.20, p.632

7/84

Р.С.Смирнов

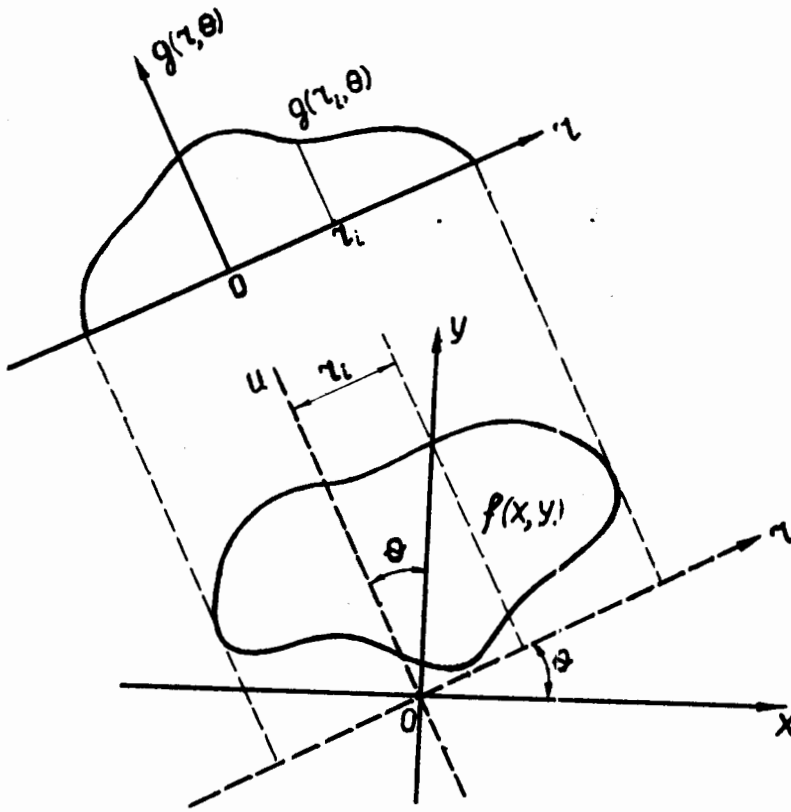


Рис. I.

Схема измерения одной из проекций сечения объекта в реконструктивной томографии с параллельными лучами:
 - неподвижная система координат, τ, u - естественная система координат, определяемая направлением данной проекции, просвечивающие лучи в которой образуют с осью Oy угол θ .

