

Виноградов В. В. и др.

Б-403

+

Б-403

Б1-10-4266,

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория ядерных проблем,
Лаборатория вычислительной техники
и автоматизации

Б1-10-4266

В.Б.Виноградов, В.С.Курбатов, Г.Н.Тентюкова

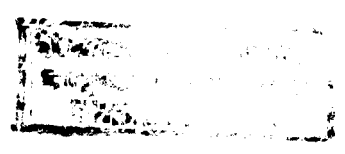
с.ф. 2373

О Б З О Р

геометрических программ,
используемых для обработки событий
пузырьковых камер

14 января 69

Дубна, 1969 год



ВВЕДЕНИЕ

Под геометрической программой понимается часть системы обработки событий, полученных на пузырьковых камерах, которая, используя координаты треков и реперных крестов на стереопроекциях, вычисляет параметры трека (импульс и углы) с матрицей ошибок и координаты точек взаимодействия.

Геометрическая программа существенно разделяется на две части:

- а) восстановление пространственных координат трека;
- б) проведение аппроксимирующей кривой через траекторию трека.

Определим системы координат:

m - система - система координат измерительного прибора.

f - система - система координат на пленке, начало которой находится в точке пересечения оптической оси соответствующего объектива с плоскостью пленки (главная точка снимка), а оси X и Y направлены антипараллельно системе координат камеры^{ж)}.

S - система - система координат, привязанная к камере; плоскость X_s, Y_s совпадает с обратной (по отношению к объективу) стороной верхнего стекла, ось Z_s направлена внутрь камеры, ось Y_s обычно направлена вдоль пучка первичных частиц.

st - система двух объективов (стереосистема), частный случай

S - системы, начало координат которой совпадает с пересечением оптической оси одного из объективов с плоскостью X_s, Y_s , а ось X_s направлена в точку пересечения оптической оси другого объектива с той же плоскостью^{жж)}

=====
ж) В геометрической программе ЦЕРНа "THRESH" f - система определяется иначе (см. стр. 51).

жж) В программе PANG st - система определяется иначе (см. стр. 67)

Восстановление пространственных координат заключается в переходах:

$$\begin{array}{l} m_i \longrightarrow f_i \\ m_k \longrightarrow f_k \end{array} \longrightarrow St_{ik} \longrightarrow S$$

где i, k - номера проекций.

Переход от m -системы к f -системе производится при помощи линейного преобразования, учитывающего поворот, сдвиг и растяжение. Для нахождения коэффициентов этого преобразования необходимы реперные метки, находящиеся или в рабочем объеме камеры или на прижимных стеклах фотоаппаратов.

Форма траектории трека, а следовательно и вид аппроксимирующей кривой, определяются природой частицы, рабочей жидкостью и распределением магнитного поля.

Если пренебречь эффектами многократного рассеяния и тормозного излучения, то форму траектории можно найти из уравнения движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}] + \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \frac{d|\vec{p}|}{dt} \quad (I)$$

где \vec{p} - импульс,
 \vec{V} - скорость частицы,
 e - заряд частицы,
 c - скорость света,
 \vec{H} - магнитное поле.

В случае однородности магнитного поля ($\vec{H} = const$) и отсутствия потерь энергии на ионизацию ($\frac{d|\vec{p}|}{dt} = 0$) решением уравнения (I) является винтовая линия.

Кинематическими параметрами трека в точке взаимодействия являются:

p - импульс частицы,

- φ (азимутальный угол) – угол, образуемый касательной к проекции трека на плоскости $X_g Y_g$ с положительным направлением оси X_g
- λ (угол наклона) – угол, образуемый касательной к треку с плоскостью $X_g Y_g$.

Типичная блок-схема геометрической программы показана на рис. I.

В данном обзоре мы не касаемся следующих вопросов:

- 1) обработки снимков, полученных на пузырьковых камерах без магнитного поля;
- 2) порядка расположения и характера входной информации;
- 3) определения констант геометрической программы (параметры оптической системы и др.).

Данный обзор состоит из трех глав:

1. Геометрические программы, используемые в ОИЯИ и ИТЭФ ГК ИАЗ.

2. Геометрические программы для водородных камер, используемые в радиационной Лаборатории им. Лоуренса (Беркли, США), ЦЕРНа и Резерфордской лаборатории (Англия).

3. Геометрические программы для камер с тяжелой жидкостью.

Первая глава написана Г.Н.Тентюковой,

вторая глава написана В.С.Курбатовым,

третья глава написана В.Б.Виноградовым.

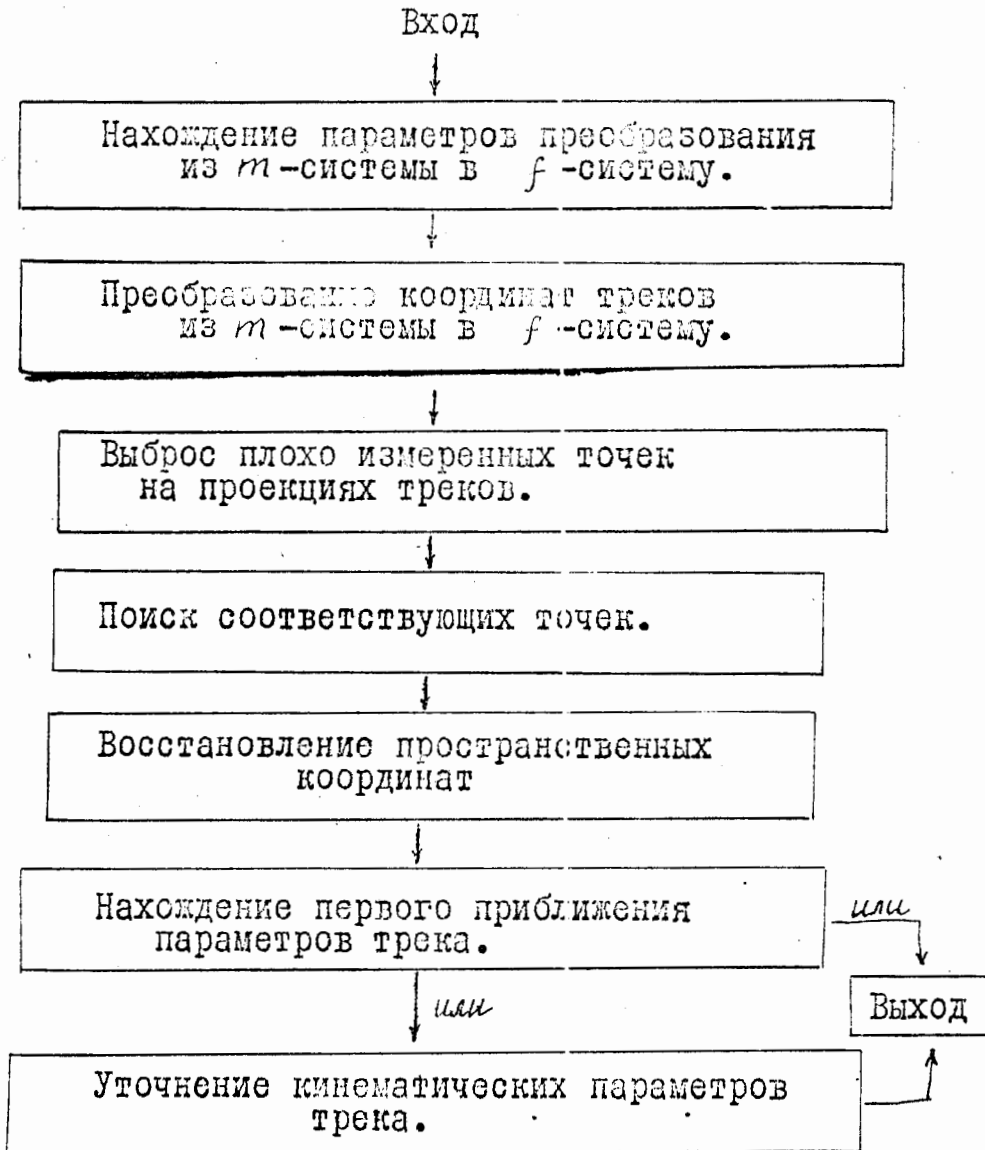


Рис. 1.

Глава I.

Геометрические программы, используемые в ОИЯИ и ИТЭФ.

Содержание:

- § 1. Переход из m - системы в f - систему.
- § 2. Программы проверки гладкости трека и выброса "плохих" точек.
- § 3. Восстановление пространственных координат точек треков.
- § 4. Проведение винтовой линии.
- § 5. Определение параметров частицы по пространственным координатам точек.
- § 6. Определение параметров частицы по координатам на плоскостях снимков.

§ I. Переход из m - системы в f - систему.

Введем следующие обозначения:

$\{\vec{P}'_i\}$ - положение измеренных крестов в m - системе
 $\{\vec{P}_i\}$ - известное положение тех же крестов в f - системе
("эталонные" кресты).

$\vec{\lambda}$ - вектор усадки пленки.

\vec{t}_0 - вектор параллельного переноса.

φ_0 - угол поворота.

P_i - веса крестов.

$\{X_f, Y_f\}$ - координаты точки в f - системе.

$\{X_m, Y_m\}$ - координаты точки в m - системе.

$i=1, \dots, N$, где N - число крестов.

В работе [1] для перехода из m - системы в f - систему находятся параметры $\varphi_0, \vec{\lambda}, \vec{t}_0$ следующего преобразования:

$$\lambda_x P_x = (P'_x + t_{0x}) \cos \varphi - (P'_y + t_{0y}) \sin \varphi$$

$$\lambda_y P_y = (P'_x + t_{0x}) \sin \varphi + (P'_y + t_{0y}) \cos \varphi.$$

Искомые параметры подбираются из условия минимизации функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^N P_i \left(\left\{ \lambda_x P_x - [(P'_x + t_{0x}) \cos \varphi - (P'_y + t_{0y}) \sin \varphi] \right\}^2 + \right. \\ \left. + \left\{ \lambda_y P_y - [(P'_x + t_{0x}) \sin \varphi + (P'_y + t_{0y}) \cos \varphi] \right\}^2 \right),$$

которое приводит к системе нелинейных уравнений, решение которой дается в виде следующих формул:

$$\vec{F}_0 = \vec{S} - \vec{S}'$$

$$\lambda_x = -\frac{1}{C_x} (A_x \sin \varphi_0 + B \cos \varphi_0)$$

$$\lambda_y = -\frac{1}{C_y} (A_y \sin \varphi_0 + B_y \cos \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \Psi \right),$$

где

$$\Psi = \begin{cases} \arcsin \frac{F'}{\sqrt{F'^2 + G^2}} & G \geq 0 \\ \pi - \arcsin \frac{F'}{\sqrt{F'^2 + G^2}} & G < 0 \end{cases}$$

$$F' = \frac{1}{2} \left(\frac{A_x^2 - B_x^2}{C_x} + \frac{A_y^2 - B_y^2}{C_y} \right)$$

$$G = - \left(\frac{A_x B_x}{C_x} + \frac{A_y B_y}{C_y} \right)$$

$$C_x = \sum_{i=1}^N P_i R_{ix}^2$$

$$C_y = \sum_{i=1}^N P_i R_{iy}^2$$

$$A_x = \sum_{i=1}^N P_i R_{ix} R_{iy}' , \quad A_y = - \sum_{i=1}^N P_i R_{iy} R_{ix}'$$

$$B_x = - \sum_{i=1}^N P_i R_{ix} R_{ix}' , \quad B_y = - \sum_{i=1}^N P_i R_{iy} R_{iy}'$$

$$\vec{R}_i' = \vec{P}_i' - \vec{S}'$$

$$\vec{R}_i = \vec{P}_i - \vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \vec{P}_i}{\sum_{i=1}^N P_i}$$

$$\vec{S}' = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \vec{P}_i'}{\sum_{i=1}^N P_i}$$

Программа, реализующая описанный алгоритм, написанная для М-20 в виде стандартного блока в системе ИС, использована в программах для метровой пропановой, метровой водородной и двухметровой пропановой камер ОИЯИ.

Используя полученные параметры, геометрические программы производят преобразование координат в f - систему по формулам

$$X_f = S_x + \lambda'_x [\cos \varphi (x_m - S'_x) - \sin \varphi (y_m - S'_y)]$$

$$Y_f = S_y + \lambda'_y [\sin \varphi (x_m - S'_x) + \cos \varphi (y_m - S'_y)]$$

В [2] задача перехода в f - систему решается аналогично. Система уравнений, которая дает набор параметров, минимизирующих Φ , решается итерационным путем.

В первом варианте геометрической программы для метровой пропановой камеры [9] параметры перехода из m - системы в f - систему определяются по трем измеренным крестам, а сам переход производится по формулам:

$$X_f = [(x_s - P'_{1x}) \cos \varphi + (y_s - P'_{1y}) \sin \varphi + \Delta x] \varepsilon_x$$

$$Y_f = \{ \kappa [-(x_s - P'_{1x}) \sin \varphi + (y_s - P'_{1y}) \cos \varphi + \Delta y] \} \varepsilon_y,$$

где

$$\varepsilon_x^2 = \frac{(P_{2x} - P'_{1x})^2 + (P_{2y} - P'_{1y})^2}{(P'_{2x} - P'_{1x})^2 + (P'_{2y} - P'_{1y})^2}, \quad \varepsilon_y^2 = \frac{(P_{3x} - P'_{1x})^2 + (P_{3y} - P'_{1y})^2}{(P'_{3x} - P'_{1x})^2 + (P'_{3y} - P'_{1y})^2}$$

$$\kappa = \frac{P'_{2x} - P'_{1x}}{|P'_{2x} - P'_{1x}|};$$

$$\sin \varphi = \frac{P'_{2y} - P'_{1y}}{\sqrt{(P'_{2x} - P'_{1x})^2 + (P'_{2y} - P'_{1y})^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{P'_{2x} - P'_{1x}}{\sqrt{(P'_{2x} - P'_{1x})^2 + (P'_{2y} - P'_{1y})^2}}$$

$\Delta x, \Delta y$ - координаты главной точки снимка в системе крестов с начало в точке $\{\vec{P}_1\}$.

В работе [3] преобразование координат определяется в виде

$$P_x = a P_x' - b P_y' + t_{0x}$$

$$P_y = b P_x' + a P_y' + t_{0y},$$

т.е. предполагается изотропная усадка пленки.

Коэффициенты преобразования находятся при минимизации функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [P_{ix} (a P_{ix}' - b P_{iy}' + t_{0x} - P_{ix})^2 + P_{iy} (b P_{ix}' + a P_{iy}' + t_{0y} - P_{iy})^2].$$

Затем определяется средний для всех снимков коэффициент подобия

σ_{cp} , характеризующий усадку пленки,

$$\sigma_{cp} = \frac{\sum_{j=1}^K \sigma_j}{K}, \quad K - \text{число снимков},$$

$$\sigma_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

и находятся, используя метод наименьших квадратов, параметры φ_0 и \vec{t}_0 следующего преобразования:

$$P_x = \sigma_{cp} (P_x' \cos \varphi - P_y' \sin \varphi) + \vec{t}_{0x}$$

$$P_y = \sigma_{cp} (P_x' \sin \varphi + P_y' \cos \varphi) + \vec{t}_{0y}$$

ПРОГРАММЫ ПРОВЕРКИ ГЛАДКОСТИ ТРЕКА И ВЫБРОСА "ПЛОХИХ" ТОЧЕК

Гладкость трека проверяется, как правило, по гладкости его проекций либо на плоскости снимков, либо на плоскости в пространстве камеры.

Проекция трека аппроксимируется некоторой кривой. Если максимальное расстояние точек трека от этой кривой больше заданного эталона, то происходит выброс "плохих" точек или всего трека.

В зависимости от характера исследуемых треков применяются разные программы выброса, которые отличаются в основном видом кривой, аппроксимирующей проекцию трека, и способами определения "плохих" точек.

I. Программа выброса с аппроксимацией проекции трека окружностью [3].

В качестве аппроксимирующей кривой берется окружность и проверяется, что максимальное расстояние измеренных на плоскости снимка точек от окружности меньше заданного эталона. Если больше, то определяется точка с номером "к", после выброса которой максимальное из расстояний от оставшихся точек до проведенной по ним окружности $d_{k \max}$ минимально среди множества чисел $\{d_i \max\}$

Если $d_{k \max}$ не больше заданного эталона, то эта точка выбрасывается, а все остальные считаются доброкачественными.

Если $d_{k \max}$ больше эталона, то снимок бракуется.

Основными недостатками этого метода являются его неуниверсальность (длинный трек частицы с малой скоростью из-за торможения заметно отличается от окружности) и большое время, которое тратит программа на проведение окружности для каждой точки.

2. Программа выброса по кривой четвертого порядка [45] .

Точки проекции трека на плоскость снимка преобразуются в систему координат трека, где ось x параллельна прямой, проведенной методом наименьших квадратов по точкам трека, а начало координат в центре тяжести трека: $x_0 = \frac{\sum x_i}{n}$, $y_0 = \frac{\sum y_i}{n}$ (n - число точек). Если есть "изолированная" точка, т.е. точка, расстояние до которой от центра тяжести трека в " m " раз больше, чем среднее расстояние до остальных точек, то она выбрасывается, а по оставшимся проводится методом наименьших квадратов кривая 4-го порядка

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^4 a_i P_i(x), \text{ где } P_i(x) = x^i \text{ или полиномы Лежандра.}$$

Если $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - f(x_i))^2}{n-5}}$ больше заданного эталона, то выбрасывается точка с номером j , для которой $|y_j - f(x_j)| = \max |y_i - f(x_i)|$, и для оставшихся точек процедура повторяется, пока σ не станет меньше эталона.

Если после очередного выброса останется 5 точек, то программа бракует весь трек.

Для тех случаев, когда трудно описать всю проекцию трека кривой 4-го порядка (например, для закручивающейся спирали), трек разбивается на части и описанным выше способом производится выброс на каждом куске.

Недостатком этой программы является то, что при неравномерном измерении точек на треке точка, наиболее отдаленная от других может быть воспринята программой как "изолированная" и быть выброшенной.

3. Программа выброса по кривой m -го порядка [6] .

Проекция трека разбивается на группы по n точек с перекрытием групп. Случай $n = N$ (N - число точек в треке) также допускается.

Выброс производится отдельно в каждой группе. Делается преобразование координат из заданной системы в систему рассматриваемого отрезка трека, которая определяется следующим образом. Берутся 2 тройки точек в начале и конце трека. В каждой тройке считаются расстояния между точками и выбираются по 2 точки, расстояние между которыми наименьшее в своей тройке. Из оставшихся четырех точек берутся 2: с наименьшим номером из первой тройки и с наибольшим из второй. Через них проводится прямая, определяющая ось x новой системы.

Для того, чтобы избежать влияния точек, при измерении которых были допущены грубые ошибки, исключаются временно из рассмотрения так называемые "изолированные" точки M_k , для которых

$$K_1 \bar{\rho}_{cp}^2 \leq \rho_{M_k}^2$$
$$K_1 - const$$

где

$\bar{\rho}_{cp}$ - среднее расстояние между точками,

ρ_{M_k} - минимальное из расстояний от точки M_k до всех остальных точек множества.

Для оставшихся n_1 точек делается новое преобразование, сдвигая начало координат по оси x на величину $\Delta x = \frac{x_1 + x_{n_1}}{2}$, где x_1 и x_{n_1} -ые координаты точек.

В полученной системе координат по всем n_1 точкам отрезка проводится кривая порядка m , методом наименьших квадратов и выбрасываются из дальнейшего рассмотрения те точки, для которых

$$\delta_i^2 = (y_i - y_i^{(m)})^2 > K_2 \bar{\rho}_{cp}^2,$$
$$K_2 - const$$

где

($y_i^{(m)}$ - значение проведенной кривой в точке x_i). Этой проверке подвергаются все точки рассматриваемой группы, включая "изолированные".

Порядок кривой (m_1) определяется из условия

$$m_1 = \max \{ \min [m, n_i - 2], 1 \} \quad (*)$$

где m - заданный порядок кривой

n_i - число точек, по которым проводится кривая.

Оставшиеся n_2 точек подвергаются дальнейшей обработке.

Делается преобразование координат в систему, где осью x является прямая, проведенная через крайние точки оставшегося множества, а начало координат сдвинуто по оси x на величину среднего арифметического X -овых координат крайних точек.

В этой системе производится "сглаживание" отрезка трека.

Методом наименьших квадратов по n_2 точкам проводится кривая порядка m_2 : $y(x) = \sum_{\alpha=0}^{m_2} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x)$, где m_2 определяется аналогично m_1 , а в качестве линейно-независимых функций

$\varphi_{\alpha}(x)$ берется система ортогональных полиномов Чебышева.

Обозначим

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_2} [y_i - \sum_{\alpha} c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x_i)]^2}{n_2 - (m_2 + 1)}} = \sqrt{\frac{\Phi_1}{n_2 - (m_2 + 1)}}$$

$$\delta_j^2 = \max_i (y_i - y(x_i))^{(m_2)} = y_j - y(x_j)^{(m_2)}$$

Если неравенство $4\sigma^2 - \delta_j^2 \geq 0$ не выполнено, то точка с номером j выбрасывается, после чего снова определяется порядок кривой по формуле (*) и повторяется процесс проведения кривой через $n_3 = n_2 - 1$ точек и дальнейший выброс до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$4\sigma^2 - \delta_j^2 \geq 0$$

Описанная процедура повторяется для каждой части трека.

В процессе обработки всего трека определяется величина

$$\sigma_{\text{внб}}^2 = \frac{\sum_e \varphi_e}{\sum_e [n_q - (m_q + 1)]e}, \quad \text{где } e - \text{индекс}$$

группы. Эта величина сравнивается с дисперсией σ_3^2 . Точки трека считаются хорошо измеренными, если $\sigma_3^2 > \sigma_{\text{внб}}^2$.

В противном случае измерение бракуется.

Эта программа выброса довольно универсальная, но ее недостатком является громоздкость (длина программы в кодах машины "М-20" 1654 ячейки).

§ 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ТРЕКОВ

Рассмотрим случай, когда оптические оси объективов параллельны друг другу и все поверхности раздела сред перпендикулярны оптическим осям.

Для восстановления пространственных координат во всех рассматриваемых в этой главе работах используются измерения на двух стереопроекциях.

Если измеренные на разных снимках точки являются проекциями одной и той же пространственной точки, то такие точки будем называть соответствующими.

Поскольку при измерениях координат трека на разных стереопроекциях измеряются, вообще говоря, координаты несоответствующих точек, то возникает вопрос о поиске соответствующих точек.

- а) Проведение луча в камеру из точки на плоскости снимка через соответствующий объектив

Возьмем для определенности системы координат, изображенные на рис. I-2. Запишем соотношения, связывающие координаты (X, Y, Z) в S - системе пространственной точки $M(X, Y, Z)$ с ее координатами X_p, Y_p в f - системе на снимке с номером p (см. рис. I-1 и I-3).

$$x_p = \frac{x - B_p}{Z K_{1p} \Psi_{1p} + K_p \Psi_p} \quad (I.3.1)$$

$$y_p = \frac{Y - C_p}{Z K_{1p} \Psi_{1p} + K_p \Psi_p}$$

Здесь (B_p, C_p) - координаты в S - системе точек пересечения оптических осей с плоскостью $Z=0$.

$$\begin{aligned} K_{1p} \Psi_{1p} &= \frac{tg \gamma_p}{z_p}, \\ K_p \Psi_p &= \frac{R_p}{z_p}, \end{aligned} \quad (I.3.2)$$

z_p - величина радиуса-вектора точки в f - системе
 R_p - расстояние между точками пересечения плоскости $Z=0$ с оптической осью и линией проектирования точки $M(x, y, z)$.
 γ_p - угол, образуемый линией проектирования в камере точки с оптической осью.

(Соотношения (I.3.1) легко получаются из подобия треугольников

(см. рис. I-3) $\frac{x_p}{z_p} = \frac{x - B_p}{R_p}$, а $\bar{R}_p = R_p + z \cdot tg \gamma$

(см. рис. I-1) $x_p = \frac{x - B_p}{\frac{R_p}{z_p} + z \frac{tg \gamma}{z_p}} = \frac{x - B_p}{K_{1p} \Psi_{1p} z + K_p \Psi_p}$).

Функции $K\Psi$ и $K_1\Psi_1$ могут быть заданы в виде разложения в ряд по z^2 с экспериментально определенными коэффициентами [7] или в виде произвольных функций от z , которые могут быть получены из какой-либо модели оптической системы.

Например, в работе [8]

$$K_p \Psi_p = \frac{\sin \beta_p(z_p)}{z_p} \frac{1}{\sqrt{n_{1p}^2 - \sin^2 \beta_p(z_p)}}$$

$$K_{1p} \Psi_{1p} = \frac{1}{z_p} \left\{ h_{op}(z_p) \cdot tg \beta_p(z_p) + h_1 \frac{\sin \beta_p(z_p)}{\sqrt{n_{1p}^2 - \sin^2 \beta_p(z_p)}} + h_2 \frac{\sin \beta_p(z_p)}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \beta_p(z_p)}} \right\}$$

где

h_1 - суммарная толщина стекла, через которое производится фотографирование,

h_2 - толщина воды,

$h_{op}(z_p)$ - расстояние между передней узловой точкой объектива и защитным стеклом камеры,

$n_{ст}, n_{в}, n$ - показатели преломления стекла, воды и пропана,
 $\beta_p(z_p)$ - угол между оптической осью объектива и лучом из пространственной точки.

$\beta_p(z_p)$ и $d_{op}(z_p)$ являются функциями от z и от номера объектива.

В работе [3] рассматривается прохождение луча через все среды. При определении угла, образованного оптической осью и направлением луча, выходящего из точки на плоскости снимка, возникает нелинейная задача.

Пусть между объективом и пленкой расположено "к" сред, а между объективом и рабочей жидкостью "л" сред. Обозначим

β_1 - искомый угол, h_i - толщины сред, n_i - показатели преломления, β_i - углы входе луча в i -тую среду.

Тогда

$$z_p = h_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + h_2 \operatorname{tg} \beta_2 + \dots + h_k \operatorname{tg} \beta_k =$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{h_i \frac{n_i}{n_1} \sin \beta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_1} \sin \beta_1\right)^2}}$$

Рассмотрим функцию $f(\alpha) = z_p - \sum_{i=1}^k \frac{h_i \frac{n_i}{n_1} \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_1} \alpha\right)^2}}$,

где $\alpha = \sin \beta_1$.

Уравнение $f(\alpha) = 0$ может быть решено методом Ньютона, полагая в качестве начального приближения

$$\alpha^0 = \frac{z_p}{\sqrt{z_p^2 + \left(\sum_{i=1}^k h_i \frac{n_i}{n_1}\right)^2}}$$

(в законе преломления \sin угла преломления заменен на tg).

Обозначим через β - угол, под которым луч выходит из объектива

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \frac{n_1}{n_k}$$

Проследив дальше ход луча через " l " сред между объективом и рабочей жидкостью, найдем, что

$$\sin \gamma_p = \sin \beta \frac{n_{\text{средн. камеры}}}{n_{c+1}}$$

$$R_p = \sum_{i=1}^c \frac{\sin \beta \cdot n_{k+i} \frac{n_{k+i}}{n_{k+c}}}{\sqrt{1 - \left(\sin \beta \frac{n_{k+i}}{n_{k+c}} \right)^2}}$$

б) Определение пространственных координат по соответствующим точкам

Для простоты рассмотрим случай, когда ось X системы координат камеры параллельна линии, соединяющей основания оптических осей для объективов с номерами p и q (линии базы)*/.

Для определения пространственных координат (X, Y, Z) точки по ее координатам (X_p, Y_p) , (X_q, Y_q) в S_f - системе для объективов с номерами p и q мы имеем 4 уравнения:

=====
*/ Общий случай не параллельности оси X линии базы легко приводится к рассматриваемому поворотом исходных систем на угол φ , где

$$\sin \varphi = \frac{C_q - C_p}{\sqrt{(C_q - C_p)^2 + (B_q - B_p)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{B_q - B_p}{\sqrt{(C_q - C_p)^2 + (B_q - B_p)^2}}$$

и после вычисления пространственных координат обратным поворотом.

$$x_p = \frac{X - B_p}{Z K_{1p} \Psi_{10} + K_p \Psi_p}$$

$$y_p = \frac{Y - C}{Z K_{1p} \Psi_{1p} + K_p \Psi_p}$$

$$x_q = \frac{X - B_q}{Z K_{1q} \Psi_{1q} + K_q \Psi_q}$$

$$y_q = \frac{Y - C}{Z K_{1q} \Psi_{1q} + K_q \Psi_q}$$

Предлагаются разные способы решения этих уравнений [7,8,9]
Рассмотрим способ решения, описанный в [7].

Для того, чтобы максимально использовать всю информацию об измеренных величинах, применим метод максимума правдоподобия. Предполагая, что ошибки величин x_p, y_p, x_q, y_q распределены по нормальному закону, получим оценки для X, Y, Z из условий минимума функции

$$\chi^2 = \left(x_p - \frac{X - B_p}{Z K_{1p} \Psi_{1p} + K_p \Psi_p}\right)^2 + \left(x_q - \frac{X - B_q}{Z K_{1q} \Psi_{1q} + K_q \Psi_q}\right)^2 + \\ + \left(y_p - \frac{Y - C}{Z K_{1p} \Psi_{1p} + K_p \Psi_p}\right)^2 + \left(y_q - \frac{Y - C}{Z K_{1q} \Psi_{1q} + K_q \Psi_q}\right)^2.$$

Уравнениями для определения X, Y, Z будут

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial Z} = 0$$

После дифференцирования:

$$\left[x_p - \frac{X - B_p}{A_p}\right] \frac{1}{A_p} + \left[x_q - \frac{X - B_q}{A_q}\right] \frac{1}{A_q} = 0$$

$$\left[y_p - \frac{Y - C}{A_p}\right] \frac{1}{A_p} + \left[y_q - \frac{Y - C}{A_q}\right] \frac{1}{A_q} = 0$$

$$\left[\left(x_p - \frac{X - B_p}{A_p}\right)(X - B_p)\right] \frac{K_{1p} \Psi_{1p}}{A_p^2} + \left[\left(x_q - \frac{X - B_q}{A_q}\right)(X - B_q)\right] \frac{K_{1q} \Psi_{1q}}{A_q^2} + \\ + \left[\left(y_p - \frac{Y - C}{A_p}\right)(Y - C)\right] \frac{K_{1p} \Psi_{1p}}{A_p^2} + \left[\left(y_q - \frac{Y - C}{A_q}\right)(Y - C)\right] \frac{K_{1q} \Psi_{1q}}{A_q^2} = 0$$

Здесь

$$A_p = \tilde{Z}_{k,p} \Psi_{1p} + K_p \Psi_p$$

$$A_q = \tilde{Z}_{k,q} \Psi_{1q} + K_q \Psi_q$$

Полученная система уравнений нелинейна относительно X, Y, \tilde{z} и найти ее решение довольно трудно.

Но эту систему можно упростить, предположив близость объектов по их оптическим характеристикам, т.е. считая, что

$$K_{1p} \Psi_{1p} \sim K_{1q} \Psi_{1q}, \quad K_p \Psi_p \sim K_q \Psi_q$$

Пренебрегая множителями при квадратных скобках, получим

$$\left(X_p - \frac{X - B_p}{A_p} \right) + \left(X_q - \frac{X - B_q}{A_q} \right) = 0$$

$$\left(Y_p - \frac{Y - C}{A_p} \right) + \left(Y_q - \frac{Y - C}{A_q} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(X_p - \frac{X - B_p}{A_p} \right) (X - B_p) + \left(X_q - \frac{X - B_q}{A_q} \right) (X - B_q) + \\ & + \left[\left(Y_p - \frac{Y - C}{A_p} \right) + \left(Y_q - \frac{Y - C}{A_q} \right) \right] (Y - C) = 0 \end{aligned} \quad (I.3.4)$$

Система (I.3.4) эквивалентна следующей:

$$X_p - \frac{X - B_p}{A_p} = 0$$

$$X_q - \frac{X - B_q}{A_q} = 0$$

$$\left(Y_p - \frac{Y - C}{A_p} \right) + \left(Y_q - \frac{Y - C}{A_q} \right) = 0$$

Из I-го и 2-го уравнений имеем

$$\tilde{z} = \frac{B_p - B_q - (X_p K_p \Psi_p - X_q K_q \Psi_q)}{X_p K_{1p} \Psi_{1p} - X_q K_{1q} \Psi_{1q}}$$

$$X = X \tilde{z}_p K_{1p} \Psi_{1p} + X_p K_p \Psi_p + B_p$$

(I.3.5)

Из 3-го уравнения

$$Y = \frac{y_p + y_q}{\frac{1}{A_p} + \frac{1}{A_q}} + C$$

Полученное решение системы является одним из частных решений системы (I.3.3), и это решение достаточно близко к оптимальному решению, даваемому методом наименьших квадратов.

в) Определение пространственных координат для несоответствующих точек.

Возьмем в качестве основного снимок с номером p . Для каждой точки этого снимка (X_p, Y_p) будем искать соответствующую ей точку на снимке с номером q .

Первые 2 уравнения системы (I.3.3) можно рассматривать как два уравнения плоскостей в пространстве (X, Y, Z) , пересечение которых дает прямую A — геометрическое место точек, проектирующихся в (x_p, y_p) . Считая в системе (I.3.3) X_p, Y_p фиксированными, исключим из нее X, Y, Z , получив таким образом зависимость

$$F(x_p, y_p, x_q, y_q) = 0 \quad (I.3.6)$$

которая выражает собой проекцию прямой A на снимок с номером q .

Выражение (I.3.6) можно записать следующим образом:

$$y_q = y_p \cdot \varepsilon, \quad \text{где}$$

$$\varepsilon = \frac{K_{1p} \psi_{1p} [x_{K1q} \psi_{1q} x_q - (z_q - b_p)]}{K_{1q} \psi_{1q} [x_{K1p} \psi_{1p} x_p - (b_q - b_p)]}$$

$$z = \frac{K_p \psi_p}{K_{1p} \psi_{1p}} - \frac{K_q \psi_q}{K_{1q} \psi_{1q}} ;$$

Легко видеть, что если $K_{1p} = K_{1q}$, $K_p = K_q$,

$\psi_{1p} \equiv \psi_{1q} \equiv 1$, $\psi_p \equiv \psi_q \equiv 1$ то $\varepsilon = 1$. В этих условиях проекция прямой А на кадр с номером q вырождается в прямую, параллельную базе.

Для нахождения точки на снимке с номером q , соответствующей точке (X_p, Y_p) , нужно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} X_q &= f(Y_q) \\ Y_q &= Y_p \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (I.3.7)$$

Первое из этих уравнений описывает кривую, которая аппроксимирует точки, измеренные на снимке с номером q . Для этого обычно используют интерполяционные полиномы. Система (I.3.7) решается методом итераций, взяв за начальное приближение $Y_q^0 = Y_p$. После нахождения X_q, Y_q для получения X, Y, Z используются формулы (I.3.5).

В работе [3] пространственные точки находятся на пересечении лучей в камере. Пусть задана точка (X_p, Y_p) на снимке с номером "р". Проведем луч l_p из этой точки в пространстве камеры через объектив P . На проекции трека на плоскость снимка № q ищем такую точку (X_q, Y_q) , что если провести луч l_q из нее через соответствующий объектив, то лучи l_p и l_q пересекутся (с заданной точностью). Точка пересечения лучей принимается за точку в камере, которая отвечает измеренной (X_p, Y_p) .

Точка (X_q, Y_q) ищется итерационным путем на дуге окружности, аппроксимирующей проекцию трека на снимок с № q , между двумя точками, расположенными по обе стороны от точки пересечения

дуги окружности с прямой, проходящей через точку (x_p, y_p) параллельно базе.

г) Ошибка в определении координат соответствующих точек (и пространственных координат) существенно возрастает при уменьшении наклона проекции трека по отношению к линии базы. Поэтому в случае многообъективных камер (число объективов > 2) из всех пар кадров, на которых представлен данный трек, выбирается такая пара, для которой углы наклона проекций трека к линии базы наибольшие.

§ 4. Аппроксимация трека винтовой линией.

Построение винтовой линии расчленяется на 2 задачи: в плоскости XOY проводится окружность, а в плоскости развертки цилиндра, на который наматывается винтовая линия, проводится прямая.

В работе [12] сначала производится преобразование координат в систему с осью Z , параллельной вектору магнитного поля

$$\vec{H} = \{ H_x, H_y, H_z \}.$$

Для проведения окружности в плоскости XOY минимизируется функционал

$$M_1 = \sum_{i=1}^n [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]^2$$

в предположении, что окружность проходит через первую точку (x_1, y_1) , т.е. $R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$ и

$$M_1 = \sum_{i=2}^n [(x_i^2 - x_1^2) + (y_i^2 - y_1^2) - 2x_0(x_i - x_1) - 2y_0(y_i - y_1)]^2 \quad (I.4.3)$$

Используя метод наименьших квадратов, определяем x_0 и y_0

из линейной системы уравнений

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y_4} = 0 ,$$

затем вычисляем R .

Минимизация функционала M_1 с точностью до членов порядка $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2$ эквивалентна минимизации

$$M = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x_i - x_4)^2 + (y_i - y_4)^2} - R \right)^2$$

Благодаря введению функционала M_1 задача определения параметров окружности свелась к линейной.

Для определения $\text{tg } \lambda$ проводится методом наименьших квадратов прямая

$$Z = Z_0 + s \cdot \text{tg } \lambda .$$

по точкам (Z_i, S_i) , где $S_i = R \arcsin \frac{y_i - y_4}{\sqrt{(y_i - y_4)^2 + (x_i - x_4)^2}}$,

$\text{tg } \lambda$ находится из системы уравнений:

$$\frac{\partial M_2}{\partial Z_0} = 0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \text{tg } \lambda} = 0 ,$$

где $M_2 = \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_0 - S_i \text{tg } \lambda)^2$. (I.4.4)

Направляющие косинусы касательного вектора к винтовой линии в I-ой точке находятся по формулам:

$$l = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2 \lambda + 1}} \cdot \cos\left(\frac{s_1}{R}\right)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2 \lambda + 1}} \cdot \sin\left(\frac{s_1}{R}\right)$$

$$n = \sin \lambda .$$

Вместе с параметрами винтовой линии программа также выдает их корреляционную матрицу.

В работе [4] для упрощения счета проекцию трека на плоскость XOY аппроксимируют не окружностью, а параболой $y = ax^2 + c$ в системе координат трека, где ось x проходит через 1-ую и последнюю точки трека, и вычисляют радиус кривизны в средней точке ($R = \frac{1}{2a}$). При такой замене погрешность в определении радиуса не превосходит 0,7% для радиуса от 1м. до 20м. на длине следа не более 30 см.

Если при проведении винтовой линии учитывать кроме измерительных ошибок также ошибки многократного рассеяния [14] то для получения параметров винтовой линии вместо выписанных выше функций M_1 и M_2 необходимо минимизировать

$$M_1 = \sum_{k,l=1}^n (y_k^2 - y_l) G_{1kl}^{-1} (y_l^2 - y_k)$$

$$M_2 = \sum_{k,l=1}^n (z_k^2 - z_l) G_{2kl}^{-1} (z_l^2 - z_k),$$

где y_k и z_k определяются из уравнений винтовой линии, y_k^2, z_k^2 - координаты измеренных точек,

$$G_{1kl} = F_{kl} + \sigma_y^2 \delta_{kl}$$

$$G_{2kl} = F_{kl} + \sigma_z^2 \delta_{kl},$$

σ_y^2 - дисперсия измерительной ошибки координаты y ,

σ_z^2 - дисперсия измерительной ошибки координаты z ,

δ_{kl} - символ Кронекера,

F_{kl} - элементы матрицы многократного рассеяния (см. главу III)

Для проведения окружности в работе [3] также предварительно делается переход в систему координат трека x^*, y^* (ось x^* проходит через крайние точки проекции трека на XOY).

Сначала находятся коэффициенты параболы

$$y^* = b_0 + b_1 x^* + b_2 x^{*2},$$

для которой

$$\sum [y_i^* - (b_0 + b_1 x_i^* + b_2 x_i^{*2})]^2 = \min;$$

В качестве начального приближения радиуса окружности берется

$$R_0 = \frac{1}{2|b_2|},$$

а в качестве начального приближения координат центра

$$x_y^* = -\frac{b_1}{2b_2}$$

$$y_y^* = \frac{1}{2b_2} + (b_0 + b_1 x_y^* + b_2 x_y^{*2}),$$

преобразованные в исходную систему.

Если b_1 меньше заданной погрешности, то R_0 принимается за истинное значение радиуса, а координаты центра уточняются с помощью итерационного процесса

$$x_y^{(k+1)} = x_y^{(k)} + (\Delta x_y)^{(k)}$$

$$y_y^{(k+1)} = y_y^{(k)} + (\Delta y_y)^{(k)},$$

$(\Delta x_y)^k, (\Delta y_y)^k$ получаются при минимизации

$$M = \sum [R_0^2 - (x_i - x_y)^2 + (y_i - y_y)^2]^2.$$

Если b_1 больше заданной константы, то R, x_y, y_y разыскиваются при минимизации

$$M = \sum_{i=1}^n [R - \sqrt{(x_i - x_y)^2 + (y_i - y_y)^2}]^2$$

§ 5. Определение параметров частицы по пространственным координатам точек.

В программах [8] и [10], где поле предполагается однородным и пренебрегается потерями на ионизацию, параметры трека определяются по коэффициентам винтовой линии:

$$\rho = \frac{300 HR}{\cos \lambda}$$

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ m &= \sin \varphi \cdot \cos \lambda \\ n &= \sin \lambda \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{направляющие косинусы} \\ \text{трека в I-ой точке.} \end{array}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + \left(\frac{K_1 \cdot \cos \lambda}{\beta \sqrt{S}}\right)^2},$$

где $K_1 = \text{const}$

$$\beta = \frac{\rho}{\sqrt{m^2 + \rho^2}}$$

S — длина дуги трека.

$\frac{\Delta H}{H}$ — вклад из-за неоднородности магнитного поля, $\frac{K_1 \cdot \cos \lambda}{\beta \cdot \sqrt{S}}$ —

из-за многократного рассеяния.

Во всех описанных далее в этом параграфе работах предполагается что частица движется в тормозящей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле.

Параметры частицы подбираются так, чтобы решение уравнений движения при этих параметрах было возможно ближе к измеренной траектории.

В качестве начального приближения берутся параметры, определенные при аппроксимации трека винтовой линией.

а). В работе [5] уточнение параметров частицы производится при минимизации

$$\Phi = \sum_{i=1}^n R_i^2, \quad \text{где}$$

n - число восстановленных точек на треке,
 R_i - расстояние от восстановленной в пространстве точки трека до кривой, заданной набором точек, полученных в результате численного решения системы уравнений движения методом Рунге-Кутты при искомом наборе параметров трека.

Минимизация Φ производится методом линеаризации [II].
 Производные от Φ по искомым параметрам определяются по формуле

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \frac{\Phi(\gamma + \Delta\gamma) - \Phi(\gamma)}{\Delta\gamma}$$

Определение R_i

Обозначим M_i - восстановленную в пространстве точку трека, $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_N$ - точки теоретической кривой. Среди точек \bar{M}_i находится точка \bar{M}_n , ближайшая к M_i и берутся точки \bar{M}_{n-1} и \bar{M}_{n+1} или, если точка \bar{M}_n лежит на конце кривой, берутся соответственно точки \bar{M}_2, \bar{M}_3 или $\bar{M}_{N-2}, \bar{M}_{N-3}$. Через выбранную тройку точек $\bar{M}_{n-1}, \bar{M}_n, \bar{M}_{n+1}$ проводится плоскость

$$(\vec{n}, \vec{z}) = 0 \quad (I.5.I)$$

Здесь $\vec{n} = \frac{[\vec{z}_1, \vec{z}_2]}{z_1 z_2 \sin \alpha}$ - единичный вектор, нормальный к плоскости (I.5.I),

$$\vec{z}_1 = \{x_n - x_{n-1}, y_n - y_{n-1}, z_n - z_{n-1}\}$$

$$\vec{z}_2 = \{x_{n+1} - x_{n-1}, y_{n+1} - y_{n-1}, z_{n+1} - z_{n-1}\}$$

$$\vec{z} = \{x - x_{n-1}, y - y_{n-1}, z - z_{n-1}\}$$

α - угол между \vec{z}_1 и \vec{z}_2 .

- текущий вектор.

Расстояние R_i определяется как расстояние от точки M_i до параболы, проведенной в плоскости (I.5.I) через точки $\bar{M}_{n-1}, \bar{M}_n, \bar{M}_{n+1}$:

$$R_i = \sqrt{h^2 + s^2},$$

где h - расстояние от точки M_i до плоскости (I.5.I)

$$h = (\vec{n} \vec{r}_i)$$

$$\vec{r}_i = \{x_i - x_{n-1}, y_i - y_{n-1}, z_i - z_{n-1}\},$$

s - расстояние от проекции точки M_i на плоскость (I.5.I.)

до параболы, проходящей через $\bar{M}_{n-1}, \bar{M}_n, \bar{M}_{n+1}$.

Для определения s производится переход в систему координат (X', Y', Z') , где ось Z' параллельна \vec{n} , ось X' параллельна \vec{z}_2 , а начало координат в точке

$$M(x_0, y_0, z_0) = M\left(\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \frac{y_{n-1} + y_{n+1}}{2}, \frac{z_{n-1} + z_{n+1}}{2}\right).$$

Формулы преобразования:

$$x' = \left(\frac{\vec{z}_2 \vec{\rho}}{z_2}\right)$$

$$y' = \frac{([\vec{n} \vec{z}_2] \vec{\rho})}{z_2}$$

$$z' = (\vec{n} \vec{\rho}),$$

где $\vec{\rho} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

В этой системе координат расстояние s определяется как расстояние между проекцией точки M_i и параболой, проходящей через точки $\bar{M}_{n-1}, \bar{M}_n, \bar{M}_{n+1}$, по прямой, параллельной оси Y' , т.е.

$$s = y_n' \frac{(x_i' - x_{n-1}') (x_i' - x_{n+1}')}{(x_n' - x_{n-1}') (x_n' - x_{n+1}')} - y_i'.$$

Формулы для R_i достаточно точны, когда системы точек $\{M_i\}$ и $\{\bar{M}_i\}$ лежат близко друг к другу. В начальный же период процесса подбора параметров, когда системы точек могут быть расположены далеко друг от друга, определение S может оказаться завышенным. В этом случае в качестве S в формуле для R_i берется $\min\{s, r_i, n\}$, где $r_{i,n}$ - расстояние между точками M_i и M_n .

б) В программе [3] предполагается, что для определения хода траектории в направлении Z достаточно знать приближенное значение импульса, а уточнение импульса производится по проекции кривой на плоскость XOY .

Далее некоторыми упрощениями уравнения движения приводятся к такому виду, когда их правые части являются известными функциями

$$\begin{aligned} (\Delta\rho)'' &= f_1(\rho_0, \rho, H, \Phi, Z', \lambda_0) \\ Z'' &= f_2(\rho_0, \rho_0, H, \Phi, \lambda_0) \end{aligned}$$

f_1 и f_2 аппроксимируются вблизи восстановленных точек многочленами 4-ой степени в плоскости XOY и 2-ой степени в плоскости ZS .

При интегрировании уравнения для Z считается заданным значение импульса в начальной точке трека.

Коэффициенты аппроксимирующего правые части многочлена находятся при минимизации функции

$$\begin{aligned} &\sum [Z''(\Phi_i) - (b_2 + b_3\Phi_i + b_4\Phi_i^2)]^2 \\ Z(\Phi) &= b_0 + b_1\Phi + b_2\frac{\Phi^2}{2} + \frac{b_3\Phi^3}{6} + \frac{b_4\Phi^4}{12} \end{aligned}$$

b_0 и b_1 определяются из условия минимума

$$\sum \omega_i^2 [Z_i - Z(\Phi_i)]^2,$$

где ω_z^i - веса точек.

Интегрирование уравнения для Δp производится в двух режимах.

(1). Значение импульса в начальной точке задано.

Интегрирование уравнения для (Δp) производится так же, как и для z , только в качестве аппроксимирующего полинома берется полином 4-ой степени.

(2). Значение импульса в начальной точке неизвестно, но импульс считается неизменным вдоль трека.

В этом случае находятся коэффициенты аппроксимирующего полинома для функции $p \cdot (\Delta p)''$ из условия минимума

$$\sum [p(\Delta p)'' - (a_2 + a_3 \Phi_i + a_4 \Phi_i^2 + a_5 \Phi_i^3 + a_6 \Phi_i^4)]^2.$$

$$\Delta p(\Phi) = a_0 + a_1 \Phi + \frac{1}{p} \left[\frac{a_2 \Phi^2}{2} + \frac{a_3 \Phi^3}{6} + \frac{a_4 \Phi^4}{12} + \frac{a_5 \Phi^5}{20} + \frac{a_6 \Phi^6}{30} \right] + p_0 \frac{\Phi^2}{2}.$$

a_0, a_1 и $\frac{1}{p}$ находятся из условия минимума

$$\sum \omega_j^i [\Delta p_i - \Delta p(\Phi_i)]^2,$$

здесь ω_j^i - веса точек.

Если относительная потеря импульса не больше заданного эталона, то для заранее известного импульса (для входного трека) интегрирование уравнения для Δp производится согласно (1), и в качестве уточненных значений параметров трека в конечной точке принимаются:

$$z_n = z(\Phi_n)$$

$$\lambda = \arctg \frac{z'(\Phi_n)}{p_0 + \Delta p(\Phi_n)}$$

$$p = p_0 + \Delta p(\Phi_n)$$

$$\varphi = - \frac{\Delta p'(\Phi_n)}{p_0 + \Delta p(\Phi_n)} + \frac{\pi}{2} \text{ знак заряда} + \Phi \text{ нач.}$$

а в том случае, если импульс заранее не известен, уравнение для Δp интегрируется согласно (2), и в качестве параметров трека принимаются:

подобранное p

$$z_1 = b_0$$

$$\lambda = \arctg \frac{b_1}{p_0 + a_0}$$

$$\rho_1 = \rho_0 + a_0$$

$$\varphi = -\frac{a_1}{\rho_0 + a_0} + \frac{\pi}{2} \text{ знак заряда} + \varphi \text{ нач.}$$

Если относительная потеря импульса больше заданного эталона, то производится интегрирование уравнения для $\Delta\rho$ согласно (I) с

$$P(0) = 0,75 P_0 + 0,1 \kappa P_0, \quad \kappa = 0, 1, 2 \dots$$

(P_0 - значение импульса, найденное при аппроксимации трека винтовой линией) до тех пор, пока величина $M = \sum \omega_p^i [\Delta\rho_i - \Delta\rho(\varphi_i)]^2$ не начнет возрастать. По трем значениям $P(0)$, отвечающим минимальному значению M и двум соседним, производится квадратичная интерполяция. Полученное число P принимается за уточненное значение импульса в начальной точке. С этим значением $P(0)$ производится интегрирование уравнений для Z и $\Delta\rho$ согласно (I) и полагается

$$Z_1 = \ell_0$$

$$\lambda = \arctg \frac{b_1}{\rho_0 + a_0}$$

$$\rho = \rho_0 + a_0$$

$$\varphi = \frac{a_1}{\rho_0 + a_0} + \frac{\pi}{2} \text{ знак заряда} + \varphi \text{ нач.}$$

Потери импульса вычисляются по формуле

$$P(s) = \frac{m}{938} \tilde{P} \left[\tilde{S} \left(P_{\text{нач}} \cdot \frac{938}{m} \right) - S \frac{938}{m} \right],$$

где m - масса частицы,

$P_{\text{нач}}$ - импульс частицы в начальной точке,

S - пройденный путь,

\tilde{P} - начальный импульс протона, прошедшего до остановки пути

$\tilde{P}(\tilde{S})$ определяется по приближенным формулам:

$$\tilde{P}(\tilde{S}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{S} \leq 1 \\ 67,8 \tilde{S}^{0,2937}, & \text{если } 1 < \tilde{S} \leq 2138 \\ \left(\frac{\tilde{S}}{1,562 \cdot 10^{-5}} \right)^{0,3454}, & \text{если } 2138 < \tilde{S} < 7575 \\ - 0,58 \cdot 10^{-6} \tilde{S}^2 + 5,46 \cdot 10^{-2} \tilde{S} + 621,3, & \text{если } \tilde{S} > 7575 \end{cases}$$

Множественное рассеяние учитывается только в ошибке импульса, кроме случая очень большого рассеяния, когда оно учитывается и в весах.

Матрица ошибок искоемых параметров получается по следующему принципу.