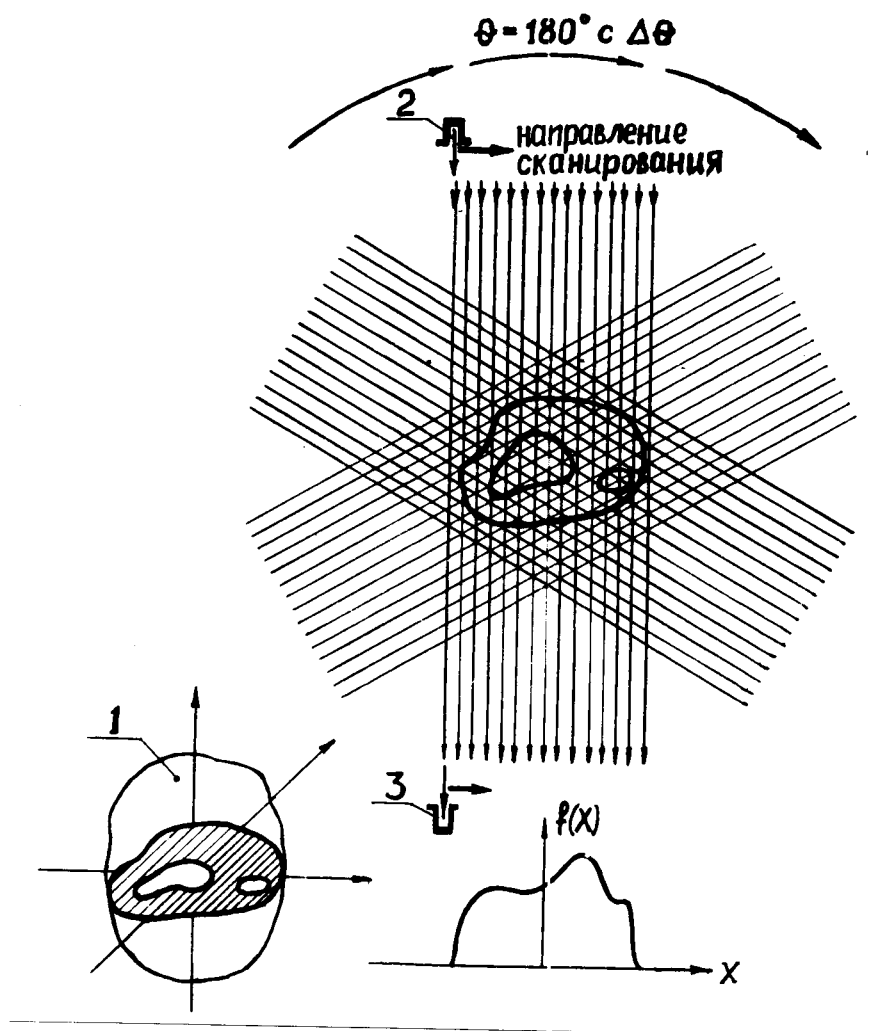


Рис. 2.

Схема формирования проекций сечения объекта с конечным числом отсчетов и конечным числом проекций.

1 - исследуемый объект, 2 - источник излучения, 3 - детектор излучения.

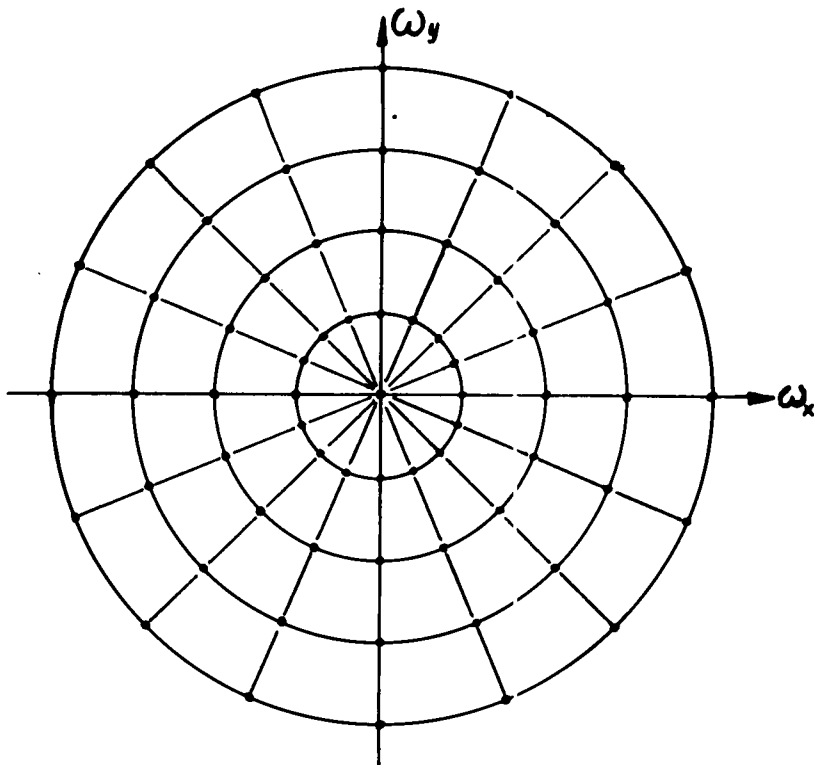


Рис. 3.

Регулярная полярная сетка, в узлах которой заданы компоненты Фурье-образа искомой томограммы. Значения компонент получены по совокупности измеренных проекций.