Обозначим эмпирические дисперсии

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n-3} \min \sum \omega_p^i [\Delta p_i - \Delta p(\varphi_i)]^2 + (\sigma_p \text{ валево})^2$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-2} \min \sum \omega_z^i [z_i - z_i(\varphi_i)]^2 + (\sigma_z \text{ валево})^2$$

Давая параметрам $p, \varphi, \rho, z, \lambda$ приращения $\delta p, \delta \varphi, \delta \rho, \delta z, \delta \lambda$, получим приращения функций $z(\varphi)$ и $\rho(\varphi) = \rho_0 + \Delta \rho_0$.

Взвешенные суммы квадратов этих приращений, нормированные с помощью эмпирических дисперсий σ_z и σ_p , соответственно, образуют квадратичные формы относительно δz и $\delta \lambda$ в первой сумме и относительно $\delta p, \delta \varphi, \delta \rho$ в случае (2) и $\delta p, \delta \varphi$ в случае (1) во второй сумме. Коэффициенты квадратичных форм дают элементы матрицы, обратная к которой является матрицей ошибок. (В ошибку импульса дополнительно включены члены, учитывающие ошибки множественного рассеяния и поля).

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЧАСТИЦЫ ПО КООРДИНАТАМ НА ПЛОСКОСТЯХ СНИМКОВ

Схема определения параметров трека через восстановление координат в пространстве камеры обладает тем недостатком, что ошибки пространственных координат неодинаковы и скоррелированы. Для точного их учета необходимо в дальнейшей обработке ввести матрицу ошибок. Для треков, имеющих маленький угол наклона с базой,

возникает большая ошибка в поиске соответствующих точек и, следовательно, пространственных координат, а для треков, идущих вдоль базы (для двухобъективных камер нет возможности их избежать), система уравнений для определения соответствующих точек становится несовместной.

Поэтому в некоторых работах [12, 13] используется метод подбора параметров трека с помощью построения минимизируемой функции, использующей непосредственно измеренные точки на плоскостях снимков. В качестве теоретической кривой берутся проекции на плоскости снимков кривой, аппроксимирующей трек в пространстве камеры. Если учитывать только измерительные ошибки, то можно минимизировать сумму квадратов расстояний между измеренными точками и теоретической кривой с равными весами точек.

Но при этом трудно провести точный учет многократного рассеяния, влияющего на поведение частицы.

Недостатком этого способа является также его громоздкость.

а) В работе [12] в качестве минимизируемой функции берется

$$\Phi = \sum R_i^2$$

, где суммирование ведется по всем измеренным точкам всех снимков. R_i определяются как расстояния на плоскости снимка от измеренной точки (x_i, y_i) до теоретической кривой, которая задана набором точек, являющихся проекциями на снимок пространственных точек^{ж)}, полученных в результате численного решения уравнений движения методом Рунге-Кутты.

R_i определяются следующим образом.

Для измеренной на снимке точки $M_i(x_i, y_i)$ находятся ближайшие к ней три точки $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$

=====
ж) Т.к. программа сделана для камеры Вильсона, то проектирование точек из пространства камеры на снимок не составляет труда.

на теоретической кривой. Через эти 3 точки проводится парабола

$$y = \alpha x^2 - \beta.$$

В системе координат, где ось X проходит через M_1 и M_2 , а начало координат находится в середине отрезка M_1M_3

$$\alpha = \frac{y_2}{(x_2 + \frac{\rho}{2})(x_2 - \frac{\rho}{2})}, \quad \beta = \frac{\alpha \rho^2}{4}, \quad \rho = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Обозначим $R(x) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$,

где (x, y) - точка параболы.

$$R(x) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (\alpha x^2 - \beta - y_i)^2}.$$

Найдем минимальное расстояние от заданной точки до параболы.

Минимум R получаем из условия:

$$\frac{\partial R(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{или, после дифференцирования:}$$
$$(x - x_i) + (\alpha x^2 - \beta - y_i) 2\alpha x = 0.$$

Из возможных трех решений этого кубического уравнения ищется одно вблизи $x = x_i$. Применяя метод Ньютона для уточнения корня, получим

$$x_k = x_{k-1} + t_k, \quad \text{где}$$

$$t_k = \frac{x_i - x_{k-1} - 2\alpha x_{k-1} (y_{k-1} - y_i)}{1 + 2\alpha (y_{k-1} + y_i) + 4\alpha^2 x_{k-1}^2}, \quad x_0 = x_i.$$

Если процесс не сошелся после 2-х итераций, то в качестве

R_i берется расстояние от M_i до ближайшей из точек M_1, M_2, M_3 .

Если процесс сошелся, то проверяем условия

$$R_{\min} < R_1, R_2, R_3,$$

где

$$R_1 = M_0M_1, \quad R_2 = M_0M_2, \quad R_3 = M_0M_3.$$

При невыполнении этих условий в качестве R_i берется расстояние от M_i до ближайшей из точек M_1, M_2, M_3 , а если условия выполнены, то

$$R_i = \min R(x).$$

б) Описываемая методика использовалась также при обработке треков, направленных вдоль базы в пузырьковой камере ОИЯИ с двухобъективной стереоголовкой [13].

Трек в пространстве камеры аппроксимируется винтовой линией (2).

Если в соотношениях, связывающих координаты пространственной точки $M(X, Y, Z)$ с ее проекциями левым и правым объективами (формулы (1.3.3)) рассматривать X, Y и Z как точки винтовой линии, то получим:

$$\begin{aligned} X_l &= X_l(s, \kappa, \beta, \alpha, X_0, Y_0, Z_0, X_l, Y_l) \\ Y_l &= Y_l(s, \kappa, \beta, \alpha, X_0, Y_0, Z_0, X_l, Y_l) \\ X_p &= X_p(s, \kappa, \beta, \alpha, X_0, Y_0, Z_0, X_p, Y_p) \\ Y_p &= Y_p(s, \kappa, \beta, \alpha, X_0, Y_0, Z_0, X_p, Y_p). \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Подбирается набор параметров $(\kappa, \beta, \alpha, X_0, Y_0, Z_0)$ *)

обращающих в минимум следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_i \min_s [(x_{li} - x_l)^2 + (y_{li} - y_l)^2] + \\ &+ \sum_j \min_s [(x_{pj} - x_p)^2 + (y_{pj} - y_p)^2] + \\ &+ \sum_q \min_s [(x_{lq} - x_l)^2 + (y_{lq} - y_l)^2 + (x_{pq} - x_p)^2 + \\ &+ (y_{pq} - y_p)^2] = \sum_i R_i^2 + \sum_j R_j^2 + \sum_q R_q^2. \end{aligned}$$

*) В рабочей программе минимизация проводится только по κ, β, α .

Здесь $(x_{лi}(p_j), y_{лi}(p_j))$ - измеренная на левом (правом) кадре точка; $(x_{пк}, y_{пк})$ и $(x_{лк}, y_{лк})$ - соответствующие друг другу точки на левом и правом кадрах.

$$x_{л} = x_{л}(s) \qquad x_{п} = x_{п}(s)$$

$$y_{л} = y_{л}(s) \qquad y_{п} = y_{п}(s)$$

- теоретические кривые, которые являются проекциями винтовой линии на левый и правый кадры.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ КРИВЫХ
И ФУНКЦИЙ R_i^2, R_j^2, R_{ϕ}^2

Для построения теоретических кривых необходимо решить уравнения (I.6.I).

Для решения этих уравнений строится итерационный процесс:

$$x^{i+1} = x(s, \kappa, \beta, \alpha, x_0, y_0, z_0, x^i, y^i)$$

$$y^{i+1} = y(s, \kappa, \beta, \alpha, x_0, y_0, z_0, x^i, y^i)$$

Воспользовавшись тем, что правые части уравнений зависят от x и y только через функции Ψ и Ψ_1 , а сами функции Ψ и Ψ_1 являются слабыми функциями x и y , можно в качестве начального приближения взять x и y , сосчитанные при

$$\Psi \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = const, \text{ и } \Psi_1 \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = const.$$

=====

*) Индексы Λ и Π здесь и дальше опущены.

Теоретические кривые считаются для значений $s = s_i$, где

$$s_i = s_0 + i \Delta s, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Для определения Δs свяжем выражение дифференциала дуги проекции трека на плоскость кадра dq с дифференциалом дуги кривой (I.6.1) ds ^{жж}).

$$dq = \sqrt{x'^2 + y'^2} ds \approx \sqrt{\left[\frac{x'(\xi_k, \psi_i + k\psi) - (x_0 - b)\xi'_k \psi_i}{(\xi_k, \psi_i + k\psi)^2} \right]^2 + \left[\frac{y'(\xi_k, \psi_i + k\psi) - y_0 \xi'_k \psi_i}{(\xi_k, \psi_i + k\psi)^2} \right]^2} ds$$

$$dq|_{s=0} = \frac{1}{(\xi_0, \psi_i + k\psi)^2} \sqrt{[\cos \beta (\xi_0, \psi_i + k\psi) - (x_0 - b) \xi'_k \psi_i]^2 + [\sin \beta (\xi_0, \psi_i - k\psi) - y_0 \xi'_k \psi_i]^2} ds$$

(I.6.2)

Заменяем в последней формуле dq на Δq и ds на Δs .

Возьмем
$$\Delta q = \frac{\sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2}}{N},$$

где $(x_n(k), y_n(k))$ - первая (последняя) измеренная точка на снимке, $N = 20$.

Из формулы (I.6.2), в которой dq и ds заменены на Δq и Δs , определяем Δs . Введем в рассмотрение функцию

$$R_i^2(s) = (x_i - x(s))^2 + (y_i - y(s))^2.$$

В качестве s_n возьмем то значение из множества точек s_i , при котором функция $R_i^2(s)$ достигает минимального значения

=====

жж) Слабой зависимостью $\Psi(\tau)$ и $\Psi_i(\tau)$ от τ , пренебрегаем.

(к-индекс, соответствующий последней точке).

Для вычисления Φ нам нужно определить R_i^2, R_j^2, R_q^2 .

Функцию R_i^2 определим как квадрат расстояния от заданной точки (x_l, y_l) до теоретической кривой. Поскольку теоретическая кривая задана набором точек, то расстояние до кривой заменяем расстоянием до прямой, аппроксимирующей теоретическую кривую. Прямая проводится через 2 точки $(x(s_e), y(s_e)), (x(s_m), y(s_m))$, для которых величины $R_i^2(s)$ имеют наименьшие значения.

Функция R_i^2 имеет вид:

$$R_i^2 = \frac{[(x(s_e) - x_{il})(y(s_e) - y(s_m)) - (x(s_e) - x(s_m))(y(s_m) - y_{il})]^2}{(x(s_m) - x_{il})^2 + (y(s_m) - y_{il})^2}$$

Функция R_j^2 определяется аналогично.

Функция $R_q^2 = \min_s \{ [R_q^2(s)]_l + [R_q^2(s)]_n \}$

определяется как минимум суммы квадратов расстояний от заданных на снимках соответствующих друг другу точек $(x_{lq}, y_{lq}), (x_{nq}, y_{nq})$ до точек теоретических кривых, соответствующих одному значению параметра s .

Найдем s_e и s_m значения параметра s из набора s_i , которые соответствуют двум точкам теоретической кривой на левом снимке, расстояния от которых до точки (x_{lk}, y_{lk}) наименьшее.

Проведем прямые через точки $(x_l(s_e), y_l(s_e))$ и $(x_l(s_m), y_l(s_m))$ на левом снимке и $(x_n(s_e), y_n(s_e)), (y_n(s_m), y_n(s_m))$ на правом:

$$\begin{aligned} x_l(s) &= a_l s + b_l \\ y_l(s) &= c_l s + d_l \end{aligned} \tag{I.6.3}$$

$$\begin{aligned} x_n(s) &= a_n s + b_n \\ y_n(s) &= c_n s + d_n \end{aligned} \tag{I.6.4}$$

Найдем \tilde{S} - значение параметра S , при котором суммарное расстояние от точки (x_{lq}, y_{lq}) до прямой (I.6.3) и от точки (x_{pq}, y_{pq}) до прямой (I.6.4) будет минимальным.

$$\tilde{S} = \frac{x_{lq}a_l + y_{lq}c_l - a_l b_l - c_l d_l + x_{pq}a_p + y_{pq}c_p - a_p b_p - c_p d_p}{a_l^2 + c_l^2 + a_p^2 + c_p^2}$$

Тогда

$$R_q^2 = [R_q^2(\tilde{S})]_l + [R_q^2(\tilde{S})]_p.$$

Для минимизации Φ используется метод линеаризации [II].

Счет производных производится численно:

$$\frac{\partial R_i}{\partial S} = \frac{R_i(S + \Delta S) - R_i(S)}{\Delta S}$$

Поиск начального приближения.

Будем считать, что первые измеренные точки на левом и правом снимках являются соответствующими и что имеется еще, по крайней мере, одна пара соответствующих точек.

Для каждой пары соответствующих точек вычисляются координаты X_i, Y_i, Z_i ($i=0, 1, \dots, k-1$, где k -число пар соответствующих точек) по формулам пространственного восстановления (I.3.5).

В качестве начального приближения для X_0, Y_0, Z_0 берутся пространственные координаты первой точки.

Начальное приближение для $tg\alpha$ получается усреднением значений tg угла наклона прямой, проведенной в плоскости (Z, S) через пары точек $(Z_0, S_0), (Z_i, S_i)$, где в качестве S_i берется значае величина хорды

$$L_i = \sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2},$$

а затем, после получения начальных значений величин β_i , дуга дуги, выраженная через L_i и $(\beta_i - \beta_0)$.

Начальные значения для β_i (и кривизны K) получают, приравнявая выражение для первой производной (и кривизны) проекции трека на плоскость снимка через $\beta, \operatorname{tg} \alpha$ (и $k, \beta, \operatorname{tg} \alpha$) и ее величину для гладкой кривой, аппроксимирующей измеренные точки на проекции снимка.

Во всех, описанных выше, случаях (за исключением работы [3]) параметры a_k кривой, аппроксимирующей трек, находятся при минимизации нелинейного функционала M методами линеаризации. Матрица ошибок искомых параметров определяется как матрица

$\sigma^2 \{G_{kl}^{-1}\}$, где $\{G_{kl}\}$ - матрица нормальной системы, вычисленная в точке минимума, а σ^2 - дисперсия, определяемая величиной $\frac{M^2}{n-m}$, где n - число точек, m - число параметров.

Для определения матрицы ошибок искомых параметров трека, которые выражаются через найденные параметры кривой, используется формула

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma^2 \sum_{k,l} \frac{\partial P_i}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial a_l} G_{kl}^{-1},$$

где a_k - параметры кривой, аппроксимирующей трек,

$P_i(a_k)$ - параметры трека, являющиеся функциями a_k ,

$\{\sigma_{ij}^2\}$ - матрица ошибок величин P_i ,

$\{G_{kl}\}$ - матрица нормальной системы, упомянутая выше.

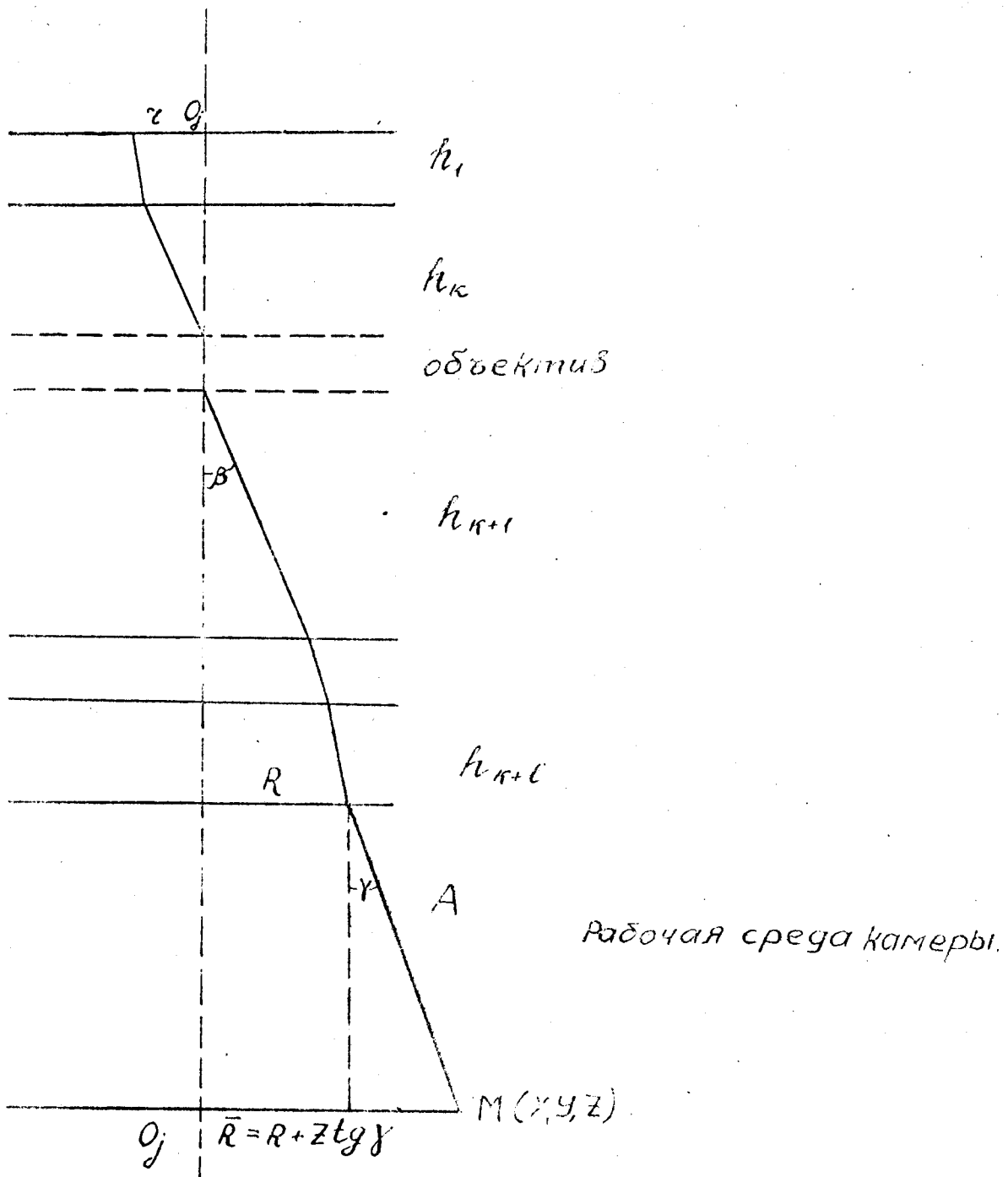


Рис. I.I.

Изображение плоскости, в которой лежит оптическая ось Oj и луч A , проектирующий точку $M(x, y, z)$.
 n_i - толщины сред.

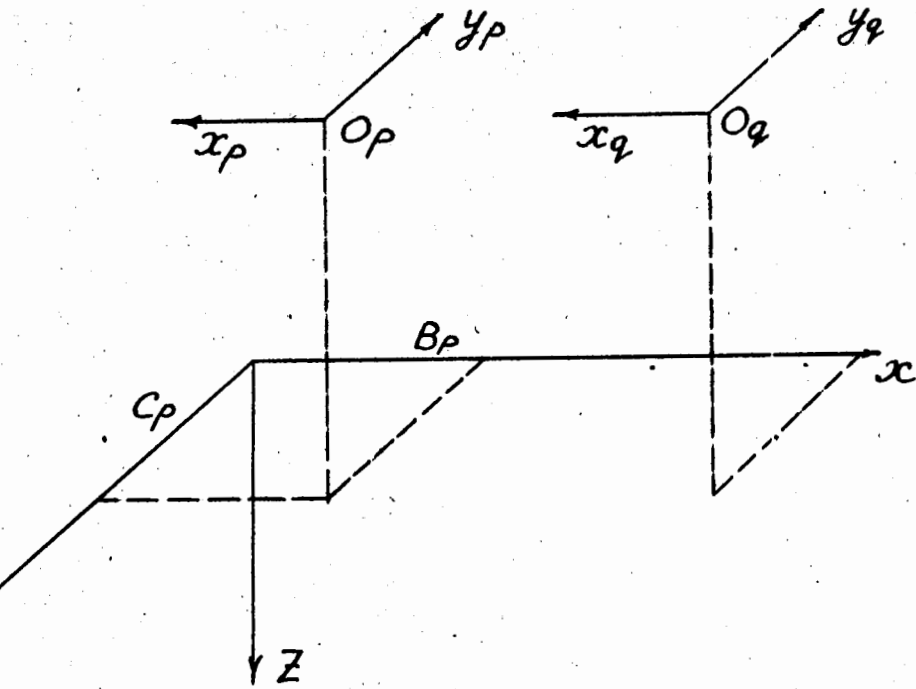


Рис. 1.2.

Расположение координатных осей в камере и на плоскостях снимков.

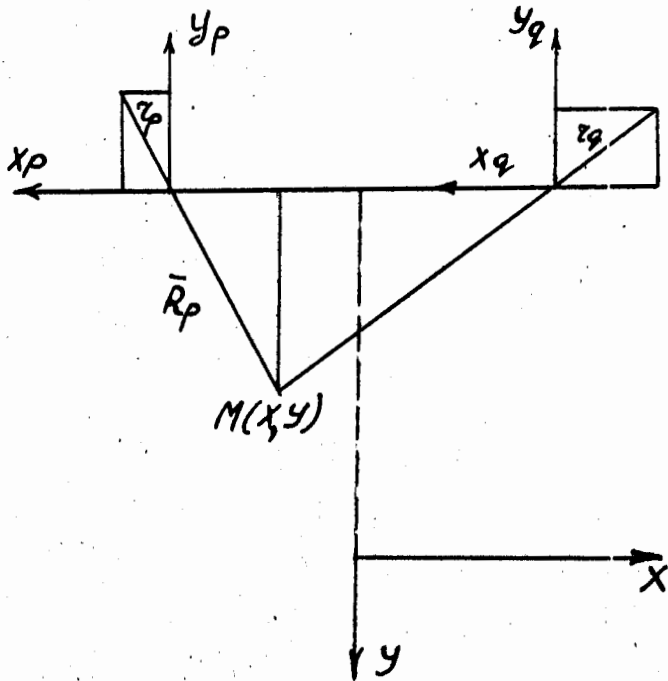


Рис. 1.3.

Проекция на плоскость XOY изображения точек в оптических системах.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ I.

1. В.А.Загинайко, В.Н.Шигаев. Нахождение параметров преобразований для перехода в систему координат фотоснимка и определение коэффициентов усадки пленки методом максимума правдоподобия. Препринт ОИЯИ, 2527, Дубна, 1965.
2. Н.Ф.Маркова, В.И.Мороз. ОИЯИ. Б2-2918, Дубна, 1966.
3. А.С.П. Программа обработок наблюдений в водородной камере. Препринт ИТЭФ, № 428, Москва, 1966.
4. Н.Н.Говорун, Е.П.Жидков, Л.И.Лепилова, Г.И.Макаренко, Г.Н.Тентюкова. Обработка экспериментальных данных, поступающих с просмотровых автоматов. Препринт ОИЯИ, 1102, Дубна, 1962.
5. Н.Н.Говорун, И.В.Попова, Л.А.Смирнова, Т.В.Рыльцева. Обработка следов частиц малой энергии, получаемых в камере Вильсона. Препринт ОИЯИ, 1101, Дубна, 1962.
6. Н.Д.Дикусар, В.Н.Шигаев. Об одном методе выброса "плохих" точек. Препринт ОИЯИ, 5-3263, Дубна, 1967.
7. И.М.Иванченко, Н.А.Круткова, В.И.Мороз, Т.Г.Останевич, Г.Н.Тентюкова. Программа восстановления пространственных координат точек треков по двум стереопроекциям. Препринт ОИЯИ Р-2889, Дубна, 1967.
8. Н.А.Буздавина, Э.М.Иванченко, В.Г.Иванов, И.Паточка, М.И.Попов. Геометрическая программа для метровой пропановой пузырьковой камеры. Препринт ОИЯИ, 2095, Дубна, 1965.

9. Е.Н.Кладницкая. Материалы совещания по методике пузырьковых камер. Препринт ОИЯИ, 796, Дубна, 1961.
10. Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Препринт ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965.
11. С.Н.Соколов, И.Н.Силин. Нахождение минимумов функционалов методом линеаризации. Препринт ОИЯИ, Д-810, Дубна, 1961.
12. Н.Н.Говорун и др. Методика обработки следов частиц малой энергии, получаемых в камере Вильсона. Препринт ОИЯИ, 2036, Дубна, 1965.
13. А.Ф.Вишневский и др. Схема обработки треков в пузырьковой камере, сфотографированных двухобъективной стереоголовкой. Препринт ОИЯИ, Р-1468, Дубна, 1963.
14. И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В. Шляпников. Новый метод учета кулоновского рассеяния. Препринт ОИЯИ, Р-2146, Дубна, 1965.

Глава II. Геометрические программы для водородных камер, используемые в радиационной лаборатории им. Лоуренса (Беркли, США), ПЕРНе и Резерфордской лаборатории (Англия)

Содержание.

Предисловие.

- § 1. Преобразование координат из " m " - системы в " f " - систему.
- § 2. Контроль качества измерений точек трека.
- § 3. Проведение световых лучей.
- § 4. Определение пространственных координат точек трека:
 - а) нахождение точек трека по координатам соответствующих точек;
 - б) нахождение точек трека по координатам несоответствующих точек.
- § 5. Нахождение I-го приближения к пространственной кривой.
- § 6. Уточнение кинематических параметров трека.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Под программой *GRVCT* в последующем тексте мы понимаем программу Резерфордской лаборатории -

The Geometrical Reconstruction of Bubble Chamber Tracks [3].

Данный обзор посвящен рассмотрению зарубежных геометрических программ и основан на работах [2] , [3] , [7] , [8] .

Ввиду отсутствия у автора практического опыта по эксплуатации рассматриваемых программ, никакого критического сравнения в тексте не делается и не приводятся рекомендации по выбору того или иного метода.

§ I. Преобразование координат из m - системы
в f систему.

Для восстановления координат измеренного трека, необходимо преобразовать координаты трека, измеренные в m - системе, в f систему. При этом надо учесть, что после проявления происходит усадка фотопленки, на которой зафиксировано событие. Учет этого эффекта проводят путем введения коэффициентов усадки в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Считая, что m - система и f - система связаны между собой преобразованиями поворота, сдвига и растяжения по осям x, y (см. введение) мы получим такую связь между координатами одной и той же точки в различных системах координат:

$$\begin{aligned}x_f &= ax_m + by_m + c & (\text{П. I. I}) \\y_f &= dx_m + ey_m + f\end{aligned}$$

На каждом кадре находятся свои коэффициенты преобразования a, b, \dots, f ; для этого необходимо знать координаты изображений некоторых выделенных точек в f - системе. Обычно функцию таких выделенных точек выполняют кресты, нанесенные на поверхность стекла, совпадающей с плоскостью $O_s x_s y_s$, либо на какой-нибудь другой плоскости в объеме рабочей жидкости. Коэффициенты преобразования a, \dots, f находятся минимизацией функционала

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{i=1}^n [(x_f^i - ax_m^i - by_m^i - c)^2 + \\&\quad + (y_f^i - dx_m^i - ey_m^i - f)^2] \\(x_f^i, y_f^i), (x_m^i, y_m^i) &\text{ -- координаты крестов в } f \text{ и } m \\&\text{ системах соответственно; } n \text{ -- число крестов.}\end{aligned}$$

С помощью найденных коэффициентов преобразования по измеренным координатам крестов определяются их координаты в f -

системе, которые затем сравниваются с $x_f^i y_f^i$. По величине отклонения этих двух групп координат делается определенное заключение о качестве измерения крестов и, следовательно, о точности определения коэффициентов преобразования.

Если измерения "хорошие", то по коэффициентам преобразования рассчитываются координаты точек трека в f - системе, если же они "плохие", то проводится повторное измерение всех или некоторой части крестов и рассчитываются новые коэффициенты преобразования.

Изложенная выше схема перехода из m системы в f - систему в основном реализована в программе *GRBCT*.

В программе *PANG* коэффициенты преобразования $m \rightarrow f$ (т.е. коэффициент усадки, косинус и синус угла поворота и коэффициенты трансляции) находятся из простых геометрических соображений по координатам двух крестов в f системе. Затем эти коэффициенты используются в соответствующей формуле, связывающей координаты точек в f и m системах.

В программе *TVGP* вводится понятие идеального изображения. Оно определяется как изображение, которое было бы, если бы у объектива отсутствовали aberrации, у пленки отсутствовала усадка и плоскость пленки была бы перпендикулярна оптической оси. Используются формулы, связывающие координаты идеального изображения с координатами в f - системе; при этом считается, что aberrация объектива сферически симметрична, а усадка пленки изотропна.

Пусть нам известны координаты $x_s y_s$ крестов в s - системе. Тогда, используя известные значения оптических параметров, можно рассчитать их "идеальные" координаты ξ, η ; т.е. координаты на идеальном изображении (например, записывая уравнение

луча, проходящего через все оптические среды). Далее, можно записать выражения, связывающие ξ, η с их координатами на реальной пленке и по м.н.к. найти коэффициенты преобразования координат идеального изображения в f - систему.

Одновременно рассчитываются координаты реального изображения крестов в f - системе. Эти координаты используются для нахождения коэффициентов преобразования от m - системы к f - системе и с их помощью определяются координаты изображения в f - системе.

Вид формул, связывающих координаты идеального изображения с измеренными координатами в f - системе, допускает построение простой итерационной схемы для нахождения координат идеального изображения трека. В последующих расчетах используются именно эти координаты.

В программе *THRESH* вводится понятие так называемых "кажущихся" (*apparent*) точек, или кажущиеся изображения.

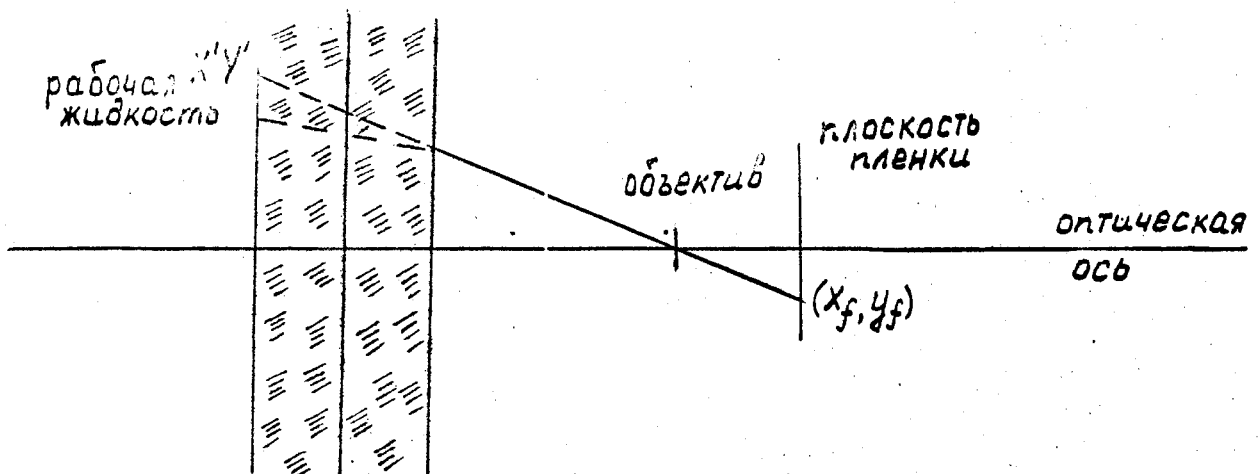


Рис. II. 1

На рис. II. 1 изображена схема хода луча в случае, когда у объектива нет аберраций и у пленки нет усадки. Точка на обратной стороне верхнего стекла с координатами X', Y' называется "кажущимся" изображением. Очевидно, что между координатами X_f, Y_f и

X', Y' существует линейная зависимость, т.е.:

$$X' = Ax_f + By_f + C \quad (\text{П.1.2})$$

$$Y' = Dx_f + Ey_f + F$$

Поскольку между координатами трека в f и m системах существует связь (П.1.1), то комбинируя (П.1.1) и (П.1.2) получим

$$X' = a'x_m + b'y_m + c'$$

$$Y' = d'x_m + e'y_m + f'$$

Координаты X', Y' крестов на обратной стороне верхнего стекла являются константами, которые рассчитываются специальной подготовительной программой [I] до входа в *THRESH*. Используя координаты тех же крестов в m -системе, методом наименьших квадратов находятся коэффициенты a', b', \dots, f' . По этим коэффициентам рассчитываются координаты крестов, которые сравниваются с заданными перед входом в программу, и по величине разности координат этих двух систем крестов можно судить о качестве измерений.

§ 2. Контроль качества измерений точек трека.

Идея такого контроля заключается в следующем:

через систему точек по м.н.к. проводится соответствующая аппроксимирующая кривая. Для каждой точки рассчитываются некоторые величины, характеризующие степень отклонения данной точки от проведенной кривой. Если таковое отклонение находится в допустимых пределах, то точка считается хорошей и используется в последующих расчетах, в противном случае точка бракуется. Если у трека бракуется несколько таких точек, то бракуется весь трек. Иногда, как это делается в *PANG*, для всего трека рассчитывается один параметр, характеризующий качество измерений трека и по нему про-

водится браковка. Ниже описываются различные процедуры браковки.

Как известно, программа *PANG* разработана для камеры, у которой не все стекла параллельны, именно: стекло, отделяющее рабочую жидкость от остального объема камеры составляет некоторый угол с оптической осью объектива. Поэтому, после того, как найдены координаты трека в f - системе, делается ряд преобразований для того, чтобы получить координаты трека, которые были бы, если бы плоскость пленки была параллельна обратной стороне верхнего стекла. Затем эти координаты преобразуются в систему координат, где ось x параллельна линии, соединяющей начальную и конечную точки трека и направлена в сторону конечной точки. Через координаты точек проводится парабола по м.н.к. вида:

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (\text{П.2.1})$$

С помощью коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ рассчитывается максимальное отклонение измеренных на пленке точек от параболы (П.2.1) и по величине этого отклонения проводится браковка.

В программе *TVGP* считается, что плоскости стекол и пленки параллельны, поэтому никаких дополнительных преобразований координат идеального изображения трека не делается. Чтобы минимизировать расчетную ошибку, координаты трека преобразуются в систему, где первые моменты x, y равны 0. Пусть $x^{(0)}, y^{(0)}$ - координаты точек трека в f - системе; $x_i^{(0)}, y_i^{(0)}$ - координаты точки идеального изображения трека (см. § I. этой главы).

Тогда находятся:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(0)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^{(0)}$$

в системе, где

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{y} = 0 \\ x_i^{(1)} &= x_i^{(0)} - \bar{x} \\ y_i^{(1)} &= y_i^{(0)} - \bar{y}.\end{aligned}$$

В этой же системе рассчитываются:

$$\begin{aligned}\bar{x}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^{(1)})^2 \\ \bar{y}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^{(1)})^2 \\ \overline{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} y_i^{(1)}.\end{aligned}$$

Система координат далее поворачивается так, чтобы в новой системе матрица вторых моментов координат T была диагональна. Можно показать, что угол вращения определяется по формулам:

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{\sqrt{(2\overline{xy})^2 + (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2}} \right]$$

$$\cos \vartheta = +\sqrt{\cos^2 \vartheta}$$

$$\sin \vartheta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} \begin{cases} + & \text{для } \overline{xy} > 0 \\ - & \text{для } \overline{xy} < 0. \end{cases}$$

Координаты трека в последней системе координат x_i, y_i находятся из координат $x_i^{(1)}, y_i^{(1)}$ по обычным формулам преобразования при повороте системы координат. В результате всех преобразований мы имеем для трека

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{y} = \overline{xy} = 0 \\ \text{и} \quad \bar{x}^2 &> \bar{y}^2.\end{aligned}$$

Далее через известные координаты трека x_i, y_i методом наименьших квадратов проводится окружность. Для нахождения параметров

окружности x_0, y_0 - координат центра и ρ - радиуса
минимизируется такой функционал:

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i - \rho)^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^2 - \rho^2}{2\rho} \right)^2$$

$$d_i^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2.$$

Обозначим
$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^2 - \rho^2}{2\rho} \right)^2.$$

Последний функционал удобнее минимизировать, находя x_0, y_0, ρ^2 ,
чем функционал Φ , находя x_0, y_0, ρ .

Обозначим

$$\chi^2 = \frac{F^2}{4\rho^2}, \quad F^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i^2 - \rho^2)^2.$$

Тогда из уравнения $\frac{\partial \chi^2}{\partial \rho^2} = 0$ имеем:

$$\rho^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + x_0^2 + y_0^2 - \frac{F^2}{2\rho^2}. \quad (\text{П.2.2})$$

Используя выражение (П.2.2) и уравнения $\frac{\partial \chi^2}{\partial x_0} = \frac{\partial \chi^2}{\partial y_0} = 0$,

мы получим:

$$x_0 = \frac{\overline{x(x^2 + y^2)}}{2\bar{x}^2 - F^2/2\rho^2}$$

$$y_0 = \frac{\overline{y(x^2 + y^2)}}{2\bar{y}^2 - F^2/2\rho^2}.$$

Черта сверху означает усреднение.

В нашей координатной системе $F^2/2\rho^2$ мало в сравнении с $2\bar{x}^2$, но не мало в сравнении с $2\bar{y}^2$.

Пренебрегая $F^2/2\rho^2$ по сравнению с $2\bar{x}^2$ получим:

$$x_0 = \frac{x(x^2 + y^2)}{2\bar{x}^2}; \quad (П.2.3)$$

$$y_0 = \frac{[x^2 + y^2 - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)]^2 - 4\bar{x}^2 \cdot x^2}{2y(x^2 + y^2)}$$

Для каждой точки x_i, y_i рассчитывается расстояние от центра окружности с координатами (x_0, y_0) (формулы (П.2.3)).

Это расстояние сравнивается со значением ρ , рассчитанным по (П.2.2), где в правой части пренебрегают членом $F^2/2\rho^2$ и по величине разности этих величин проводится браковка. В программе *THRESH* браковка проводится по координатам "кажущихся" точек (см. § I). Для этого сначала координаты "кажущихся" точек преобразуются в систему координат $X_T Y_T$, в которой ось OX_T параллельна хорде трека, а затем в новой системе проводится по м.н.к. окружность, уравнение которой можно записать в виде:

$$Y_T = a_0 + a_1 X_T + a_2 (X_T^2 + Y_T^2). \quad (П.2.3)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 в (П.2.3) находятся путем минимизации функционала

$$\sum_{i=1}^N (Y_{Ti}^K - Y_{Ti})^2,$$

где

$$Y_{Ti} = a_0 + a_1 X_{Ti}^K + a_2 [(X_{Ti}^K)^2 + (Y_{Ti}^K)^2]$$

X_{Ti}^k, Y_{Ti}^k - координаты i -ой "нажушейся" точки.

По найденным коэффициентам a_0, a_1, a_2 и координатам X_{Ti}^k, Y_{Ti}^k рассчитываются координаты Y_{Ti} , которые затем сравниваются с Y_{Ti}^k .

Программа *GRBCT* построена так, что контроль качества измерений в ней осуществляется после нахождения коэффициентов световых лучей, соответствующих координатам измеренных точек; поэтому эта часть программы *GRBCT* будет изложена в следующем параграфе.

§ 3. ПРОВЕДЕНИЕ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ

Очевидно, что для нахождения пространственных координат точек трека, мы должны иметь по меньшей мере две стереопроекции одного и того же трека. Каждой точке на какой-нибудь стереопроекции соответствует световой луч. Используя уравнения световых лучей, соответствующих точкам на различных стереопроекциях, можно найти координаты реального трека в m -системе.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об определении компонент световых лучей.

В программах *PANЕ*, *GRBCT*, *TVEP* восстановление световых лучей выполняется сходным образом с некоторыми отличиями, возникающими вследствие различных конструкций камер.

Пусть X_f, Y_f - координаты измеренной точки в f -системе. Предположим, что плоскости всех стекол и пленки параллельны друг другу и перпендикулярны оптической оси. Тогда в "S" системе точке X_f, Y_f соответствует световой луч с компонентами X, Y, U, V (см. рис. II.2).

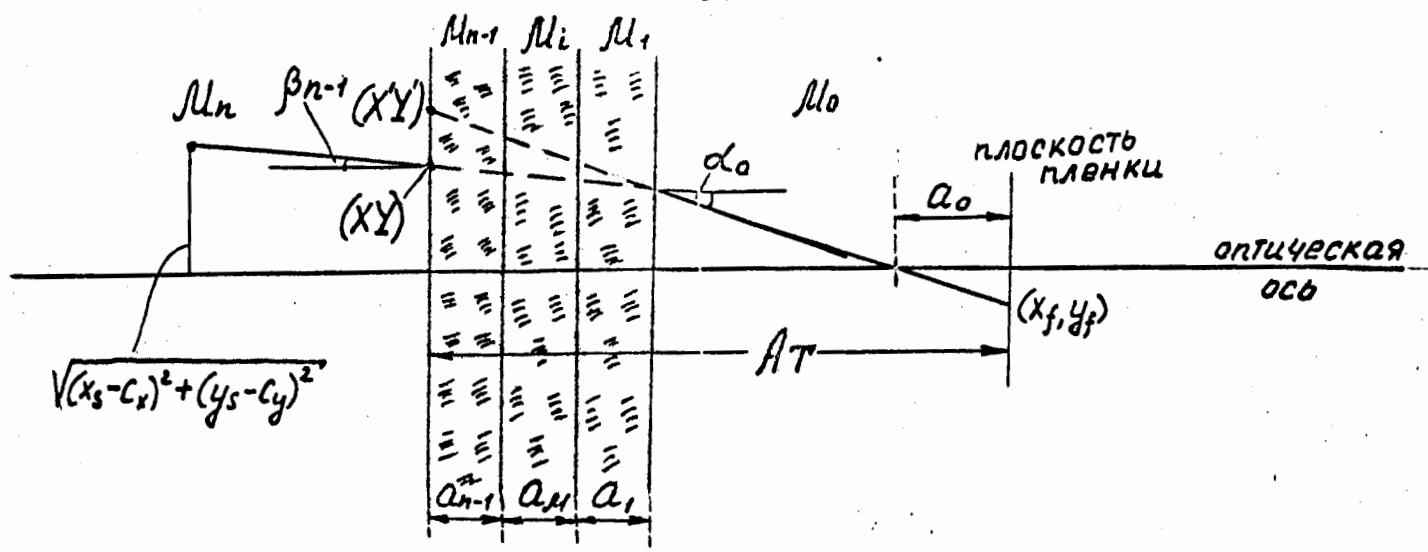


Рис. II. 2

X, Y - координаты точки пересечения светового луча с обратной стороной верхнего стекла в S системе.

$U, V, 1$ - компоненты направляющего вектора светового луча в S - системе.

Координаты произвольной точки на луче в S - системе равны:

$$(x_s, y_s, z_s) = (X + Uz_s, Y + Vz_s, z_s)$$

Имеют место формулы:

$$X = \frac{x_f}{a_0} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\mu_i} \left(1 + \frac{\mu_i^2 - 1}{\mu_i^2 a_0^2} z^2 \right)^{-1/2} + A_\pi - A_0 \right] + c_x$$

$$Y = \frac{y_f}{a_0} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\mu_i} \left(1 + \frac{\mu_i^2 - 1}{\mu_i^2 a_0^2} z^2 \right)^{-1/2} + A_\pi - A_0 \right] + c_y$$

$$U = \frac{x_f}{\mu_n a_0} \left[1 + \frac{\mu_n^2 - 1}{\mu_n^2 a_0^2} z^2 \right]^{-1/2}$$

(П.3.1)

$$V = \frac{y_f}{\mu_n a_0} \left[1 + \frac{\mu_n^2 - 1}{\mu_n^2 a_0^2} z^2 \right]^{-1/2},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$

C_x, C_y - координаты оптической оси соответствующего объектива в S - системе.

- a_0 - расстояние от объектива до пленки;
- A_T - полное расстояние от объектива до рабочей жидкости;
- $n-1$ - число стекол между объективом и рабочей жидкостью;
- a_i - толщина $i^{\text{го}}$ стекла;
- μ_i - коэффициент преломления $i^{\text{го}}$ стекла;
- A_e - полная толщина стекол = $\sum_{i=1}^{n-1} a_i$
- μ_n - коэффициент преломления рабочей жидкости.

При получении формул использовался обычный закон преломления световых лучей.

В программе *PANG* предполагается, что стекла камеры не параллельны, поэтому выражения для X, Y, U, V более сложны по сравнению с (II.3.1). В данном обзоре этот случай не рассматривается.

В программе *GRVCT* по координатам X_i, Y_i лучей проводится браковка плохо измеренных точек. Делается это следующим образом: для изображения трека на каждом кадре мы имеем набор координат точек пересечения лучей с обратной стороной верхнего стекла $\{X_i, Y_i\}$. Сначала находятся координаты средней точки X_M, Y_M прямой, соединяющей начальную X_1, Y_1 и конечную точки трека X_N, Y_N

$$X_M = \frac{1}{2} (X_1 + X_N) \quad Y_M = \frac{1}{2} (Y_1 + Y_N).$$

Затем все координаты X_i, Y_i преобразуются в систему координат с центром X_M, Y_M и осью x , проходящей через концевые точки (см. рис. II.3).

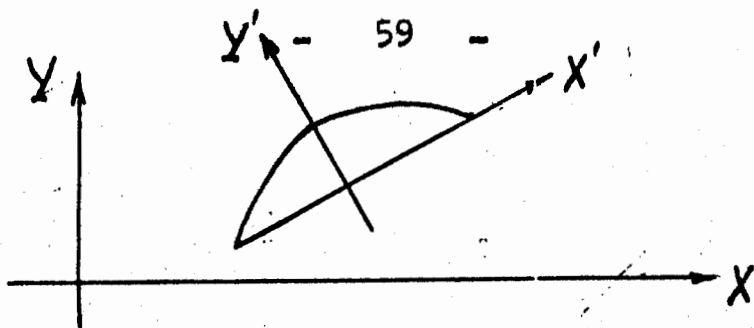


Рис. II.3

В системе $X'Y'$ методом наименьших квадратов проводится парабола $Y' = a(X')^2 + bX' + c$. Если максимальное Y' меньше, чем некоторая константа, то методом наименьших квадратов проводится прямая линия.

$$Y' = aX' + b$$

После того как найдены коэффициенты a, b, c , рассчитываются параметры окружности:

Пусть мы имеем уравнение окружности:

$$(Y' - Y'_c)^2 + (X' - X'_c)^2 = R^2$$

Тогда:

$$Y' - Y'_c = \{R^2 - (X' - X'_c)^2\}^{1/2} \cong R[1 - (X' - X'_c)^2 / 2R^2] = R - \frac{(X')^2}{2R} + X' \frac{X'_c}{R} - \frac{(X'_c)^2}{2R}$$

Разложение справедливо в случае, когда

$$(X' - X'_c)^2 / R^2 \ll 1.$$

Далее

$$a(X')^2 + bX' + c = Y'_c + R - \frac{(X')^2}{2R} + X' \frac{X'_c}{R} - \frac{(X'_c)^2}{2R}$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях X' , получим:

$$R = \frac{1}{2|a|} ; X_c' = -bR ; Y_c' = R + c - \frac{1}{2}b^2R. \quad (\text{П.3.2})$$

Преобразуя координаты обратно в систему $X'Y'$, получим такие выражения для координат центра окружности:

$$X_c = -bR \cos \vartheta - (R + c - \frac{1}{2}b^2R) \sin \vartheta + X_M$$

$$Y_c = -bR \sin \vartheta + (R + c - \frac{1}{2}b^2R) \cos \vartheta + Y_M.$$

В последних формулах R берется со знаком, выбираемым по правилу:

если $(X_N - X_1)(Y_c - Y_1) - (Y_N - Y_1)(X_c - X_1) \gg 0$, то R - полож

если _____ " _____ " _____ < 0 , то R - отриц

и

$$\operatorname{tg} \vartheta = \left(\frac{Y_N - Y_1}{X_N - X_1} \right)$$

В *THRESH* выражения для компонент лучей X, Y, U, V имеют вид, отличный от (П.3.1). Отличие возникает вследствие того, что в этой программе используются координаты "кажущихся" точек. Если через $X'Y'$ обозначить координаты "кажущейся" точки некоторого луча, то можно показать (см. рис. П.2.), что имеют место такие выражения:

$$X = X' + A_G (C_x - X') / A_T + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \operatorname{tg} \beta_{i-1} \right) \times \frac{(X' - C_x)}{\sqrt{(X' - C_x)^2 + (Y' - C_y)^2}} ;$$

$$Y = Y' + A_G (C_y - Y') / A_T + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \operatorname{tg} \beta_{i-1} \right) \times \frac{(Y' - C_y)}{\sqrt{(X' - C_x)^2 + (Y' - C_y)^2}} ;$$

$$U = \operatorname{tg} \beta_{n-1} \frac{(C_x - X')}{\sqrt{(X' - C_x)^2 + (Y' - C_y)^2}} ;$$

$$V = \operatorname{tg} \beta_{n-1} \frac{(C_y - Y')}{\sqrt{(X' - C_x)^2 + (Y' - C_y)^2}} ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \left[(X' - C_x)^2 + (Y' - C_y)^2 \right]^{1/2} / A_T ;$$

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{(\mu_0 / \mu_{i+1}) \sin \alpha_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_0}{\mu_{i+1}} \right)^2 \sin^2 \alpha_0}} .$$

Координаты $X' Y'$ находятся так, как указано в § I этой главы.

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ТРЕКА

Как известно, большая часть информации, поступающей на вход в геометрическую программу, состоит из m .

координат проекций разных точек трека на стереофотографиях.

Исключениями из этого правила служат такие точки как, например, вершина взаимодействия, точка остановки частицы и некоторые другие, изображения которых сравнительно легко идентифицируются на различных стереопроекциях.

Способы нахождения пространственных координат точек в обоих случаях различны; в первом случае говорят, что пространственные координаты точек трека находятся по координатам несоответствующих точек, во втором - по координатам соответствующих точек.

а) Нахождение точек трека по координатам соответствующих точек.

Рассмотрим, как это делается в программе *GRVCT*.

В этой программе пространственные координаты находятся минимизацией сумм квадратов расстояний на пленке от изображений искомой точки до точки с измеренными на пленке координатами. Суммирование проводится по всем стереопроекциям. В § 6 дан сравнительно подробный вывод соответствующего выражения для такого расстояния. Оно равно:

$$d^2 = W^2 \mathcal{D}^2$$
$$\mathcal{D}^2 = (x_s - X - V z_s)^2 + (y_s - Y - V z_s)^2$$

Здесь x_s, y_s, z_s - координаты искомой точки в пространстве камеры;

X, Y, U, V - компоненты луча, соответствующего измеренной точке;

W - коэффициент уменьшения; в приближении оптикой I-го порядка он равен (определение

оптики № I-го порядка смотри § 6):

$$W = \frac{\mu_n \cdot a_0}{z + z_0}$$

$$z_0 = \mu_n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\mu_i} + A_T - A_G \right].$$

Остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в формулах (П.3.1).

В этом случае ошибки координат рассчитываются стандартным методом (см. приложение).

В *THRESH* координаты пространственной точки находятся так: для всех тех кадров, на которых координаты ее изображений измерены, рассчитываются компоненты лучей X, Y, U, V .

Уравнения луча имеют вид:

$$x_s = U z_s + X \quad (\text{П.4.1})$$

$$y_s = V z_s + Y.$$

Если, например, координаты проекций точки измерены на двух стереокадрах, то всего будет четыре уравнения типа (П.4.1), т.е. система уравнений будет переопределена. Решение такой переопределенной системы находится методом наименьших квадратов; одновременно рассчитываются ошибки координат $\Delta x_s, \Delta y_s, \Delta z_s$. Если сумма $\Delta x_s + \Delta y_s + \Delta z_s$ больше, чем некоторая константа, то результат считается плохим, один из кадров выбрасывается (если число кадров больше двух) и процедура повторяется. Если ни одна из возможных комбинаций кадров не дает хорошего результата, то измерения этой точки считаются плохими и проводится ее повторное измерение.

б) Нахождение точек трека по координатам несоответствующих точек.