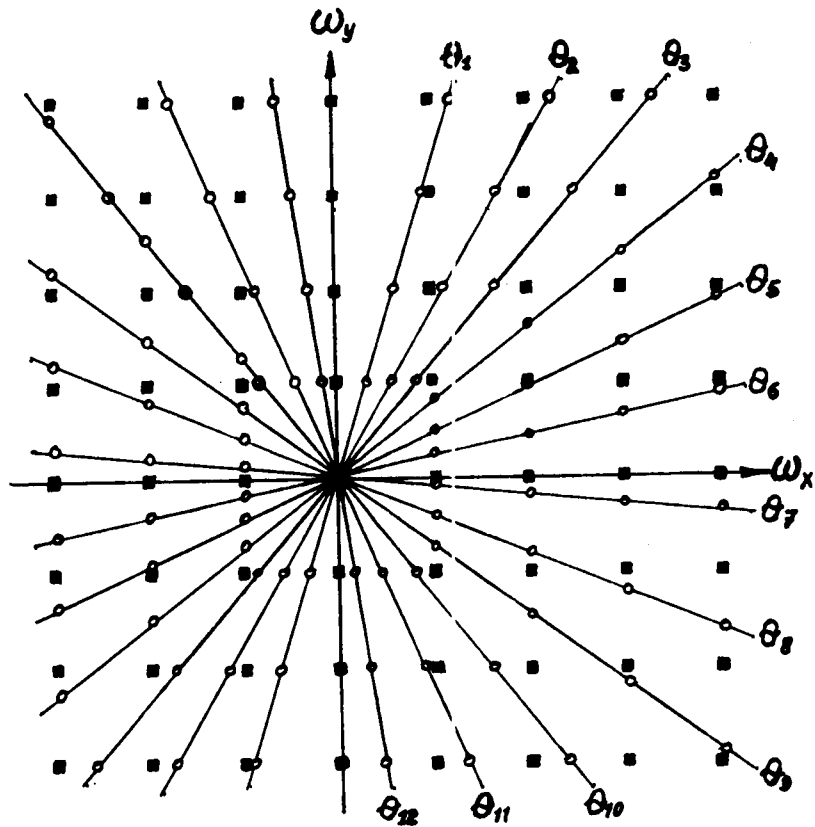


Рис.4.

Сетка из концентрических квадратов, которая была использована в Фурье-алгоритме восстановления томограммы: ■ - узлы на сетке из концентрических квадратов, в которых заданы отсчеты Фурье-образа, ○ - узлы, в которых заданы отсчеты Фурье-образа, полученные по проекциям.

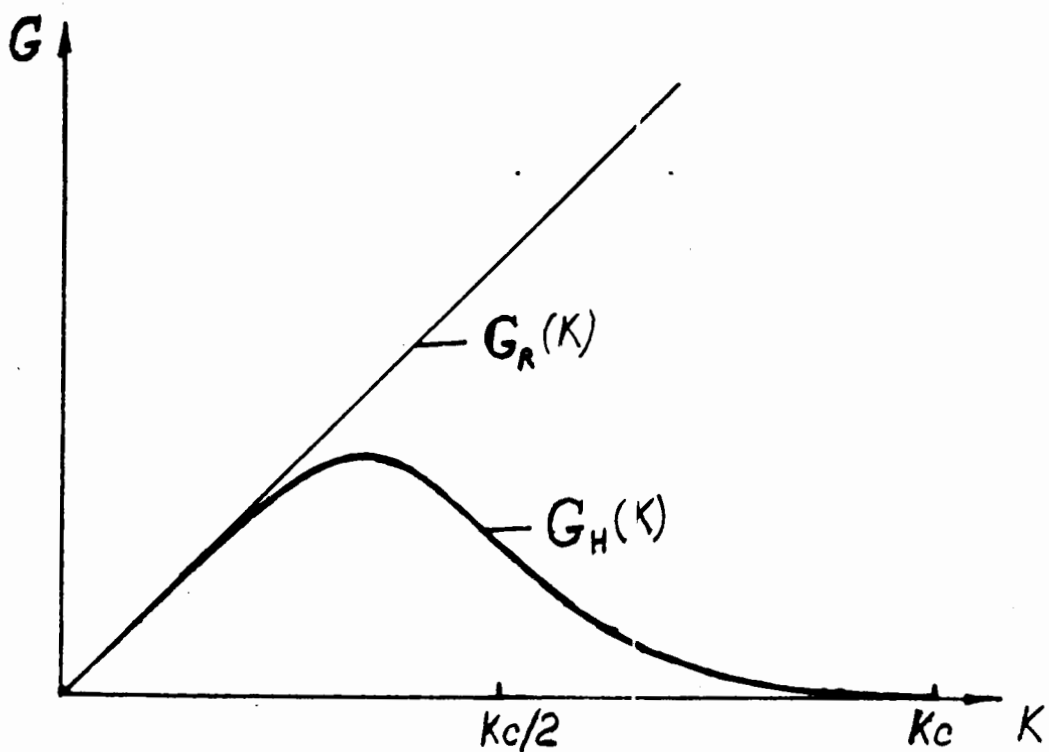


Рис.5.

Вид корректирующих фильтров $G_R(k)$ и $G_H(k)$, заданных выражениями (27) и (28), соответственно. Эти фильтры были использованы в фурье-алгоритме в данной работе. По оси абсцисс отложен номер отсчета.