Опишем подробно, как находятся пространственные координаты точек названным способом в программе *GRBCT* с указанием отличий подобных процедур, проводимых в программах *PANG* и *TVGP*. Программа *GRBCT* предполагает использование трех стереопроекций трека. Из этих трех стереопроекций выбирается главная. Для этого последовательно берутся комбинации из двух стереопроекций. Из первых двух проекций выбирается такая, для которой следующая величина максимальна:

$$\frac{L}{L_{max}} + W \left[\frac{\overline{\sin^2 \vartheta_1} + \overline{\sin^2 \vartheta_2}}{\max(\sin^2 \vartheta_1, \sin^2 \vartheta_2)} \right],$$

где L - длина изображения трека;
 L_{max} - максимальное значение L для трех кадров.
 $\overline{\sin^2 \vartheta_1}, \overline{\sin^2 \vartheta_2}$ - средние значения $\sin^2 \vartheta$ для каждого из двух кадров, где ϑ - угол, образуемый касательной к проекции трека с осью X стереосистемы этих двух кадров. Они находятся как среднее значение квадрата синуса в начале и в конце трека.

W - специальный весовой множитель.

Все величины рассчитываются для изображений трека на обратной стороне верхнего стекла (т.е. для координат $X Y$). Затем из выбранной стереопроекции и оставшейся третьей проекции таким же образом выбирается стереопроекция, называемая главной для системы трех стереопроекций.

Для каждого луча с компонентами X_M, Y_M, U_M, V_M на главном изображении находятся два луча (X_1, Y_1, U_1, V_1) и (X_2, Y_2, U_2, V_2) . На одном из двух вспомогательных изображений, координаты Y_1, Y_2 которых - ближайšie к соответствующей координате на главном изображении (здесь мы уже предполагаем, что координаты обоих изображений преобразованы в одну и ту же стереосистему). Через две соседние точки X_1, Y_1 и X_2, Y_2 проводится окружность радиуса R , найденного в § 3 этой главы. Координаты центра X_c, Y_c находятся по формулам:

$$X_c = \frac{1}{2} (X_1 + X_2) \pm (Y_2 - Y_1) \left[\frac{R^2}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} - \frac{1}{4} \right]^{1/2}$$

$$Y_c = \frac{1}{2} (Y_1 + Y_2) \pm (X_2 - X_1) \left[\frac{R^2}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} - \frac{1}{4} \right]^{1/2}$$

Знак выбирается в соответствии со знаком R . Далее рассчитывается X , соответствующее $Y = Y_M$,

т.е.
$$X_s = X_c \pm [R^2 - (Y - Y_c)^2]^{1/2}$$

Если $X_1 > X_c$, то берется знак (+), в противном случае (-).

U и V находятся с помощью линейной интерполяции.

$$U = U_1 + (U_2 - U_1) \left[\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} \right]; \quad V = V_1 + (V_2 - V_1) \left[\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} \right]$$

Таким образом, мы имеем первое приближение (X_s, Y_s, U_s, V_s) для соответствующего луча. Для нахождения более точного приближения поступают следующим образом. Пусть

$$x_s = X_M + U_M \cdot Z_s \tag{П.4.1}$$

$$y_s = Y_M + V_M \cdot Z_s$$

есть уравнения выбранного луча на главном изображении. Ему соответствует некоторый луч на вспомогательном изображении, коэффициенты которого еще не определены:

$$x_s = X + U z_s \quad (\text{П.4.2})$$

$$y_s = Y + V z_s$$

Приравнивая первые уравнения в (П.4.1) и в (П.4.2), мы получим:

$$z = \frac{X_M - X}{U - U_M} \quad (\text{П.4.3})$$

Приравнивая вторые уравнения в (П.4.1) и в (П.4.2) и используя (П.4.3), приходим к формуле:

$$Y = Y_M + \frac{U_M - V}{U_M - U} (X - X_M).$$

Последняя формула используется при построении итерационной процедуры для нахождения точного значения Y и, следовательно,

X . После окончания итерационной процедуры рассчитывают

$$z = \frac{X - X_M}{U_M - U}$$

Точно также находится соответствующий луч и на втором вспомогательном кадре. По двум значениям z_1 и z_2 соответствующих лучей находится среднее взвешенное z_{cp} :

$$z_{cp} = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2}{w_1 + w_2}$$

Можно показать, что $w_i \sim \frac{1}{\sin^2 \varphi_i}$ ($i=1,2$), где $\sin^2 \varphi = \frac{(X - X_c)^2}{R^2}$.

По среднему взвешенному z_{cp} и компонентам луча главного кадра находят координаты X и Y пространственной точки.

В программе *PANG* для нахождения координат точек используется лишь две стереопроекции трека (всего их 4), причем, используются координаты точек не на обратной стороне верхнего стекла, а на плоскости пленки. Из двух стереопроекций также выбирается главная (правда, несколько отличным способом) и для каждо

измеренной на ней точке ищется соответствующая на вспомогательной стереопроекции (не путать "соответствующую точку" с "отысканием точек по координатам соответствующих точек" !). Вследствие более сложной геометрии фотографирования соответствующая точка на вспомогательном кадре ищется в виде последовательности трех приближений; координата y_f соответствующей точки определяется следующим образом: из геометрических соображений можно получить грубую формулу, связывающую координаты y_f на главном и вспомогательном кадрах - эта формула используется для расчета I-го приближения к координате y_f на вспомогательном кадре. Далее строится формула, связывающая координаты y на главной и вспомогательной стереопроециях. Коэффициенты, фигурирующие в этой формуле рассчитываются в приближении оптикой I-го порядка. Координата y на вспомогательной стереопроекции, рассчитываемая по этой формуле, называется вторым приближением. Наконец, 3-е приближение использует точную формулу для координаты y_f . В каждом приближении координата x_f соответствующей точки находится посредством квадратичной интерполяции. Затем, по координатам соответствующих точек на стереопроециях рассчитываются пространственные координаты точек трека.

В программе *TVGP* пространственные координаты точки рассчитываются почти так же как в *GRBCT*. Отличие заключается лишь в том, что в *TVGP* как и в *PANG* используются координаты трека на плоскости пленки, благодаря чему компоненты луча рассчитываются не приближенно, а по точной формуле.

В программе *THRESH* расчет пространственных координат точек трека выполняется следующим образом. Пусть для некоторой, измеренной на главном кадре, точки нужно рассчитать координаты x_s, y_s, z_s в пространстве камеры (подробности о методе выбора

главного кадра см. в [7]). Этой точке соответствуют уравнения луча:

$$\begin{aligned}x_s &= U_m \cdot Z_s + X_m \\y_s &= V_m \cdot Z_s + Y_m.\end{aligned}\tag{П.4.4}$$

Нужно на вспомогательном кадре найти такой набор значений U , V , X , Y , чтобы луч

$$\begin{aligned}x_s' &= U Z_s' + X \\y_s' &= V Z_s' + Y\end{aligned}$$

пересекал луч (П.4.4) на главном кадре. Эти два луча пересекутся когда одновременно:

$$\begin{aligned}(U_m - U) Z_s + (X_m - X) &= 0 \\(V_m - V) Z_s + (Y_m - Y) &= 0.\end{aligned}\tag{П.4.5}$$

Система уравнений (П.4.5) совместна, когда детерминант

$$\Psi(U, V, X, Y) = \begin{vmatrix} U_m - U & V_m - V \\ X_m - X & Y_m - Y \end{vmatrix} = 0$$

Функция Ψ рассчитывается для всех измерений на вспомогательном кадре и находятся также два следующие друг за другом измерения, i , $i+1$, между которыми она меняет знак.

Полагают:

$$\begin{aligned}U &= U^i + \lambda (U^{i+1} - U^i) \\V &= V^i + \lambda (V^{i+1} - V^i) \\X &= X^i + \lambda (X^{i+1} - X^i) \\Y &= Y^i + \lambda (Y^{i+1} - Y^i)\end{aligned}$$

и мы получим уравнение

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad ; \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad . \quad (\text{П.4.6})$$

Уравнение (П.4.6) решается методом линейной интерполяции относительно λ . После нахождения решения этого уравнения рассчитываются соответствующие U, V, X и Y , а затем и координаты пространственной точки. Аналогично находятся и все другие точки трека.

§ 5. НАХОЖДЕНИЕ I-ГО ПРИБЛИЖЕНИЯ К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Все рассматриваемые программы имеют более или менее различные способы нахождения I-го приближения к пространственной кривой. Опишем их поочередно.

В программе *PANG* все пространственные координаты преобразуются в систему координат, где ось x параллельна хорде трека и направлена в сторону конечной точки трека. Затем методом наименьших квадратов проводится кривая в виде:

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2$$

$$Z = \alpha_4 + \alpha_5 X.$$

Используя значения найденных параметров, рассчитывается полная длина кривой:

$$L = \int_{-R}^R \frac{ds}{dx} dx,$$

а также длина дуги

$$s = \int_0^{2/3 R} \frac{ds}{dx} dx$$

$$R = \frac{X_{\text{нач}} - X_{\text{кон}}}{2}$$

$X_{\text{нач}}$ и $X_{\text{кон}}$ - координаты начальной и конечной точек соответственно.

В программе *GRVCT* вначале делается грубая оценка угла, на который поворачивается проекция трека на плоскость xy . Угол поворота проекции трека $\vartheta \approx \delta h / s$, где s - длина хорды трека, h - стрела прогиба трека, т.е. наибольшее расстояние между треком и его хордой. Если угол ϑ и длина хорды s больше, чем некоторые определенные значения, то через x, y - координаты точек методом наименьших квадратов проводится окружность; в противном случае проводится парабола. Для проведения параболы или окружности через x, y - координаты пространственных точек вначале делается преобразование этих координат в систему $x'' y''$, где:

$$\sum_{i=1}^n (x_i'') = \sum_{i=1}^n (y_i'') = 0$$

n - число измеренных точек, т.е. координаты точек преобразуются по формулам:

$$x_j'' = x_j' - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i'$$
$$y_j'' = y_j' - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i'$$

а затем, уже в этой системе, проводится соответствующая кривая. Надо заметить, что процедура проведения окружности в этой программе отличается от того, как это делается в *TVGP* : Во-первых, в *TVGP* координаты трека преобразуются в систему координат, в которой равны нулю не только первые моменты координат, но и недиагональные элементы матрицы вторых моментов (см. § 2). Во-вторых, в программе *GRBCT* при минимизации такого же, как и в *TVGP*, по форме функционала множитель $\frac{1}{4\rho^2}$ (ρ - искомый радиус) считается постоянной величиной и не дифференцируется по ρ .

В случае, когда через x, y координаты пространственных точек проводится парабола, применяется такое же приближение, что и в § 3.

Также как и в § 3 по параметрам параболы находятся соответствующие параметры окружности: радиус и координаты центра. Делается оценка величины стрелы прогиба $h = s^2/8\rho$; если она меньше некоторой постоянной (равной удвоенной или утроенной измерительной ошибке), то через пространственные координаты проводится по м.н.к. прямая линия.

Поскольку траектория частицы в пузырьковой камере с почти однородным магнитным полем близка к спирали, считается, что она описывается уравнением вида:

$$\begin{aligned} x_s &= \alpha + \rho \cdot \cos v \\ y_s &= \beta + \rho \cdot \sin v \\ z_s &= \gamma + \rho \cdot v \cdot \operatorname{tg} \lambda \end{aligned} \quad (\text{П.5.1})$$

Если через x, y координаты пространственных точек проведена парабола или окружность, то, следовательно, уже известны величины α, β и ρ . Для каждой точки рассчитывается значение угла ϑ_i :

$$\vartheta_i = -\operatorname{arctg} \left(\frac{x_i - \alpha}{y_i - \beta} \right). \quad (\text{П.5.2})$$

Используя z - координаты пространственных точек, последнее уравнение в (П.5.1) и уравнение (П.5.2) находятся по м.н.к. параметры γ и $\operatorname{tg} \lambda$.

После того, как найдены все параметры спирали, рассчитываются импульс частицы (обычно обратную величину импульса) и углы, а также их ошибки. Когда через точки проводится по м.н.к. прямая линия, уравнения записываются в виде $y = \alpha x$ и $z = \beta + \gamma x$ и по найденным коэффициентам α, β и γ затем рассчитываются углы и их ошибки. Импульс в этом случае полагается равным некоторой постоянной величине.

В *THRESH* координаты трека преобразуются в систему координат $X' Y' Z'$, центр которой находится в начальной точке трека, а ось X' составляет угол β с осью X старой системы. Здесь β - угол, который образует касательная к проекции траектории на плоскость XY в начальной точке с осью X в первоначальной системе координат.

Уравнение винтовой линии в системе $X' Y' Z'$:

$$\begin{aligned} X' &= \rho (\cos \vartheta - 1) \\ Y' &= \rho \sin \vartheta \\ Z' &= \rho \vartheta \operatorname{tg} \lambda \end{aligned} \quad (\text{П.5.3})$$

Параметры ρ и β находятся следующим образом. Через координаты X_i и Y_i пространственных точек в первоначальной

системе координат проводится методом наименьших квадратов окружность вида:

$$(X - A)^2 + (Y - B)^2 + \lambda_1(X - A) + \lambda_2(Y - B) = 0$$

A, B, C - координаты начальной точки.

Нетрудно показать, что ρ и β выражаются следующим образом через λ_1 и λ_2 :

$$\rho = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}$$

$$\beta = \arctg(\lambda_2 / \lambda_1).$$

Для каждой пространственной точки рассчитывается угол ϑ_i :

$$\vartheta_i = \arctg \left[\frac{y_i - (B - \lambda_2/2)}{x_i - (A - \lambda_1/2)} \right] - \beta.$$

Используя углы ϑ_i и третье уравнение в (П.2.5), методом наименьших квадратов определяется $\tg \lambda$.

Наконец, в программе TVGP непосредственному проведению кривой предшествует выполнение некоторых процедур; мы их вкратце опишем.

Из массива восстановленных пространственных точек определенным образом выбираются начальная, средняя и конечная точки трека. Через X, Y - координаты этих трех точек простым геометрическим построением проводится окружность и рассчитываются радиус и координаты центра этой окружности. Одновременно рассчитываются и некоторые другие параметры как, например, θ - полный угол поворота трека, тангенс угла наклона спирали - $\tg \lambda$.

При восстановлении пространственных точек иногда встречаются треки, которые направлены почти параллельно базе фотографирования для каких-нибудь двух объектов. По проекциям треков на фотографиях, полученных с помощью этих объективов, можно найти компоненты оптических лучей; однако, точное определение координат точек, расположенных в достаточно малой окрестности трека и лежащих на лучах, невозможно. Поэтому в *ТВГР* предусмотрена процедура, которая отыскивает точку пересечения некоторого луча с так называемой винтовой поверхностью, определяемой следующим образом: пусть мы имеем спираль, ось которой вертикальна. Проведем через ось и некоторую точку на спирали прямую, параллельную плоскости, перпендикулярной оси спирали. Будем двигать прямую так, чтобы она была все время параллельна этой плоскости и проходила через ось и спираль; полученная поверхность и будет винтовой поверхностью.

Опишем процедуру нахождения точки пересечения (точнее говоря, угла, соответствующего точке пересечения) некоторого луча с такой поверхностью.

Уравнение винтовой поверхности:

$$z = z_0 + \rho \vartheta \quad (\text{П.5.4})$$

$$(y - y_0) = (x - x_0) \operatorname{tg} \vartheta, \quad (\text{П.5.5})$$

где $\rho = r \operatorname{tg} \lambda$

ρ - радиус круга в проекции на плоскость xy ;

λ - угол наклона винтовой линии к плоскости xy .

Уравнение луча:

$$x = Ax + Bx z \quad (\text{П.5.6})$$

$$y = Ay + By z$$

ясно, что для точки пересечения луча с винтовой поверхностью уравнения (П.5.4), (П.5.5) и (П.5.6) должны выполняться одновременно. Подставляя (П.5.4) в (П.5.6), а затем (П.5.6) в (П.5.5) получим такое уравнение:

$$(U + V \cdot \vartheta) \cos \vartheta + (W + Y \cdot \vartheta) \sin \vartheta \equiv g(\vartheta) = 0. \quad (\text{П.5.7})$$

Здесь

$$U = -Ay - By z_0 + y_0$$

$$V = -By \rho$$

$$W = Ax + Bx z_0 - x_0$$

$$Y = Bx \rho.$$

Пусть ϑ_n - приближенное значение корня уравнения (П.5.7)

Тогда более точное значение угла ϑ с точностью до членов 3-го порядка малости равно:

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n - \frac{g(\vartheta_n)}{g'(\vartheta_n)} - \frac{1}{2} \left(\frac{g(\vartheta_n)}{g'(\vartheta_n)} \right)^2 \frac{g''(\vartheta_n)}{g'(\vartheta_n)}. \quad (\text{П.5.8})$$

Формула (П.5.8) получается, если использовать известный метод Чебышева [9].

Начальное значение для угла рассчитывается по формуле:

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 + (\gamma/N) \theta,$$

где J - номер точки;
 N - число точек на кадре.

Используя ранее найденные параметры окружности, находится средняя точка окружности и затем, пользуясь координатами всех пространственных точек, рассчитываются длины соответствующих им круговых дуг. Эти дуги отсчитываются от средней точки дуги окружности и берутся со знаком (+), если точка ближе к концу трека и со знаком (-), если точка ближе к началу.

Таким образом, перед непосредственным проведением пространственной кривой для каждой измеренной на одном из 2-х или 3-х кадров точки имеются:

1. Компоненты оптического луча в рабочем объеме камеры;
2. Точка на этом луче, близкая к "истинной" пространственной точке;
3. Длина дуги, отсчитанная от средней точки дуги окружности.

Цель остальной части программы - провести пространственную кривую, которая одновременно учитывает и изменение магнитного поля, и потери энергии, и минимизирует сумму квадратов расстояний между измеренными точками и изображением такой кривой на пленке. В этой программе такая кривая определяется набором из пяти параметров, которыми являются координаты x или y и z средней точки трека, χ_0 - угол, который образует касательная к проекции трека на плоскость xy в средней точке, тангенс угла наклона и кривизна трека в этой же точке, а в качестве аргумента u используется длина вдоль проекции кривой на плоскость xy , отсчитываемая от средней точки (т.е. длины круговых дуг).

Основной частью всей процедуры проведения пространственно

кривой служит предположение о линейной зависимости радиуса кривизны проекции траектории на плоскость xy от длины проекции кривой на ту же плоскость. Чтобы учесть большие вариации кривизны трека вследствие энергетических потерь, весь трек разбивается на две части и выражение для кривизны задается в каждой из них независимо.

Опишем основные моменты проведения кривой. Исходное уравнение имеет вид:

$$\rho(s) \frac{d\vec{n}}{ds} = (e/c) \vec{n} \times \vec{B}, \quad (\text{П.5.9})$$

где \vec{n} - единичный, касательный к траектории вектор;

\vec{B} - магнитное поле в кгаусс;

s - полная (не спроектированная на плоскость xy) длина трека;

ρ - импульс в Мэв/с.

Обозначим через ψ - угол, который образует касательная к проекции траектории на плоскость xy с осью x .

Тогда

$$\text{tg } \psi = \frac{n_y}{n_x}; \quad \kappa = d\psi/ds.$$

Где κ - кривизна проекции трека на плоскость xy .

После некоторых преобразований можно показать, что:

$$\kappa(u) = \pm \frac{1}{\rho(u)} |C_p(u)|, \quad (\text{П.5.10})$$

где $C_p(u) = \frac{|e|c|}{\cos^2 \lambda} [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{B})]_z =$

$$\frac{|e|c|}{\cos^2 \lambda} [(B_x \cos \psi + B_y \sin \psi) \sin \lambda - B_z \cos \lambda],$$

Знак в (П.5.10) выбирается в зависимости от знака кривизны. Так можно показать, что

$$\frac{d \operatorname{tg} \lambda}{d u} = \frac{d^2 z}{d u^2} = \frac{1}{\rho(u)} C_z(u) \quad (\text{П.5.11})$$

$$C_z = \pm \frac{|e/c|}{\cos^3 \lambda} (B_y \cos \psi - B_x \sin \psi).$$

Константа e/c численно равна 0,299793.

В качестве начального приближения к пространственной кривой берется спираль, проекция которой на плоскость xy есть окружность, параметры которой были рассчитаны. Величина C_p рассчитывается в пяти точках (т.е. для $u = 0, -\frac{L}{2}, -L, +\frac{L}{2}, +L$), а C_z в 2-х точках) $u = -\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}$.

В качестве I-го приближения для импульса в средней части трека берется величина $\rho_0 = \rho_0 / C_p(u=0)$, где ρ - радиус окружности, ранее рассчитанный; u - аргумент.

Значение $u = 0$ соответствует средней точке. Задаваясь определенной гипотезой о массе частицы, рассчитывается импульс в 4-х других точках на спирали, по известной зависимости пробег-импульс. Зная величины импульса в пяти точках на спирали, можно рассчитать по (П.5.10) кривизну K в этих точках и C_z по (П.5.11) в двух точках $u = \pm L/2$. Делается предположение, что кривизна и $\operatorname{tg} \lambda$ имеют такую функциональную зависимость от u

$$K(u) = \begin{cases} \frac{A_-}{1+b_- \cdot u} & \text{для } u \leq 0 \\ \frac{A_+}{1+b_+ \cdot u} & \text{для } u > 0 \end{cases} \quad (\text{П.5.12})$$

$$z(u) = z(u=0) + S_0 \cdot u + t_1 u^2 + t_2 u^3$$

Авторы утверждают, что выбор коэффициентов в виде (П.5.13) вполне удовлетворителен на практике:

$$b_{\pm} = \frac{1}{(\pm \mathcal{L})} \left[\frac{\kappa(0) - \kappa(\pm \mathcal{L})}{\kappa(\pm \mathcal{L})} \right];$$

$$A_{\pm} = \frac{1}{6} \left[\kappa(0) + 4 \left(1 \pm \frac{1}{2} b_{\pm} \mathcal{L} \right) \cdot \kappa \left(\pm \frac{\mathcal{L}}{2} \right) + \left(1 \pm b_{\pm} \mathcal{L} \right) \cdot \kappa(\pm \mathcal{L}) \right];$$

$$t_1 = \frac{1}{4} \left[\mathcal{Z}'' \left(\frac{\mathcal{L}}{2} \right) + \mathcal{Z}'' \left(-\frac{\mathcal{L}}{2} \right) \right] \quad (\text{П.5.13})$$

$$t_2 = \frac{1}{6\mathcal{L}} \left[\mathcal{Z}'' \left(\frac{\mathcal{L}}{2} \right) - \mathcal{Z}'' \left(-\frac{\mathcal{L}}{2} \right) \right].$$

Теперь можно проинтегрировать функции (П.5.12) с тем, чтобы получить выражение для угла, образуемого касательной к проекции траектории на плоскость $xу$ с осью x , а также координат x, y, z любой точки на траектории. Для этого нужно знать начальные значения параметров $\Psi(0) = \chi_0$, или y и z для $u=0$.

Выражение для азимутального угла χ_m средней измеренной точки (не надо путать ее с точкой, соответствующей $u=0$) таково:

$$\chi_m = \chi_0 + \Psi_m$$

$$\Psi_m = \int_0^{u_m} du' \kappa(u').$$

Выражение для координат той же точки в комплексных обозначениях

$$\zeta_m = (\xi_0 + i\eta_0) + \int_0^{u_m} du \cdot \exp\{i(\Psi(u) + \chi_0)\} =$$

$$(\xi_0 + i\eta_0) + e^{i\chi_0} F(u_m);$$

(П.5.14)

$$F_{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}}(u_m) = \int_0^{u_m} \begin{Bmatrix} \cos \Psi(u') \\ \sin \Psi(u') \end{Bmatrix} du'.$$

Беря комплексную и реальную части выражения (П.5.14), получим соответственно x и y координаты средней измеренной точки

Затем действует следующее правило: если проекция трека на плоскость $xу$ поворачивается на малый угол, то начальные значения параметров находятся с помощью уже проведенной спирали и далее программа переходит к построению и минимизации соответствующего функционала (см. § 6).

Если же трек поворачивается на большой угол, то производится уточнение начальных значений параметров так, как это изложено ниже.

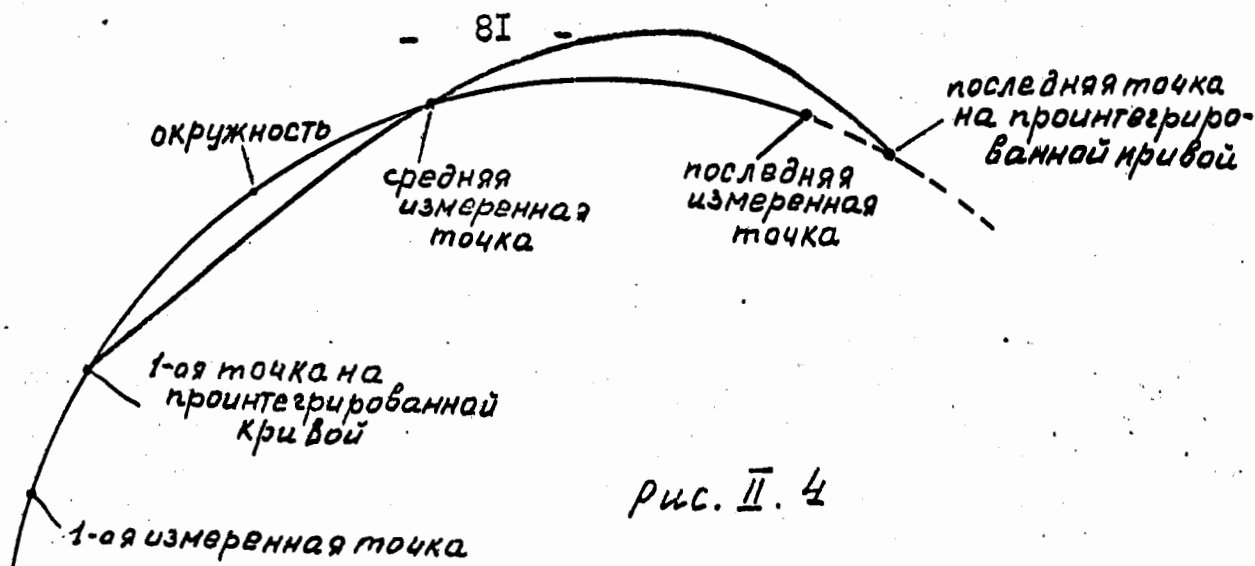
Запишем выражения координат первой и последней точек (первая и последняя точки соответствуют $u = \mp L$):

$$z_{e,f} = z_m + \int_{u_m}^{\pm L} du \cdot \exp \left\{ i \left[\chi_m + \int_{u_m}^u \kappa(u') du' \right] \right\} =$$

$$z_m + \exp \left\{ i \left[\chi_m - \Psi(u_m) \right] \right\} \cdot F_{\pm} \quad ;$$

$$F_{\pm} = F(\pm L) - F(u_m).$$

Поскольку мы взяли другую функциональную зависимость, первая и последняя точки на проинтегрированной кривой, вообще говоря, не лежат на окружности. Поэтому угол χ_m средней точки и масштаб кривой изменяются так, чтобы эти точки лежали на окружности, т.е. чтобы картина соответствовала рисунку:



$$\text{и } z_{e,f}'' = z_m + S_1 \cdot \exp\{i[\chi_m - \Psi(u_m)]\} F_{\pm}.$$

Для средней измеренной точки мы имеем такое соотношение:

$$z_m = z_c + \rho \exp(i\Phi_m),$$

где z_c - центр круга;

Φ_m - азимут радиуса-вектора в средней измеренной точке по отношению к центру окружности z_c .

Потребуем, чтобы

$$|z_{e,f}'' - z_c|^2 = \rho^2. \quad (\text{П.5.15})$$

Поскольку (П.5.15) должно удовлетворяться для 2-х точек (1-ой и последней) и мы имеем два неизвестных S_1 и χ_m , то получается система двух уравнений с двумя неизвестными.

Решения таковы:

$$S_1 = -\frac{2\rho}{|F_{-}|^2} \operatorname{Re}\{\exp(i\chi') F_{-}\}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \chi' &= \\ &= \frac{(F_{+y}/|F_{+}|^2 - F_{-y}/|F_{-}|^2)}{(F_{+x}/|F_{+}|^2 - F_{-x}/|F_{-}|^2)}, \end{aligned} \quad (\text{П.5.16})$$

где

$$\chi' = \chi_m - \Psi_m - \Phi_m.$$

Учтем изменение масштаба кривой (коэффициент S_1) в выражениях для кривизны и для \mathcal{L} . Поскольку расстояния увеличиваются в S_1 раз, а кривизна - есть обратное расстояние, то мы должны кривизну и величины, пропорциональные кривизне, умножить на $(S_1)^{-1}$. Аналогично для t_1 и t_2 :

$$\{\kappa, A_{\pm}, t_1, t_2\} \rightarrow (S_1)^{-1} \{\kappa, A_{\pm}, t_1, t_2\}.$$

Теперь найдем коэффициенты $\mathcal{L}^{(1)}(u=0)$ и $S_0^{(1)}$ в (П.5.12).

Мы имеем два неизвестных параметра и три уравнения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \mathcal{L}^{(1)}(u=0) + S_0^{(1)} \mathcal{L} + t_1 \mathcal{L}^2 + t_2 \mathcal{L}^3 \\ \mathcal{L}_m &= \mathcal{L}^{(1)}(u=0) + S_0^{(1)} \mathcal{L}_m + t_1 \mathcal{L}_m^2 + t_2 \mathcal{L}_m^3 \\ \mathcal{L}_f &= \mathcal{L}^{(1)}(u=0) - S_0^{(1)} \mathcal{L} + t_1 \mathcal{L}^2 - t_2 \mathcal{L}^3. \end{aligned} \quad (\text{П.5.17})$$

Во втором уравнении u мало и поэтому уравнение не чувствительно к $S_0^{(1)}$. Вследствие этого $S_0^{(1)}$ рассчитывается из первого и третьего уравнений:

$$S_0^{(1)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} (\mathcal{L}_e - \mathcal{L}_f) - t_2 \mathcal{L}^2 = S^{(0)} - t_2 \mathcal{L}^2,$$

где $S^{(0)}$ - первоначальное значение этого коэффициента.

Наконец $\mathcal{L}^{(1)}(u=0)$ рассчитывается с помощью второго уравнения в (П.5.16).

Используя измененные значения коэффициентов (П.5.12), определяется новое значение Ψ_m , а по (П.5.16) новые χ_m и χ_0 . Затем рассчитываются координаты x, y точки $u =$ и новые длины дуг. Сравниваем первые и последние точки на проинтегрированной кривой и на окружности. Обозначим через $\delta \vec{R}$

Учтем изменение масштаба кривой (коэффициент S_1) в выражениях для кривизны и для \mathcal{L} . Поскольку расстояния увеличиваются в S_1 раз, а кривизна — есть обратное расстояние, то мы должны кривизну и величины, пропорциональные кривизне, умножить на $(S_1)^{-1}$. Аналогично для t_1 и t_2 :

$$\{\kappa, A_{\pm}, t_1, t_2\} \rightarrow (S_1)^{-1} \{\kappa, A_{\pm}, t_1, t_2\}.$$

Теперь найдем коэффициенты $\mathcal{L}^{(1)}(u=0)$ и $S_0^{(1)}$ в (П.5.12).

Мы имеем два неизвестных параметра и три уравнения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \mathcal{L}^{(1)}(u=0) + S_0^{(1)} \mathcal{L} + t_1 \mathcal{L}^2 + t_2 \mathcal{L}^3 \\ \mathcal{L}_m &= \mathcal{L}^{(1)}(u=0) + S_0^{(1)} u_m + t_1 u_m^2 + t_2 u_m^3 \\ \mathcal{L}_f &= \mathcal{L}^{(1)}(u=0) - S_0^{(1)} \mathcal{L} + t_1 \mathcal{L}^2 - t_2 \mathcal{L}^3. \end{aligned} \quad (\text{П.5.17})$$

Во втором уравнении u мало и поэтому уравнение не чувствительно к $S_0^{(1)}$. Вследствие этого $S_0^{(1)}$ рассчитывается из первого и третьего уравнений:

$$S_0^{(1)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} (\mathcal{L}_e - \mathcal{L}_f) - t_2 \mathcal{L}^2 = S^{(0)} - t_2 \mathcal{L}^2,$$

где $S^{(0)}$ — первоначальное значение этого коэффициента.

Наконец $\mathcal{L}^{(1)}(u=0)$ рассчитывается с помощью второго уравнения в (П.5.16).

Используя измененные значения коэффициентов (П.5.12), определяется новое значение Ψ_m , а по (П.5.16) новые χ_m и χ_0 . Затем рассчитываются координаты x, y точки $u=0$ и новые длины дуг. Сравниваем первые и последние точки на проинтегрированной кривой и на окружности. Обозначим через $\vec{S\tilde{R}}$

- вектор, соединяющий соответствующие (первую и последнюю) измеренную точку и точку на проинтегрированной кривой. Спроектируем этот вектор на касательную в соответствующей точке:

$$u_{\pm} = \delta \vec{R}_{\pm} \cdot \vec{n}_{\pm}$$

\vec{n}_{\pm} - касательный единичный вектор.

Знак (+) соответствует 2-ой части трека, ближе к концу.

Знак (-) - первой части трека.

Скорректированная длина каждой проекции кривой:

$$L'_{\pm} = S_1 L_{\pm} - u_{\pm}.$$

Поправочные коэффициенты:

$$S_{3,2} = \frac{L'_{\pm} - L_{\pm}}{L_{\pm}}.$$

Величины всех дуг изменяются в соответствии с поправочным коэффициентом:

$$\text{дуга } \pm \rightarrow \text{дуга } \pm \cdot (1 + S_{3,2}).$$

В итоге мы имеем скорректированные значения $\chi_0, \text{tg } \lambda$, кривизны и координат x и y средней точки.

§ 6. УТОЧНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКА

а) Программа PANG:

За основу берется уравнение движения, которое имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = 0,3 \vec{B} \times \vec{n} + f(v) \cdot \vec{n}.$$

где

ds - элемент длины траектории в см.

\vec{n} - единичный касательный к траектории частицы вектор, компоненты которого $n_x = \frac{dx}{ds}$,

$$n_y = \frac{dy}{ds}, \quad n_z = \frac{dz}{ds}$$

\vec{B} - вектор магнитного поля в килогауссах;

\vec{p} - импульс частицы в килогауссах;

$f(v)$ - для данной массы известная функция скорости, соответствующая торможению.

Обозначим $\rho = |\vec{p}|$. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{n} \frac{d\rho}{ds} + \rho \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}. \quad (\text{П.6.1})$$

Первый член в правой части уравнения (П.6.1) соответствует потере энергии частицы, т.е.

$$\vec{n} \frac{d\rho}{ds} = f(v) \vec{n}.$$

Окончательно мы приходим к уравнению:

$$\vec{p} \frac{d\vec{n}}{ds} = 0,3 \vec{B} \times \vec{n}. \quad (\text{П.6.2})$$

Можно показать, используя последнее уравнение, что имеют место такие соотношения:

$$\rho \frac{d^2 y_s}{d x_s^2} = \frac{0,3}{n_x^3} [\vec{B} - \vec{n} (\vec{B} \vec{n})]_z = \kappa_y(\vec{n}, \vec{B})$$

(П.6.3)

$$\rho \frac{d^2 z_s}{d x_s^2} = \frac{0,3}{n_x^3} [\vec{B} - \vec{n} (\vec{B} \vec{n})]_y = \kappa_z(\vec{n}, \vec{B})$$

Магнитное поле известно; известны также приближенные уравнения траектории (см. § 5), из которых мы можем рассчитать \bar{n} .

В точках $x_s = 0, +2/3 R, -2/3 R$ рассчитываются значения K_y и K_x . Определяется значение импульса в точке $x_s = 0$, т.е.

$$p(x_s = 0) = \frac{K_y(x_s = 0)}{d^2 y_s / dx_s^2 |_{x_s = 0}}$$

Принимая определенную гипотезу о массе частицы и, используя известную зависимость пробег-импульс, рассчитываются значения импульса в точках $x_s = 2/3 R$ и $x_s = -2/3 R$. Возвращаясь опять к уравнениям (П.6.3) и зная $K_y(x_s = \pm 2/3 R)$ и $K_z(x_s = \pm 2/3 R)$ определяются

$$\frac{d^2 y_s}{dx_s^2} \Big|_{x_s = 2/3 R} ; \quad \frac{d^2 y_s}{dx_s^2} \Big|_{x_s = -2/3 R} \quad (\text{П.6.4})$$

Положим $\frac{d^2 z_s}{dx_s^2} \Big|_{x_s = 2/3 R} ; \quad \frac{d^2 z_s}{dx_s^2} \Big|_{x_s = -2/3 R}$.

$$1. \quad \frac{d^2 y_s}{dx_s^2} = d + e x_s + f x_s^2 \quad (\text{П.6.5})$$

$$2. \quad \frac{d^2 z_s}{dx_s^2} = n + \sigma x_s$$

Из первого уравнения в (П.6.5) можно найти коэффициенты d, e, f . Для этого нужно знать по меньшей мере три значения $d^2 y_s / dx_s^2$. Одно из них было уже раньше рассчитано для точки $x_s = 0$ (см. § 5). Два других значения берутся из (П.6.4) и в результате

получается система трех линейных уравнений для коэффициентов d, e, f . Для нахождения коэффициентов n, σ берутся значения $d^2 \mathcal{Z}_s / dx_s^2$ из (П.6.4). Если проинтегрировать уравнения (П.6.3), то мы приходим к таким выражениям $y_s(x_s)$ и $\mathcal{Z}_s(x_s)$:

$$y_s(x_s) = \alpha_1 + \alpha_2 x_s + \alpha_3 (D x_s^2 + E x_s^3 + F x_s^4)$$

$$\mathcal{Z}_s(x_s) = \alpha_4 + \alpha_5 x_s + N x_s^2 + \Sigma x_s^3,$$

где $D = d/2$; $E = e/6$; $F = f/12$; $N = n/2$; $\Sigma = \sigma/6$.

По м.н.к. определяются параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4, α_5 .

Строго говоря, α_3 должно быть равно 1, но оно специально оставляется как еще неопределенный параметр с тем, чтобы улучшить приближение. Используя найденные коэффициенты, рассчитываются направления (т.е. вектор \vec{n}) частицы в начальной и конечной точках трека, а также новое значение импульса в точке $x_s = 0$. По таблице пробег-импульс рассчитываются значения импульса в начальной и конечной точках. Для оценки уровня достоверности последней процедуры м.н.к. рассчитываются значения

$$S_{xy} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{[y_s^i - F_1(x_s^i)]^2}{n-3} \right\}^{1/2}$$

$$S_z = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{[\mathcal{Z}_s^i - F_2(x_s^i)]^2}{n-2} \right\}^{1/2}$$

б) THRESH

В *THRESH* уточнение кинематических параметров трека состоит в нахождении малых поправок к параметрам $\beta, \rho, \operatorname{tg} \lambda, A(\text{или } B), C$ спирали. Мы имеем такие уравнения:

$$\begin{cases} x_s = F_x^{ij} z_s + G_x^{ij} \\ y_s = F_y^{ij} z_s + G_y^{ij} \end{cases} \quad (\text{П.6.6})$$

$$\begin{cases} x'_s = \rho (\cos v - 1) \\ y'_s = \rho \cdot \sin v \\ z'_s = \rho \cdot v \operatorname{tg} \lambda \end{cases} \quad (\text{П.6.7})$$

Уравнения (П.6.6) - уравнения луча, соответствующего измеренной точке; уравнения (П.6.7) - уравнения спирали, которую нужно провести "наилучшим образом".

Прежде чем находить поправки к соответствующим параметрам, нужно найти углы v_{ij} для каждого луча (здесь i - номер измеренной точки, j - номер кадра). Это делается следующим образом:

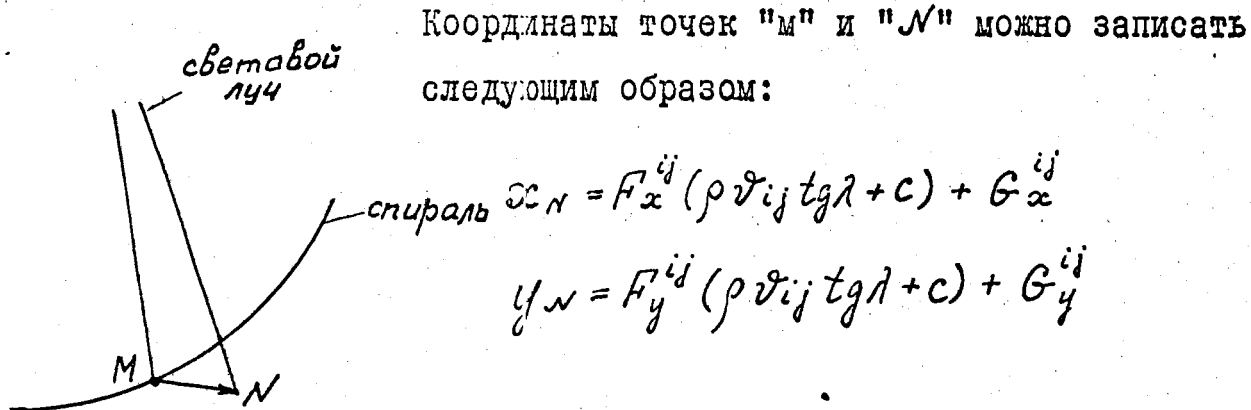
Сначала в уравнениях (П.6.6) z_s полагается равным C и рассчитываются соответствующие x_s и y_s , т.е. иначе говоря, ищется точка пересечения луча с плоскостью $z_s = C$.

Для этих значений x_s и y_s из простых геометрических соображений рассчитывается соответствующее значение угла

v , при этом используются те значения параметров спирали, которые были найдены в § 5. По углу v и третьему из уравнений в (П.6.7) рассчитывается новое z'_s и соответствующее z_s , которое вновь подставляется в уравнения (П.6.6) и т.д. до тех пор, пока итерационный процесс не сойдется. Теперь каждому лучу соответствует угол v_{ij} . Этому углу соответствует некоторая

точка "М" на спирали; пусть ее координаты x_M, y_M, z_M в системе координат x_s, y_s, z_s .

Обозначим через $N (x_N, y_N, z_N)$ точку пересечения луча, которому соответствует угол ϑ_{ij} , с плоскостью $z_s = z_M$ (см. рис. 2.5)



Координаты точек "М" и "N" можно записать следующим образом:

$$x_N = F_x^{ij} (\rho \vartheta_{ij} \operatorname{tg} \lambda + c) + G_x^{ij}$$

$$y_N = F_y^{ij} (\rho \vartheta_{ij} \operatorname{tg} \lambda + c) + G_y^{ij}$$

Рис. II.5

$$x_M = \rho \cos \beta (\cos \vartheta_{ij} - 1) - \rho \sin \beta \cdot \sin \vartheta_{ij} + A$$

$$y_M = \rho \cos \beta \sin \vartheta_{ij} + \rho \sin \beta (\cos \vartheta_{ij} - 1) + B$$

Тогда вектор \overrightarrow{MN} имеет такие компоненты:

$$\overrightarrow{MN} \{ f_1(\vartheta_{ij}, \rho, \beta, \operatorname{tg} \lambda, A, c), f_2(\vartheta_{ij}, \rho, \beta, \operatorname{tg} \lambda, A, c), 0 \}$$

$$f_1(\vartheta_{ij}, \rho, \beta, \operatorname{tg} \lambda, A, c) = x_N - x_M$$

$$f_2(\vartheta_{ij}, \rho, \beta, \operatorname{tg} \lambda, A, c) = y_N - y_M.$$

Квадрат длины вектора \overrightarrow{MN} равен $D^2 = f_1^2 + f_2^2$

Если мы спроектируем вектор \overrightarrow{MN} на плоскость пленки, то длина проекции вектора на плоскость пленки равна:

$$d = \mu D.$$

Здесь μ - коэффициент уменьшения, рассчитываемый в приближении оптикой I-го порядка.

Поправки к параметрам спирали находятся путем применения соответствующей итерационной процедуры при минимизации суммы квадратов расстояний d^2_{ij} для всех кадров и для всех лучей. Затем по параметрам спирали рассчитываются кинематические величины трека.

Легко понять, что такая процедура будет давать правильные физические результаты в случае, когда магнитное поле в камере постоянно и энергетические потери пренебрежимо малы, поскольку траектория частицы имеет вид спирали именно в таком случае.

По-видимому, к настоящему моменту в *THRESH* реализована подпрограмма [4], которая учитывает и неоднородность магнитного поля и энергетические потери. В этой подпрограмме предполагается, что компоненты H_x и H_y малы по сравнению с H_z и считается, что между импульсом и пробегом существует соотношение типа $\rho \sim (1 \pm |S|/R_0)^{\alpha}$, где R_0 - полный пробег, соответствующий начальному импульсу ρ_0 . Импульс в этой подпрограмме может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от знака заряда. Нужно отметить, что вид исходного выражения для минимизируемого функционала в этой подпрограмме таков же, что и в программе *GRBCT*.

в) *GRBCT*

Для правильной идентификации событий необходимо точное знание ошибок определяемых кинематических переменных. В этом отношении метод, предложенный впервые Ф. Солмитцем и реализованный в программе *GRBCT*, позволяет просто рассчитывать

ошибки кинематических переменных. В соответствии с этим методом параметры спирали находятся путем минимизации суммы $\sum d_i^2$ по всем световым лучам и кадрам. Здесь d_i - есть расстояние от точки, где i -ый луч пересекает так называемую номинальную плоскость пленки, до проекции спирали на эту же плоскость. Сначала дадим то понятие номинальной плоскости, которое используется в программе, и поясним, как получается изображение некоторой точки внутри камеры на этой плоскости.

Допустим, что справедлива оптика I-го порядка, т.е. в подкоренных выражениях формул (П.3.1) вторые члены пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Тогда для компонент луча получают-ся такие выражения:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_f}{a_0} \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\mu_i} + A_T - f_G \right] \\ Y &= \frac{y_f}{a_0} \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\mu_i} + A_T - A_G \right] \\ U &= \frac{x_f}{a_0 \cdot \mu_n}; \quad V = \frac{y_f}{a_0 \cdot \mu_n} \end{aligned} \quad (\text{П.6.8})$$

Как и прежде, X, Y - координаты точки пересечения луча с обратной стороной верхнего стекла; U, V - компоненты направляющего вектора луча. Ось Z одна и та же для S и f - систем.

Назовем номинальной плоскостью пленки плоскость, перпендикулярную к оси $O_s Z_s$, с которой луч (П.6.8) пересекается в точке с координатами x_f, y_f в "f" - системе, а плоскостью объектива - плоскость, которую тот же луч пересекает в точке

$x_s = y_s = 0$. Найдём положение номинальной плоскости, а также плоскости объектива.

Пусть Z^a координата некоторой точки на луче с компонентами (П.6.8) равна Z_z .

Тогда x -ая и y -ая координаты той же точки будут равны:

$$x_z = \frac{x_f}{a_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{M_i} + A_T - A_G + \frac{z_z}{M_n} \right\}$$

$$y_z = \frac{y_f}{a_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{M_i} + A_T - A_G + \frac{z_z}{M_n} \right\}.$$

Обозначим через z_0 и A_0 расстояние от обратной стороны верхнего стекла до плоскости объектива и от плоскости объектива до номинальной плоскости пленки (см. рис. II.6).

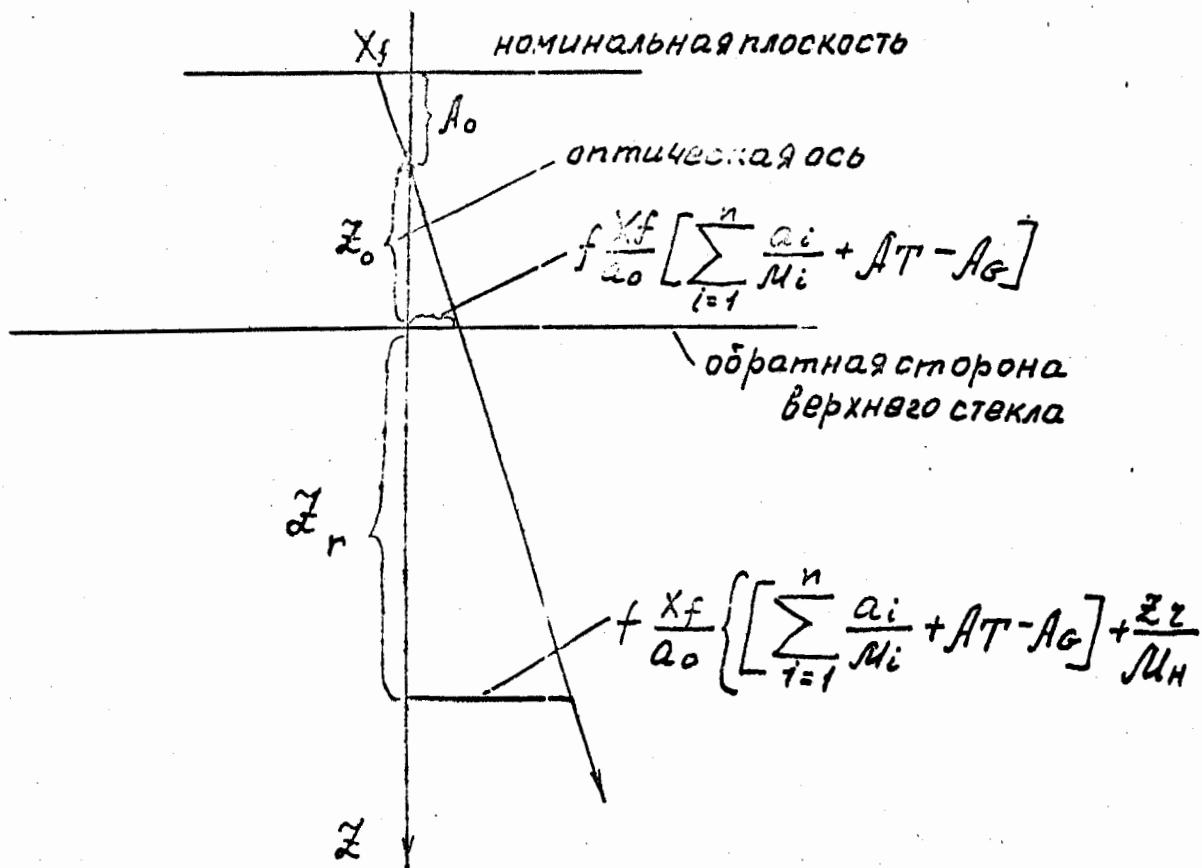


Рис. II.6'

Имеем такие соотношения:

$$\frac{Z_0}{\frac{x_f}{a_0} \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\mu_i} + A_T - A_G \right]} = \frac{Z_2}{\frac{x_f}{a_0} \mu_n}$$

$$Z_0 = \mu_n \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\mu_i} + A_T - A_G \right].$$

Аналогично

$$\frac{x_f}{A_0} = \frac{\frac{x_f}{\mu_n \cdot a_0} Z_2}{Z_2}$$

$$A_0 = a_0 \cdot \mu_n.$$

Теперь решим в некотором смысле обратную задачу. Будем отсчитывать все координаты в "S" - системе; тогда уравнения плоскости объектива и пленки в этой системе имеет вид соответственно $Z_c = -Z_0$, $Z_f = -Z_0 - A_0$. Нетрудно видеть, что координаты объектива x_c, y_c, z_c для некоторого луча с компонентами X_1, Y_1, V_1, V_1 равны:

$$(x_c, y_c, z_c) = (X_1 - V_1 Z_0, Y_1 - V_1 Z_0, -Z_0). \quad (\text{П.6.9})$$

Аналогично для координат точки пересечения этого же луча с номинальной плоскостью пленки:

$$(x_F, y_F, z_F) = (X_1 - V_1(Z_0 + A_0), Y_1 - V_1(Z_0 + A_0), -Z_0 - A_0) \quad (\text{П.6.10})$$

Далее, пусть в окружности луча в объеме камеры имеется точка x, y, z . Найдем координаты "изображения" x'_R, y'_R этой точки на номинальной плоскости. Поскольку луч, соответствующий точке (x, y, z) , пройдет через объектив (т.е. точку с координатами (П.6.9)), уравнение луча будет таково:

$$(x', y', z') = (X_1 - U_1 z_0, Y_1 - V_1 z_0, -z_0) + t(x - X_1 + U_1 z_0, y - Y_1 + V_1 z_0, z + z_0),$$

где x', y', z' - произвольная точка на луче;
 t - соответствующий ей параметр.

Положим $z' = -z_0 - A_0 = -z_0 + t(z + z_0)$.