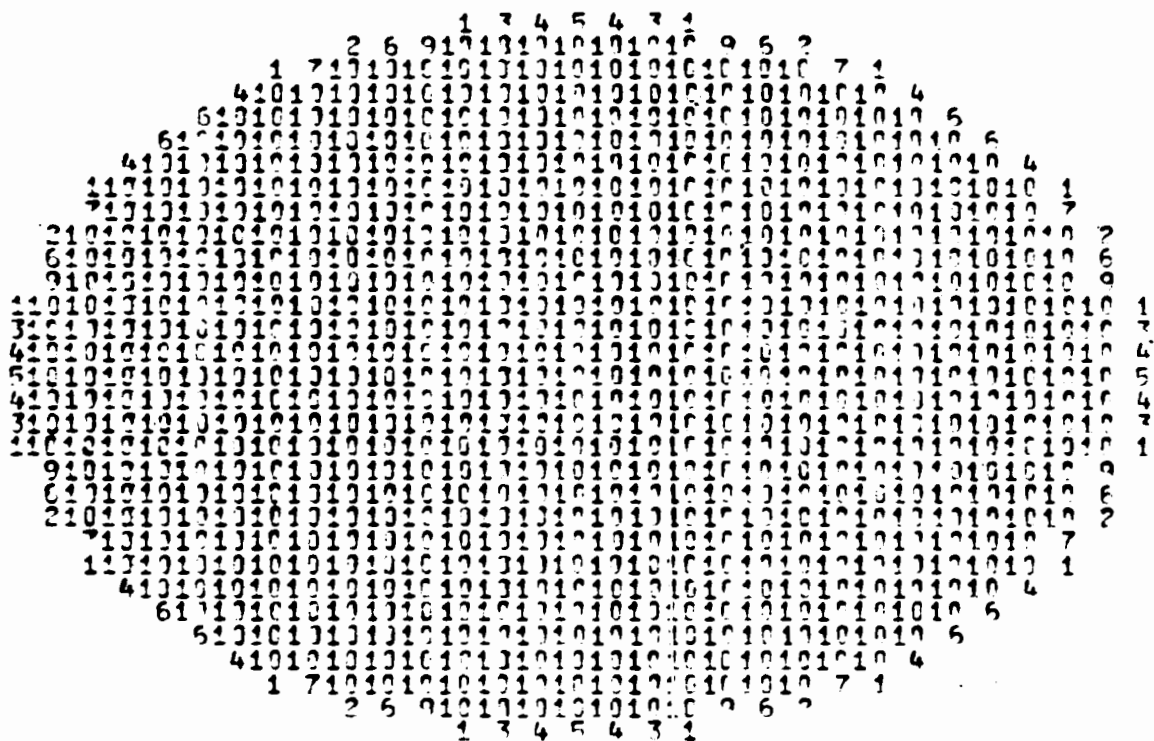


Рис.66.

Томограмма цилиндра, полученная при помощи корректирующего фильтра вида (28).