или

$$t = -\frac{A_0}{z + z_0}$$

Тогда

$$(x'_R, y'_R) = (X_1 - U_1 z_0 - \frac{A_0}{z + z_0} (x - X_1 + U_1 z_0), Y_1 - V_1 z_0 - \frac{A_0}{z + z_0} (y - Y_1 + V_1 z_0))$$

Отсюда

$$x_R - x'_R = X_1 - U_1(z_0 + A_0) - X_1 + U_1 z_0 + \frac{A_0}{z + z_0} (x - X_1 + U_1 z_0) = \frac{A_0}{z + z_0} (x - X_1 - U_1 z)$$

(П.6.11)

Аналогично

$$y_R - y'_R = \frac{A_0}{z + z_0} (y - Y_1 - V_1 z)$$

(П.6.12)

Здесь $\frac{A_0}{z + z_0} = \mu$

- коэффициент уменьшения.

Тогда для расстояния d между этими двумя точками получаем:

$$d^2 = \mu^2 [(x - X_1 - V_1 z)^2 + (y - Y_1 - V_1 z)^2]$$

Теперь можно перейти к изложению способа проведения аппроксимирующей кривой. Уравнение аппроксимирующей кривой записывается в виде:

$$x = \alpha + \rho \cos \vartheta + C_x(\vartheta)$$

$$y = \beta + \rho \sin \vartheta + C_y(\vartheta)$$

$$z = \gamma + \rho \vartheta \operatorname{tg} \lambda$$

Здесь α, β — x -ая и y -ая координаты оси спирали, $\gamma - z^2$ — координата начальной точки аппроксимирующей кривой; ϑ — угол, который образует с осью x прямая, проведенная из точки (α, β) в некоторую точку на кривой.

$C_x(\vartheta)$ и $C_y(\vartheta)$ — поправки, учитывающие отклонения от спирали; о них будет сказано ниже. Опустим мысленно из точки

x'_p, y'_p пересечения некоторого луча с номинальной плоскостью перпендикуляр на изображение траектории на этой же плоскости.

Точку пересечения этого перпендикуляра с траекторией обозначим

x_p, y_p .

Тогда

$$\frac{x'_p - x_p}{y'_p - y_p} = - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

(П.6.13)

φ - угол, который образует с осью x касательная к проекции в точке x_n, y_n .

Используя ранее полученные выражения (П.6.8), (П.6.II) и (П.6.I2) получим:

$$\cos \varphi (x_n - X_1 - V_1 z_n) + \sin \varphi (y_n - Y_1 - V_1 z_n) = 0,$$

где x_n, y_n, z_n - координаты точки на кривой в пространстве камеры, соответствующей координатам x_n, y_n . Можно считать, что достаточно малая часть траектории в окружности луча с компонентами X_1, Y_1, V_1, V_1 имеет вид отрезка прямой линии.

Проведем перпендикуляр к этому отрезку и лучу. Ясно, что проекция этого перпендикуляра на номинальную плоскость будет перпендикулярна к проекции траектории на эту же плоскость (строго говоря, надо было бы брать луч, соответствующий точке на самой траектории, но это сильно усложнило бы задачу).

Касательный к пространственной траектории вектор равен:

$$\vec{T} = \left(-\sin \vartheta + \frac{1}{\rho} \frac{dc_x}{d\vartheta}, \cos \vartheta + \frac{1}{\rho} \frac{dc_y}{d\vartheta}, \operatorname{tg} \lambda \right).$$

Направляющий вектор луча $\vec{r} = (V_1, V_1, 1)$.

Тогда

$$Q_1 = [\vec{r} \times \vec{T}]_x = -\cos \vartheta + V_1 \cdot \operatorname{tg} \lambda - \frac{1}{\rho} \frac{dc_y}{d\vartheta}$$

$$Q_2 = [\vec{r} \times \vec{T}]_y = -\sin \vartheta - V_1 \operatorname{tg} \lambda + \frac{1}{\rho} \frac{dc_x}{d\vartheta}$$

или

$$\sin \varphi = \frac{-Q_1}{(Q_1^2 + Q_2^2)^{1/2}}; \quad \cos \varphi = \frac{Q_2}{(Q_1^2 + Q_2^2)^{1/2}} \quad (\text{П.6.I4})$$

Подставляя (П.6.14) в (П.6.13) получаем такое уравнение для определения угла ϑ :

$$f(\vartheta) = Q_2(x_n - X_1 - V_1 z_n) - Q_1(y_n - Y_1 - V_1 z_n) = 0 \quad (\text{П.6.15})$$

Пусть ϑ_0 будет приближенным решением (П.6.15), тогда более точное значение $\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta$, где $\Delta\vartheta = -\frac{f(\vartheta_0)}{f'(\vartheta_0)}$ - поправка, рассчитанная по методу Ньютона. Далее берем выражение для d^2 и разлагаем его в ряд в окрестности $\vartheta = \vartheta_0$. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения и оставляя всюду (кроме знаменателя) члены I-го порядка малости по Δx_0 и Δy_0 , мы получаем такое выражение для d :

$$d = \frac{W}{(Q_1^2 + Q_2^2)^{1/2}} [Q_1 \Delta x_0 + Q_2 \Delta y_0] \quad (\text{П.6.16})$$

где $\Delta x_0 = x_n - X_1 - V_1 z_n$
 $\Delta y_0 = y_n - Y_1 - V_1 z_n$ } рассчитаны для $\vartheta = \vartheta_0$.
 Заметим, что выражение (П.6.16) получено для спирали (т.е. для случая, когда $C_x = C_y = 0$)

d - функция параметров $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \text{tg } \lambda$.

Наилучшие значения этих параметров находятся минимизацией $\sum d_i^2$ где суммирование проводится по всем лучам и всем кадрам. Минимум такого функционала отыскивается с помощью соответствующей итерационной процедуры.

В качестве начальных значений параметров спирали берутся те значения, которые были найдены в § 5. С помощью этих значений рассчитывается ϑ_0 для каждого луча.

В принципе на каждом шаге итерации можно было бы заново пересчитать ϑ_0 для новых значений параметров спирали, но здесь ввиду быстрой сходимости, это не делается.

Теперь относительно поправок $C_x(\vartheta)$ и $C_y(\vartheta)$. Эти поправки учитывают эффект уменьшения импульса частицы вдоль траектории. Предполагая поле однородным и направленным вдоль оси Z , можно показать, что они равны:

$$C_x = \rho [\sin \vartheta (-c\vartheta^3 - b\vartheta^2 + 6c\vartheta + 2b) + \cos \vartheta (-3c\vartheta^2 - 2b\vartheta + 6c)]$$

$$C_y = \rho [\sin \vartheta (-3c\vartheta^2 - 2b\vartheta + 6c) + \cos \vartheta (c\vartheta^3 + b\vartheta^2 - 6c\vartheta - 2b)]$$

a, b, c - константы, зависящие от типа частицы.

г) TVGP

Уточнение значения пяти параметров, определяющих уравнение аппроксимирующей кривой рассчитывается путем минимизации суммы квадратов расстояний от измеренных точек до проекции трека на пленку. Суммирование проводится по всем измеренным точкам и всем проекциям.

При изложении этой части программы **GRBCT** мы уже

рассказывали о том, как находится расстояние от измеренной точки до проекции пространственной кривой на плоскость пленки.

Поскольку по нашему мнению этот пункт наиболее четко изложен в программе *TVGP* опишем его детально.

Пусть луч, соответствующий измеренной на пленке точке, проходит через точку \vec{a}_r (см. рис. 2.7) в пространстве камеры и имеет направляющий вектор \vec{b}_r . Траектория трека в достаточно малой окрестности луча имеет вид отрезка прямой, проходящей через точку \vec{a}_n и касательной к траектории с направляющим вектором в этой точке - \vec{b}_n .

Введем такие обозначения:

\vec{n} - единичный касательный к проекции орбиты вектор;

\vec{d} - вектор, нормальный \vec{n} и проведенный из измеренной точки к проекции орбиты и

\vec{R} - единичный вектор, нормальный к плоскости пленки,

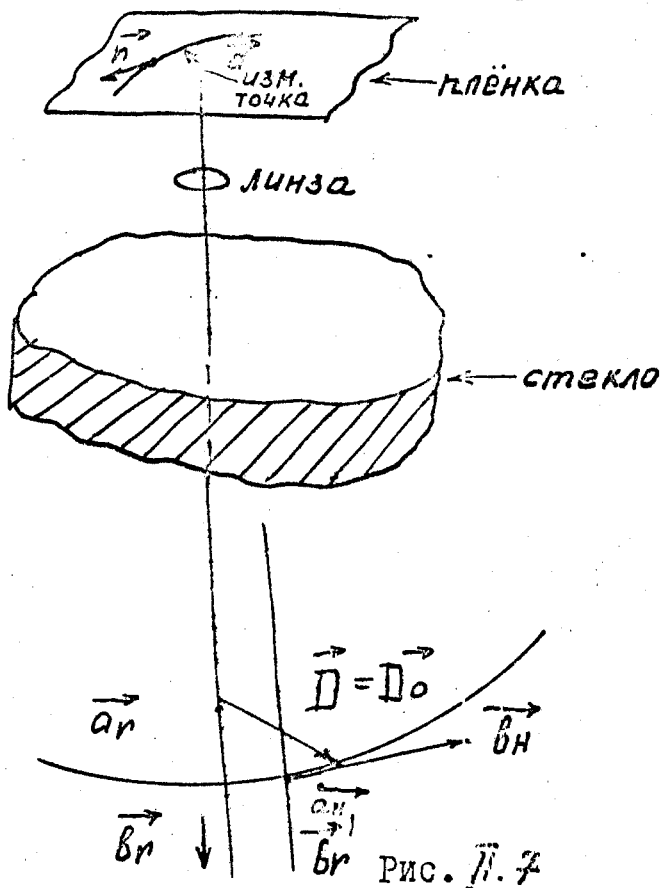


Рис. 11.7

Допустим, что справедлива оптика I-го порядка. Тогда вектору \vec{d} в плоскости пленки соответствует параллельный ему вектор \vec{D} так, что:

$$\vec{d} = \mu \vec{D}, \quad (\text{П.6.17})$$

где μ - коэффициент уменьшения;
 \vec{D} - вектор, выходящий из луча и приходящий в орбиту.

Запишем

$$\begin{aligned} \vec{D} = D \vec{\sigma} &= (\vec{a}_n + \beta_n \cdot \vec{b}_n) - (\vec{a}_z + \beta_z \cdot \vec{b}_z) \\ &= (\vec{a}_n - \vec{a}_z) + \beta_n \cdot \vec{b}_n - \beta_z \vec{b}_z, \end{aligned} \quad (\text{П.6.18})$$

где коэффициенты β_n и β_z подобраны так, что соблюдается параллельность между \vec{D} и \vec{d} . Единичный вектор $\vec{\sigma}$ параллелен \vec{D} и \vec{d} . Ясно, что $\vec{\sigma} = \vec{k} \times \vec{n}$. Умножим соотношение (П.6.18) скалярно на $\vec{b}_z \times \vec{b}_n$, тогда

$$\begin{aligned} D &= \frac{(\vec{a}_n - \vec{a}_z) \cdot \vec{V}}{\vec{\sigma} \cdot \vec{V}} \\ \vec{V} &= \vec{b}_z \times \vec{b}_n. \end{aligned}$$

Мы можем получить простое приближение для $\vec{\sigma} \cdot \vec{V}$; заметим только, что вектор $\vec{V}' = \vec{b}_z \times \vec{b}_n$ перпендикулярен к проекции орбиты в окрестности луча на пленку. С другой стороны, вектор \vec{k} тоже перпендикулярен к \vec{n} .

Тогда можно записать:

$$\vec{n} = [\vec{V}' \times \vec{k}] / |[\vec{V}' \times \vec{k}]|$$

или

$$\vec{V} \cdot \vec{\sigma} = \vec{V} \cdot [\vec{k} \times \vec{n}] =$$

$$\vec{V} \cdot [\vec{k} \times [\vec{V}' \times \vec{k}]] / |[\vec{V}' \times \vec{k}]| =$$

$$[\vec{V} \times \vec{k}] \cdot [\vec{V}' \times \vec{k}] / |\vec{V}' \times \vec{k}|$$

Поскольку луч \vec{b}_z очень близок к орбите, можно считать, что $\vec{b}_z \cong \vec{b}'_z$ или $\vec{V}' \cong \vec{V}$.

Тогда
$$\vec{V} \cdot \vec{O} \cong [\vec{V} \times \vec{k}]^2 / |[\vec{V} \times \vec{k}]| = |[\vec{V} \times \vec{k}]|$$

или, что то же самое:

$$\vec{V} \cdot \vec{O} \cong \sqrt{V^2 - (\vec{V} \cdot \vec{k})^2}$$

Окончательно мы имеем:

$$\vec{d} = \mu (\vec{a}_n - \vec{a}_z) \frac{\vec{V}}{[\vec{V}^2 - (\vec{V} \cdot \vec{k})^2]^{1/2}}$$

Коэффициент уменьшения рассчитывается так же, как и в программе GRBCT. Теперь можно проводить минимизацию соответствующего функционала. Для расчета потребуется выражение для касательного к орбите вектора. Он равен:

$$\vec{b}_i^i = \{ \cos \psi_i, \sin \psi_i, S + u_i (2t_1 + 3t_2 u_i) \}$$

Уже говорилось, что кривая определяется пятью независимыми параметрами. Ими являются: координаты ξ и ζ точки, в которой орбита пересекает плоскость $y = \eta$ (или η и ζ для плоскости $x = \xi$, если трек располагается в основном по направлению оси x) и χ , S и

K_0 - азимутальный угол; $tg \lambda$ и кривизна для точки

$u = 0$. Значение K_0 входит как параметр в выражениях для A_{\pm} .

Если у трека измерены только две точки, то по этим точкам может быть проведена прямая в пространстве камеры; необходимые параметры трека так же как углы, длина и пр. рассчитываются затем непосредственно из уравнения прямой.

ЛИТЕРАТУРА К ПЛАНУ II.

1. T.C. Program Library, PYTHON, CERN
2. A description of the PANG program,
W.E. Humphrey, memo № II, LRL, 1959.
3. The Geometrical Reconstruction of
bubble chamber tracks, J.W. Burren
and J. Sparrow, NIRL / R / 14, 1963.
4. Least squares curve fit to bubble
chamber tracks taking into
account energy loss and magnetic
field variations, CERN, DD/DP/65/9,
J.M. Howie, W.G. Moorhead, november 1965.
5. A programme for the geometrical
reconstruction of curved tracks in
a bubble chamber, CERN 60-33,
W.G. Moorhead.
6. THRESH. The IBM-709 program
for the geometrical reconstruction
of events in bubble chambers",
CERN DD/EXP/63/12, A.M. Crooks

7. T.C. Program Library, THRESH, CERN
8. THREE view geometry program,
alvarez group programming note-p-117,
1965, F.T. Solmitz, A.D. Johnson and
T.B. Day, UCRL, Berkeley, California
9. Методы вычислений. Том I, И.С.Березин и Н.П.Жидков.

Глава III. Геометрические программы для камер с тяжелой жидкостью

Содержание.

Введение к III главе.

- § 1. Применение программы *THRESH* для камер с тяжелой жидкостью.
- § 2. Геометрическая программа Резерфордской лаборатории для камер с тяжелой жидкостью.
- § 3. Геометрическая программа "*Bulle*" лаборатории *Ecole Polytechnique*.
- § 4. Геометрическая программа *STAN*.
- § 5. Измерение энергии электронов в магнитном поле:
- а) Метод Бэра - Митнера ,
 - б) Аппроксимация электронного трека параболой и введение поправок к импульсу на ионизационные и радиационные потери ,
 - в) Аппроксимация электронного трека кривой с переменным радиусом кривизны с использованием матрицы многократного рассеяния ,
 - г) Метод Морелле .
- § 6. Определение параметров заряженной частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле, методом максимума правдоподобия.

ВВЕДЕНИЕ к III главе

Данная часть обзора посвящена геометрическим программам для камер, заполненных тяжелой жидкостью ^ж). Изложение построено таким образом, что сначала описывается использование геометрической программы для водородных камер для обработки событий с тяжелой жидкостных камер (*THRESH*), далее описываются изменения в водородных программах для тяжеложидкостных камер (*THRESH, NIRNS*), далее специальные геометрические программы для тяжелой жидкости (*Bulle, STAN*) и, наконец, специфические методы обработки электронных треков в магнитном поле.

В тяжеложидкостных камерах, в отличие от водородных, важную роль начинают играть эффекты многократного кулоновского рассеяния ионизационных потерь энергии и тормозного излучения электронов.

Эффект многократного рассеяния описывается формулой (B-1), представляющей собой плотность вероятности бокового смещения частицы на величину ζ и отклонения на угол θ на длине l относительно прямой линии, проведенной в направлении движения частицы из первой точки трека [1]:

$$W(\zeta, \theta, l) d\zeta d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\theta_s^2 l^2} \cdot \exp\left[-\frac{4}{\theta_s^2} \left(\frac{\theta^2}{l} - \frac{3\zeta \cdot \theta}{l^2} + \frac{3\zeta^2}{l^3}\right)\right] d\zeta d\theta, \quad (B-1)$$

=====
^ж) Под тяжелыми жидкостями, используемыми для экспериментов с пузырьковыми камерами, обычно понимают (см. например [6]) жидкости с радиационной длиной менее 30 см. В этом смысле пропановые камеры с радиационной длиной $\sim 1\text{ м}$ занимают промежуточное положение между водородными и тяжеложидкостными.

т.е. двумерное гауссовское распределение, где

$$\theta_s^2 = \frac{E_s^2}{(\beta c p)^2 \chi_0}$$

$$E_s = 21 \text{ Мэв} \quad \beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + M^2}} ;$$

p - импульс, M - масса частицы ;

χ_0 - радиационная длина.

Многократное рассеяние приводит к тому, что координаты трека оказываются скоррелированными между собой и неравновесными. Ошибка в координате из-за многократного рассеяния зависит от длины и выражается формулой [2] :

$$\sigma_{sc}(\ell) = \theta_s \cdot \ell^{3/2} \quad (B-2)$$

Ошибки в кинематических параметрах трека - импульсе p , азимутальном угле ϕ и глубинном угле λ из-за многократного рассеяния равны [6]:

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{sc} = \frac{C_p^s}{\beta (\ell \cdot \cos \lambda)^{1/2}} ; (\Delta \phi)_{sc} = C_\phi^s \cdot \frac{\ell^{1/2}}{p \beta} ; (\Delta \lambda)_{sc} = C_\lambda^s \cdot \frac{\ell^{1/2}}{p \beta} ; \quad (B-3)$$

Ошибки же измерения этих величин равны:

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{meas} = C_p^m \cdot \frac{p}{(\ell \cdot \cos \lambda)^2} ; (\Delta \phi)_{meas} = \frac{C_\phi^m}{\ell \cdot \cos \lambda} ; (\Delta \lambda)_{meas} = \frac{C_\lambda^m}{\ell \cos \lambda} , \quad (B-4)$$

где $C_p^s, C_p^m, C_\phi^s, C_\phi^m, C_\lambda^s, C_\lambda^m$ - константы. ℓ - длина трека

Для угловых величин ϕ и λ суммарная ошибка $\sigma = \sqrt{(\sigma_{sc})^2 + (\sigma_{meas})^2}$ будет минимальна на определенной длине. Эта длина называется оптимальной и равна для ϕ

$$-Z_{\phi} = \left\{ \frac{2C_{\phi}^m \cdot \rho_{\beta}}{C_{\phi}^s} \right\}^{2/3}, \quad (B-5)$$

а для λ

$$-Z_{\lambda} = \left\{ 2 \cdot \frac{C_{\lambda}^m \cdot \rho_{\beta}}{C_{\lambda}^s \cdot \cos \lambda} \right\}^{2/3} \quad (B-6)$$

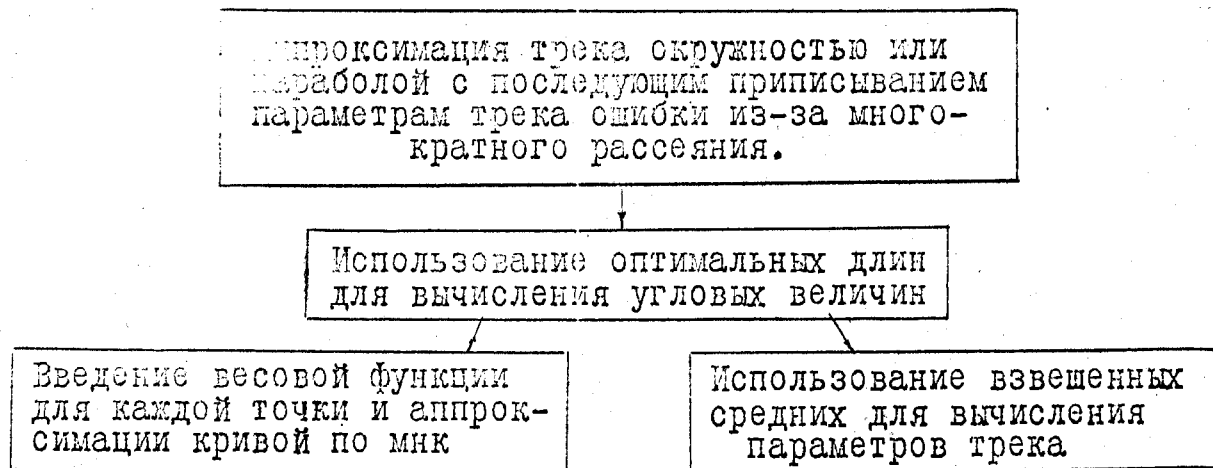
Потери на тормозное излучение электрона описываются формулой Гайтлера, показывающей вероятность излучения энергии $E_0(1-e^{-\alpha})$ на длине ℓ электроном с первоначальной энергией E_0 [3] :

$$W(\alpha)d\alpha = \frac{\ell^{-\alpha} \alpha^{\beta\ell-1}}{\Gamma(\beta\ell)} \cdot d\alpha \quad (B-7)$$

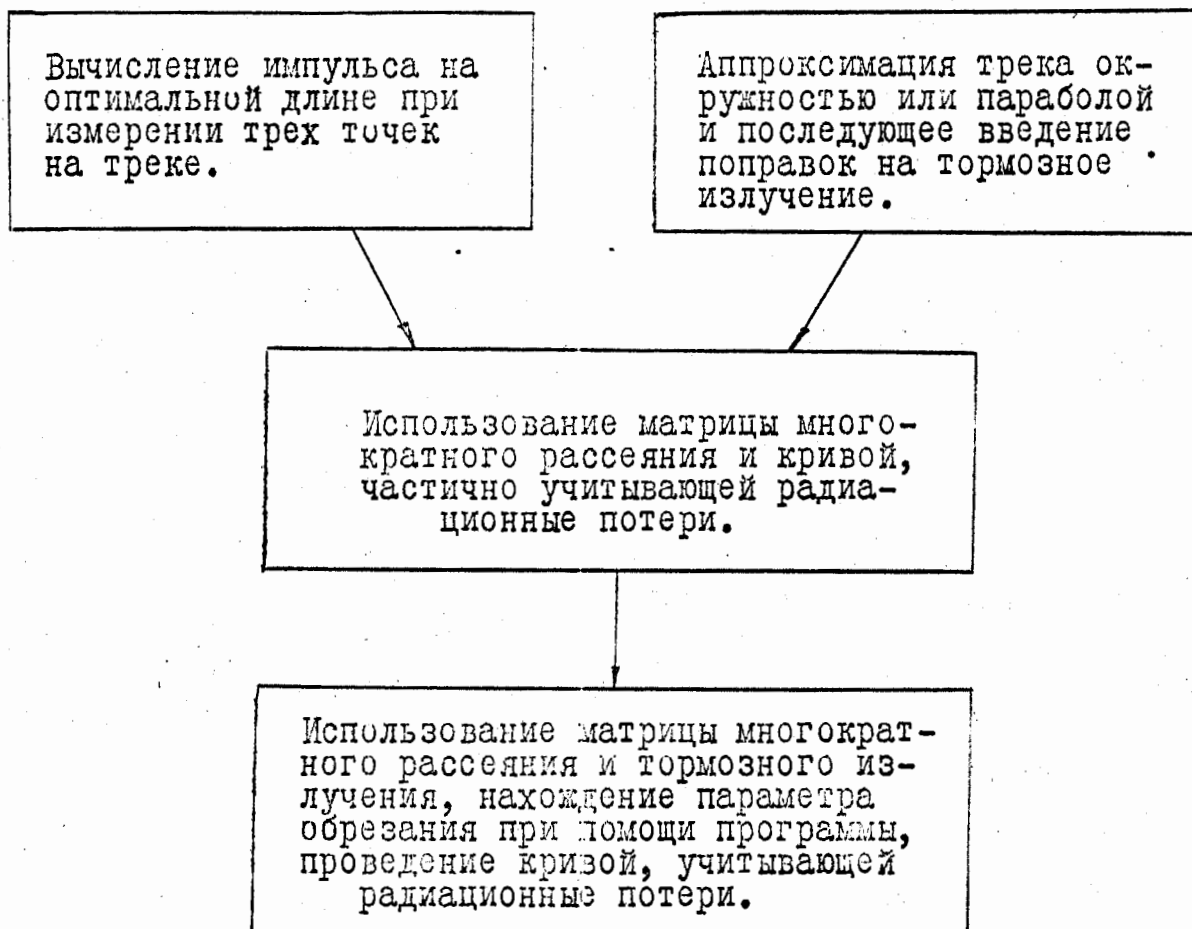
$$\beta = \frac{1}{x_0} \ln 2$$

$\Gamma(\beta\ell)$ - гамма-функция.

Диалектику развития методов обработки неэлектронных треков в тяжелой жидкости можно представить в виде следующей блок-схемы:



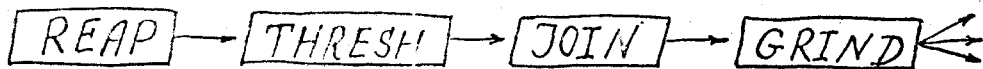
Что касается электронных треков, то диалектику развития методов их обработки можно представить в виде блок-схемы:



§ I. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ *THRESH* ДЛЯ КАМЕР С ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

а) ИСПОЛЬЗОВАНИЕ *THRESH* СОВМЕСТНО С ПРОГРАММОЙ *JOIN* [4]

Группа камер с тяжелой жидкостью в ЦЕРНе использовала цепочку программ



REAP читает входную ленту с измерительных устройств и prepares данные в виде, подходящем для входа в *THRESH*.

THRESH является геометрической программой.

GRIND - кинематической программой.

JOIN - выполняет специфическую роль для тяжеложидкостных камер, заключающуюся в следующем.