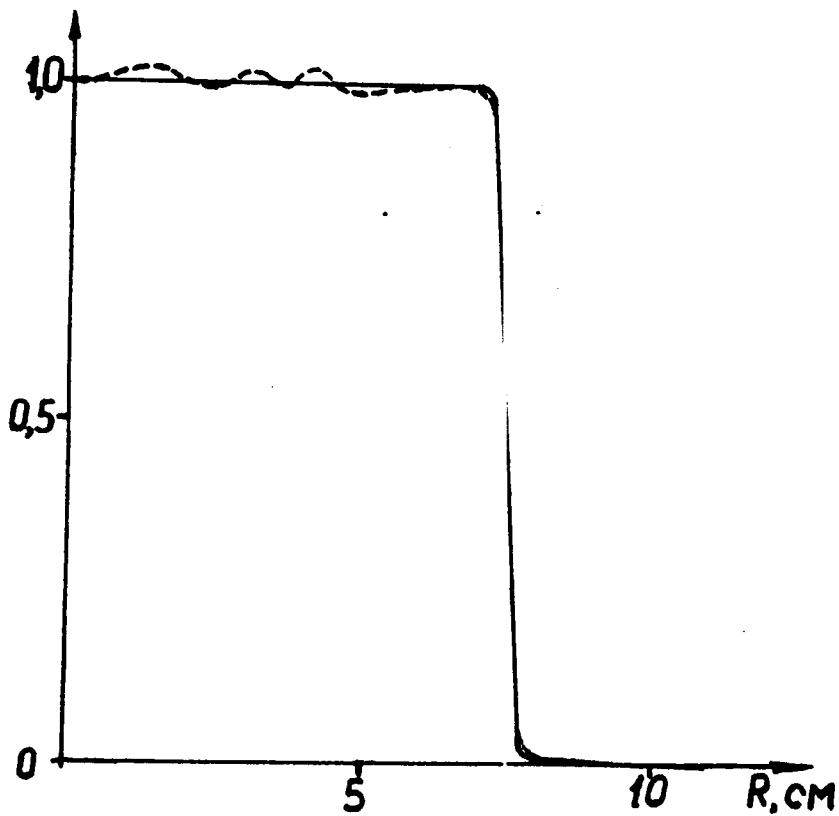


Рис.7.

Радиальное распределение плотности вещества в сечении цилиндра: пунктирная кривая - корректирующий фильтр вида (27), сплошная - корректирующий фильтр вида (28).

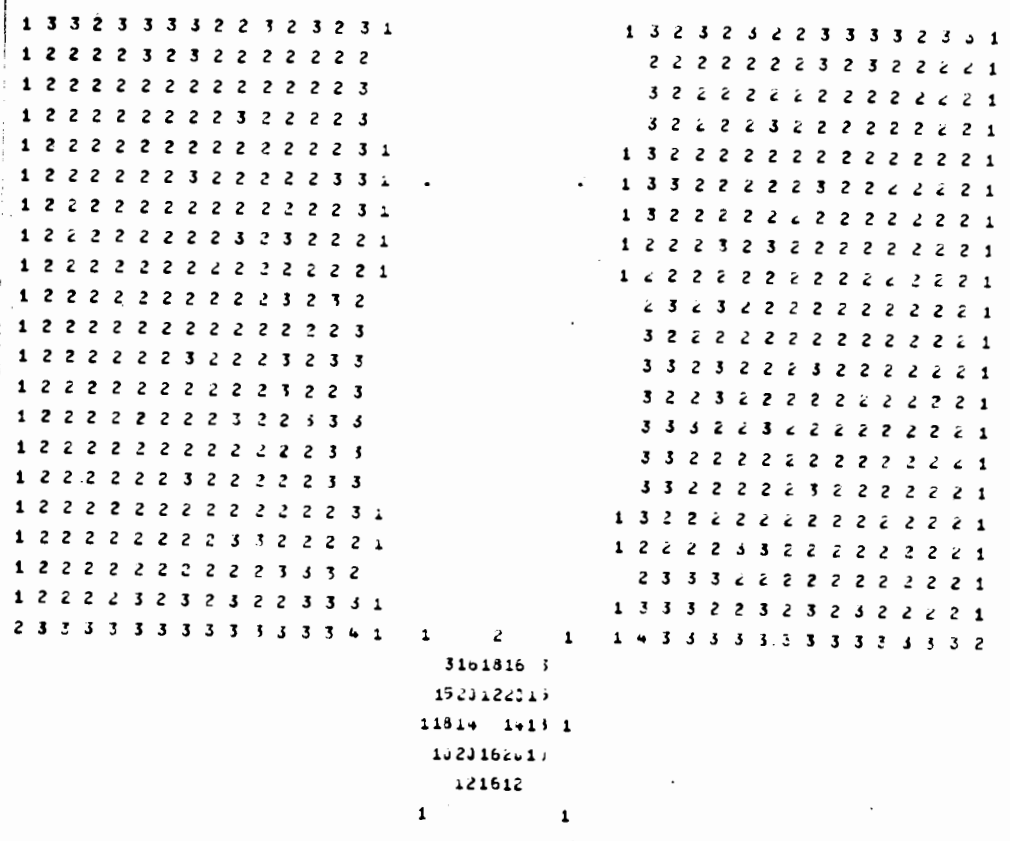


Рис.9а.

Томограмма медицинского фантома, восстановленная при помощи корректирующего фильтра (27). Число проекций - 64, число отсчетов в каждой проекции - 64.

1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 3 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 2 3 3 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 2 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 3 3 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 3 3 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 3 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 1	1 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1

214161, 2
 1413151114
 11715 1:17 1
 1413151114
 214161, 2
 1

Рис.9в.

Томограмма медицинского фантома, восстановленная при помощи корректирующего фильтра (28). Число проекций - 128, число отсчетов в каждой проекции - 128.