Поскольку траектории частиц в тяжелой жидкости из-за многократного рассеяния заметно отличаются от винтовых линий и часто имеют изломы, то для лучшего определения импульса трек разбивают на несколько частей. В программе *THRESH* каждая из этих частей аппроксимируется отдельно винтовой линией и далее объединяется в один трек программой *JOIN*.

Например, в случае трека, измеренного в двух частях



THRESH вычисляет для каждой части кривизну $\frac{1}{\rho}$, глубинный угол λ и азимутальный угол φ вместе с их ошибками.

JOIN вычисляет:

- а) пробег AJ с ошибкой,
- б) λ и φ в начальной точке A . В случае V^{\pm} вычисляются λ и φ в конечной точке J .
- в) средний импульс P_{AJ} с ошибкой по формуле:

$$\frac{1}{P_{AJ}} = \frac{1}{P_{AI}} \cdot W_{AI} + \frac{1}{P_{IJ}} \cdot W_{IJ} ;$$

Веса W_i вычисляются исходя из ошибки многократного рассеяния (см. В-3)

$$W_i = \frac{L_i \cdot \cos^2 \lambda_i}{L_{AJ} \cdot \cos^2 \lambda_{AJ} + L_{IJ} \cdot \cos^2 \lambda_{IJ}} ; \quad i = AI, IJ$$

Далее импульс корректируется на ионизационные потери. При этом предполагается, что уменьшение импульса из-за ионизационных потерь вдоль трека линейно зависит от длины трека. Для частиц, остановившихся в камере, импульс вычисляется по пробегу.

б) Возможные изменения программы THRESH для камер с тяжелой жидкостью.

Для обработки событий, полученных на камерах с тяжелой жидкостью, предполагались [5] следующие изменения в программе THRESH .

1) Более точное восстановление точек в пространстве благодаря применению интерсплайни второго порядка для нахождения соответствующих точек.

2) Использование оптимальных длин при аппроксимации трека кривой, так как проведение методом наименьших квадратов винтовой линии через координаты трека, применяемое в THRESH , не подходит для треков в камерах с тяжелой жидкостью, поскольку частицы отклоняются настолько сильно благодаря многократному рассеянию и потерям энергии, что их траектории не следуют винтовым линиям. На практике это выражается в том, что слишком много случаев, в которых итерационный процесс не сходится. Поэтому для аппроксимации трека кривой было предложено взять алгоритм программы FOG лаборатории в Беркли (IRZ), специально написанный для тяжелых жидкостей, и преобразовать в специальный вариант THRESH для тяжелых жидкостей.

Этот алгоритм заключается в следующем:

Для измерения радиуса кривизны берется дуга максимум в 60°. В плоскости xy трек поворачивается в новую $\xi\eta$ систему, в которой ось ξ лежит вдоль хорды. Подбирается парабола в виде $\eta = a\xi^2 + b\xi + c$. Радиус этой параболы $R_p = \frac{1}{2a}$ корректируется для получения эквивалентного радиуса окружности R_c следующим образом:

$$R_c = R_p \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{L}{R_p} \right)^2 \right]$$

L - длина трека.

Оптимальная длина для нахождения азимутального угла φ задается в виде

$$L_{opt}^{\varphi} = 0,165 (X^{\circ})^{1/3} \left(\frac{\rho V}{100c}\right)^{2/3} \left(\frac{\varepsilon}{25}\right)^{2/3},$$

где X° - радиационная длина среды, ε - среднеквадратичная ошибка измерения координат конечных точек.

Для глубинного угла λ :

$$L_{opt}^{\lambda} = \left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right)^{2/3} \cdot L_{opt}^{\varphi},$$

где $\varepsilon_z, \varepsilon_x$ - соответствующие ошибки в z, x .

Метод нахождения азимутального угла состоит в следующем (рис.3)

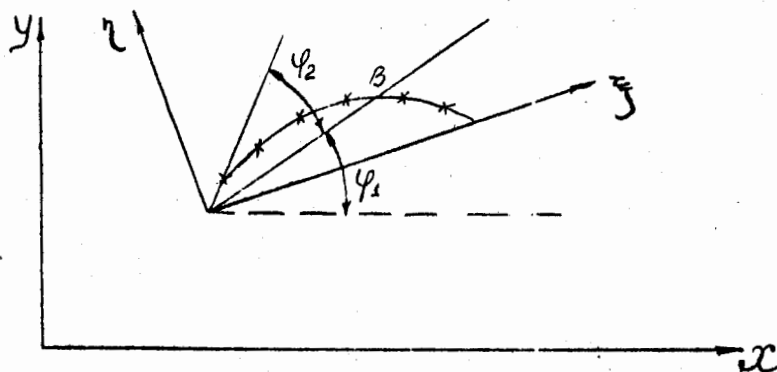


Рис. III-3

Ниже L_{opt}^{φ} берется следующая точка B и вычисляется φ_1 .

Подгонкой окружности радиуса R_c через A и B находится

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА РЕЗЕРФОРДСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ
(RHEI) ДЛЯ КАМЕР, ЗАПОЛНЕННЫХ ТЯЖЕЛЫМИ ЖИДКОСТЯМИ [6]

Геометрическая программа для камер с тяжелыми жидкостями в Резерфордской лаборатории, в основном, базируется на общей программе, написанной для водородных камер. Программу удобно разбить на три отдельные секции.

- (1) Восстановление точек в пространстве,
- (2) Подгонка пространственной кривой для получения кинематических величин.
- (3) Специальные подпрограммы для тяжелой жидкости.

Секция (3) в водородном варианте является подгонкой к точкам в пространстве винтовой линии, зависящей от массы частицы. В варианте для тяжелых жидкостей она заменена подпрограммой, обрабатывающей треки с многократными изломами, которая подгоняет кривую на оптимальной длине трека, для того чтобы получить лучшие величины для углов и минимальные ошибки, и подпрограммой, обрабатывающей электронные пары, полученные в результате конверсии γ - квантов.

I. Специальные модификации для камер с тяжелой жидкостью:

а) Пучковые треки, топология события и зарядовый баланс

При обработке событий, полученных на камере с тяжелой жидкостью, встречаются случаи, когда точку рождения V' - частиц или γ - квантов одновременно можно приписать нескольким пучковым взаимодействиям. Поэтому логика программы была изменена таким образом, чтобы в событии мог измеряться более чем один пучковый трек.

У прямых треков или у треков с большой относительной ошибк

в радиусе кривизны, заряд неизвестен. При выполнении зарядового баланса в каждой точке взаимодействия большинство из этих неопределенностей может быть разрешено. Поскольку мишень в первичном взаимодействии неизвестна, зарядовый баланс невозможно выполнить в этой точке взаимодействия (*vertex*), за исключением специальных случаев. Вообще говоря, предполагается взаимодействие с протоном, когда четное число треков выходит из точки взаимодействия, и с нейтроном при нечетном числе треков.

Поэтому, вообще говоря,

$$\begin{aligned} \text{Сумма зарядов выходящих частиц} - \text{заряд мишени} &= I \text{ для четного} \\ &\text{числа треков} \\ &= 0 \text{ для нечетного} \end{aligned}$$

б) Останавливающиеся треки и треки с изломами

На стадии измерений событие снабжается информацией о том, какие треки с изломом и какие треки останавливаются в камере. В случае остановившихся треков должна быть также задана масса. Останавливающиеся треки часто сильно рассеиваются, так что длина, вычисляемая из подгоняемой кривой не является лучшей оценкой. Если точки измеряются достаточно близко друг к другу, то лучшую длину можно получить суммированием длин хорд между соседними точками. Это делается для всех останавливающихся треков и треков с изломами.

Если у трека излом в начале и он не останавливается, тогда оценка импульса и его ошибки делается из более длинной части, а углы берутся из первой части. Для треков с изломами, которые останавливаются и для обычных останавливающихся треков, импульс

вычисляется из полной длины, а ошибка вычисляется по формуле:

$$\langle \delta \left(\frac{1}{p} \right)^2 \rangle = \frac{1}{p^4} [(\delta l_m^2 + \delta l_s^2) \left(\frac{dp}{ds} \right)^2 + \left(\frac{\delta d}{d} \right)^2 \cdot \rho^2],$$

где

δl_m^2 - ошибка в длине из-за ошибки измерений

δl_s^2 = ошибка в длине из-за многократного рассеяния

$\delta d/d$ = относительная ошибка в плотности жидкости

dp/ds = график кривой прсбег-импульс при данном импульсе ρ

$$\delta l_s = \frac{0,01 \cdot Z}{\sqrt{m}} \left\{ \frac{C_1}{T/10m + C_3} + C_2 \right\};$$

где $m = \frac{\text{масса частиц}}{\text{масса протона}}$

T - кинетическая энергия в Мэв

C_1, C_2, C_3 - константы

в) Оптимальные длины.

При вычислении угловых величин трека используется оптимальная длина, на которой сумма ошибок из-за измерений и кулоновского рассеяния минимальна. Для этого часть программы, выполняющая аппроксимацию трека кривой, используется несколько раз для данного трека с различными длинами и массами.

Сначала весь трек аппроксимируется кривой для нахождения радиуса кривизны трека и, соответственно, импульса частицы. Далее по формулам (В-5), (В-6) для заданной массы вычисляются оптимальные длины для азимутального и глубинного углов. Если оптимальная длина меньше измеренной, то делается повторная аппроксимация трека, при которой радиус кривизны остается

фиксированным, а для нахождения углов используется только оптимальная часть трека. Если оптимальная длина больше измеренной, то повторной аппроксимации не делается и углы остаются прежними.

Для каждого трека вычисляется 6 оптимальных длин (см. В-6 и В-7) по три для каждого вычисления азимутального и глубинного углов, соответственно, для π -мезонной, K -мезонной и протонной масс, используемых в формуле для кулоновских ошибок.

Если масса трека известна, то вычисляются только две оптимальные длины.

е) Электроны и γ -кванты

На стадии измерений электронные треки снабжаются определенным признаком. В данной программе они могут обрабатываться двумя способами.

1) Аналогично остальным трекам, за исключением тех случаев, когда в формулах используется масса частицы, то этой массой является масса электрона.

2) Методом Бэра-Митнера (см. далее). Измерения выполняются на оптимальной длине (приблизительно 10 см) или в случае излома до оптимальной длины на доступной длине трека.

Вершина с двумя заряженными треками, каждый из которых имеет признак электрона, обрабатывается как γ -квант.

Углы, импульсы и ошибки γ -кванта получаются, как взвешенные величины, найденные по электронным трекам, деленные на обратные величины к квадратам ошибок.

Таким образом, если E_i - квадрат ошибки и χ_i -угловая переменная электронного трека, то

$$\chi_\gamma = \frac{\chi_1 \cdot E_1 + \chi_2 \cdot E_2}{E_1 + E_2} ; \quad E_\gamma = \frac{2 E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} .$$

Результаты обработки событий по данной программе

Геометрическая программа была использована в T8 и T11 экспериментах, в которых изучались Ξ^0 и Ξ^- гипероны.

В T8 эксперименте по геометрической программе обрабатывали возможные Ξ^0 кандидаты (около 70 событий). Для наиболее вероятных кандидатов было сделано несколько различных измерений. Все Ξ^- события (~ 200) также были обработаны с несколькими различными измерениями.

После первого измерения 40% событий браковалось программой по следующим причинам:

1. Ошибки измерителя (- 10%)
2. Ошибки машины при переходе от перфоленты к перфокартам (3%).
3. Ручная обработка перфокарт (3%)
4. Неизвестные ошибки (20%)
5. Ошибки программы (3%).

Константы в экспериментах, проводимых в настоящее время в N^+RNS HZBC, при измерении электронных треков методом Бэра-Митнера

T8 - жидкость C_2F_5Cl $X_0 = 25$ см $B = \sim 17$ кгс

$$l_p \text{ opt} \approx 10 \text{ см} \quad \left(\frac{\Delta(1/\rho)}{1/\rho} \right)_{\text{opt}} = 30\%$$

ТII - жидкость CF_3Br $X_0 = 11.5$ см $B = \sim 17$ кгс

$$l_p \text{ opt} \approx 10 \text{ см} \quad \left(\frac{\Delta(1/\rho)}{1/\rho} \right)_{\text{opt}} = 45\%$$

Е23 - жидкость $C_3H_8 - CF_3Br$ смесь $X_0 = 22.7$ см

$B \approx 13$ кгс

$$l_p \text{ opt} = 13 \text{ см} \quad \left(\frac{\Delta(1/\rho)}{1/\rho} \right)_{\text{opt}} = 37\%$$

Во всех вышеперечисленных случаях, предполагалось, что единичное излучение γ - кванта с потерей первичной энергии более, чем 50% ($y_0 = \ln 2$) можно обнаружить по изменению в кривизне трека.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА "Bulle"
ЛАБОРАТОРИИ "Ecole Polytechnique" [7]

Целью этой программы является получение импульсов и направлений с ошибками треков гужырьковой камеры, измеренных на устройстве типа "IEP". Треки измеряются на двух проекциях и им задаются одна или несколько величин масс.

Программа работает в следующей последовательности:

I) Вычисляются четыре параметра линейного преобразования, которое преобразует координаты точек, измеренных на пленке, к координатам в системе, связанной с камерой. Число наборов этих параметров равно числу используемых проекций.

2) При помощи соответствующего набора параметров преобразуются координаты точек трека. На переднем стекле получаются две кривые. Кривая, обрабатываемая первой, называется "основной" (*principal*) кривой, а другая - "вспомогательной" (*auxiliary*).

3) Полученные таким образом кривые преобразуются в систему координат, привязанную к стереобазе, используемой для этого трека. Делается различие между "треком с 2 точками" и "другими треками".

4) Кривые аппроксимируются парой парабол.

Выбрасываются плохо измеренные точки.

5) На "вспомогательной" кривой вычисляются координаты точек, соответствующих измеренным на "основной" кривой.

6) Восстанавливаются пространственные координаты.

7) Делается возврат в § 3.

8) Проверяется, что полученные в пространстве точки, находятся внутри камеры. Отбрасываются точки, лежащие вне ее.

9) Цилиндрическая проекция трека на верхнее стекло аппроксимируется параболой. Выбрасываются плохие точки. Вычисляются радиус кривизны параболы и угол наклона ϕ всей кривой, а также ее длина $2L$.

10) Вычисляется магнитное поле в середине кривой и в двух точках, симметрично расположенных по отношению к концам трека. Вычисляется взвешенное среднее этих трех величин магнитного поля и импульс в центральной точке кривой \bar{p} .

II) Если трек электронный, то делается переход в 20). В противном случае проверяется совместимость измеренного по кривизне импульса и вычисляемого из соотношения пробег-импульс.

12) Если проверка проходит, то вычисляются потери из-за ионизации на конце трека.

В противном случае предполагается, что измерения импульса по кривизне менее точны, чем по длине.

Поэтому предполагается, что трек останавливается в камере, и вычисляется импульс из пробега.

13) Вычисляются $p\beta$ в конце (s) трека и "оптимальная длина", дающая минимальную величину квадратичной сумме "измерительной" ($\sim \frac{1}{x}$) и "многократно рассеянной" (как \sqrt{x}) ошибках в направлении трека (на самом деле оптимальная длина для азимутального угла не такая же, как для глубинного. Длина, вычисляемая в (13), является промежуточной между ними. Используется вспомогательная точка для угловых измерений, ближайшая к "оптимальной длине" с конца трека (точка M)).

14) Вычисляется глубинный угол ϕ , между концом и точкой M .

15) В качестве первого приближения азимутального угла θ используется направление хорды, соединяющей конец с M , в качестве второго приближения - касательная к окружности, проходящей через конец и M , радиус которой получается из скорректированного импульса.

Этот угол корректируется на потери энергии (третье приближение).

16) Вычисляется ошибка в стрелке прогиба ϕ , θ и печатаются результаты.

17) Повторяется § II для { другого конца трека
другой гипотезы массы.

18) Повторяется все от § 2 для следующего трека.

19) Для двухточечного трека вычисляются пространственные точки, соответствующие конечным точкам, затем θ и ϕ с ошибками, печатается результат, делается переход к § 18.

20) Для электрона делаются вычисления методом Бэра-Митнера (Переход к 18).

Рассмотрим разделы, имеющие непосредственное отношение к особенностям тяжеложидкостных камер. (§ 9-20).

В дальнейшем изложении будут встречаться стандартные преобразования TZI и PVZ .

СТАНДАРТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1) TZI (линейное преобразование). Вход: координаты точки ξ, η и четыре параметра $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Выход: координаты x, y

$$x = \alpha \xi - \beta \eta + \gamma$$

$$y = \beta \xi + \alpha \eta + \delta$$

2) PVZ (аппроксимация параболой)

Берется набор координат точек трека $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n$.

($3 \leq n \leq 10$) и делается следующее:

а) TZI

$$\alpha = \arccos \frac{\eta_n - \eta_1}{\xi_n - \xi_1} = \cos \phi$$

$$\beta = -\sin \phi$$

$$\gamma = -\left(\frac{\xi_n + \xi_1}{2} \cdot \cos \phi + \frac{\eta_n + \eta_1}{2} \cdot \sin \phi\right)$$

$$\delta = \left(\frac{\xi_n + \xi_1}{2} \sin \phi - \frac{\eta_n + \eta_1}{2} \cos \phi\right)$$

в) Вычисляются коэффициенты A, B, C параболы МНК.

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Вход: $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, n$

Выход: $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$

Необходимы константы а) ϵ_2 (если ось x почти \perp оси ξ).

б) ϵ_3 - минимальная величина детерминанте (если меньше, парабола заменяется прямой линией).

Делаются следующие вычисления:

а) $n=3$ $A = \frac{y_2}{x_2^2 - x_1^2}$; $B=0$; $C = -Ax_1^2$

б) $n > 3$ вычисляются $S_2, 3, 4$, где $S_j = \sum_{i=1}^n x_i^j$;

вычисляются $S_0, 1, 2$, где $S_j = \sum_{i=1}^n x_i^j y_i$

$$D = \begin{vmatrix} S_4 & S_3 & S_2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \\ S_2 & S_1 & n \end{vmatrix}; \quad DA = \begin{vmatrix} S_2 & S_1 & S_0 \\ S_3 & S_2 & S_1 \\ S_2 & S_1 & n \end{vmatrix};$$

$$DB = \begin{vmatrix} S_4 & S_3 & S_2 \\ S_2 & S_1 & S_0 \\ S_2 & S_1 & n \end{vmatrix}; \quad DC = \begin{vmatrix} S_4 & S_3 & S_2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \\ S_2 & S_1 & S_0 \end{vmatrix};$$

$$A = \frac{DA}{D}; \quad B = \frac{DB}{D}; \quad C = \frac{DC}{D}$$

9) Применяется преобразование РВЗ к X_i и Y_i .

Вычисляются A', B', C' (коэффициенты параболы)

Далее

$$R_p = \frac{(1 + B'^2)^{3/2}}{2|A'|}$$

$$z^2 = (X_N - X_i)^2 + (Y_N - Y_i)^2$$

$$R_0 = R_p \left(1 + \frac{1}{16} \frac{z^2}{R_p^2}\right)$$

$$z' = R_0 \cdot \arcsin \frac{z}{2R_0} = \frac{1}{2} \text{ длины (спроектированной)}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{z_N - z_1}{2}$$

Печатается $2Z$ (реальная длина тре

$$X_0, Y_0, z_0 = \frac{X_1 + X_n}{2}, \frac{Y_1 - Y_n}{2}, \frac{t_1 + t_n}{2};$$

10) Вычисляется средняя величина магнитного поля:

$$B_0 = B \times f(x_0, y_0, z_0)$$

$$B_+ = \underline{B} \times f\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_0}{\alpha + \beta}, \text{ и т.д.}\right)$$

$$B_- = \underline{B} \times f\left(\frac{\alpha x_1 - \beta x_0}{\alpha + \beta}, \text{ и т.д.}\right)$$

$$\bar{B} = \frac{u(B_+ + B_-) + v B_0}{2u + v}$$

9) Применяется преобразование PBZ к X_i и Y_i .

Вычисляются A', B', C' (коэффициенты параболы)

Далее

$$R_p = \frac{(1 + B'^2)^{3/2}}{2|A'|}$$

$$Z^2 = (X_N - X_i)^2 + (Y_N - Y_i)^2$$

$$R_0 = R_p \left(1 + \frac{1}{16} \frac{Z^2}{R_p^2}\right)$$

$$Z' = R_0 \cdot \arcsin \frac{Z}{2R_0} = \frac{1}{2} \text{ длины (спроектированной)}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{Z_N - Z_1}{2}$$

Печатается $2Z$ (реальная длина трек)

$$X_0, Y_0, Z_0 = \frac{X_1 + X_n}{2}, \frac{Y_1 - Y_n}{2}, \frac{t_1 + t_n}{2};$$

10) Вычисляется средняя величина магнитного поля:

$$B_0 = B \times f(x_0, y_0, z_0)$$

$$B_+ = \underline{B} \times f\left(\frac{\alpha x_1 + \beta x_0}{\alpha + \beta}, \text{ и т.д.}\right)$$

$$B_- = \underline{B} \times f\left(\frac{\alpha x_1 - \beta x_0}{\alpha + \beta}, \text{ и т.д.}\right)$$

$$\bar{B} = \frac{u(B_+ + B_-) + v B_0}{2u + v}$$

$f(x, y, z)$ - таблица величин (≈ 1) % изменения магнитного поля в различных точках камеры.

Машина интерполирует $B, \alpha, \beta, \mu, \nu$, которые являются константами.

B - магнитное поле в кГс

α, β, μ, ν - весовые константы.

Вычисляется $\bar{P} = .3 \bar{B} \cdot R\theta / \cos \phi$ Печатается \bar{P} .

I3 и I4) Вычисляется

$$P\beta = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (\text{масса})^2}} ;$$

$$\lambda = \frac{X_e}{4} \left(\frac{P\beta}{21} \right)^2$$

$$Z_{opt} = (DA \times \lambda \times (\epsilon' \times QT)^2)^{1/3}$$

$$Zz = \frac{2R\theta}{\cos \phi} \times \arcsin \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{2R\theta}$$

$$(Q' = 1, i+1; Q'' = 2, i+n)$$

Выбирается величина Zz , ближайшая к Z_{opt} , из которой можно получить j .

Тогда
$$\phi_1 = \arcsin \frac{Z_j - Z_i}{Zz \cdot \cos \phi} \begin{matrix} +\pi/2 \\ -\pi/2 \end{matrix}$$

I5) В качестве первого приближения азимутального угла используется направление хорды, соединяющей конец трека с M (оптимальная точка с индексом j)

$$\theta' = \arcsin \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \begin{matrix} +\pi/2 \\ -\pi/2 \end{matrix} \quad Q' = \begin{cases} 1 & l=1 \\ 2 & l=n \end{cases}$$

В качестве второго приближения - касательная к окружности проходящая через конец трека и M , радиус которой получается из скорректированного импульса. Этот угол корректируется на потери энергии (третье приближение). Общая формула:

$$\theta^3 = \theta^1 + (D\theta + DD\theta) \cdot \epsilon_s \cdot \frac{\theta^1 - \theta}{|\theta^1 - \theta|},$$

где

$$D\theta = \frac{ZZ}{2R\theta} = \theta^2$$

$$DD\theta = \frac{K\theta \cdot ZZ}{R\theta \cdot Z'''} - \text{коррекция на потери энергии}$$

$$\epsilon_s = \pm 1; \quad \theta^1 = \arctg \frac{Y_j - Y_{i \pm 1}}{X_j - X_{i \pm 1}} \begin{matrix} + \pi/2 \\ - \pi/2 \end{matrix}$$

$$K\theta = \begin{cases} K\theta & Q' = 1 \\ -K\theta & Q' \neq 1 \end{cases} \quad K\theta - \text{коррекция на потери энергии}$$

16) Вычисляются ошибки в стрелке прогиба σ , глубинном угле ϕ и азимутальном угле θ по следующим формулам:

Если трек не остановился в камере (т.е. импульс найден по кривизне), то

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{|\cos\phi|} \cdot \sqrt{DP \cdot \epsilon'^2 \cdot \frac{QT^2}{(ZZ')^4} \cdot \rho^2 + \frac{DDP}{2 \cdot ZZ' \cdot \beta^2}}$$

$$d\phi = \sqrt{\frac{DF^2 \cdot QT^2 \cdot \epsilon'^2}{(ZZ)^2} \cdot (0.1 \sin^2\phi_1 + \frac{D^2}{(2d)^2} \cos^2\phi_1) + \frac{DDF \cdot ZZ}{\rho^2 \beta^2}}$$

$$d\theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \left(\frac{DT \cdot QT^2 \cdot \epsilon'^2}{(ZZ)^2} + \frac{DDT \cdot ZZ}{\rho^2 \beta^2} \right) + \bar{B} \cdot \left(\frac{ZZ}{\rho} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^2}$$

Если трек остановился в камере (импульс вычислялся по пробегу)

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \sqrt{\frac{DDDP}{m} + \frac{\epsilon''^2}{ZZ}};$$

$d, D, DP, DF, DT, DDT, DDF, DDP, DDDP, \epsilon', \epsilon'', QT$ - константы.

ОПЫТ РАБОТЫ С "Bulle"

В 1963 г. по программе было обработано 5+10 тысяч треков. Приблизительно один трек из десяти браковался (главным образом, из-за ошибок операторов *IEP*, иногда, из-за необнаруженных на треке изломов). При повторном измерении трек обычно проходил через программу.

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА *STAN* [8]

Программа *STAN* может быть разделена на две различные части:

- 1) Восстановление точек в пространстве из измерений несоответствующих точек.
- 2) Оценка параметров, характеризующих трек - кривизны, глубинного и азимутального углов.

В первой части программа работает с тремя проекциями и вычисляет квазисоответствующие точки интерполяцией второго порядка. Однако, коррекций на преломление световых лучей на поверхностях раздела не делается.

Вторая часть может быть преобразована в подпрограмму *THRESH* вместо подпрограммы аппроксимации винтовой линией. В этой части вычисляются оценки параметров, характеризующих трек, из статистического анализа простых величин, таких, как углы между хордами, без какой-либо аппроксимации кривой.

Оценка кривизны.

Заданы координаты точек в пространстве. Спроектируем эти точки на плоскость OXY , перпендикулярную направлению магнитного поля. Простейшими величинами, зависящими от кривизны, которые можно образовать из координат X_i, Y_i являются углы между последовательными хордами;

$$\omega_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)(x_i - x_{i-1}) - (y_i - y_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1}) + (y_i - y_{i-1})(y_{i+1} - y_i)}$$

Средняя величина ω_i равна:

$$E\{\omega_i\} = \theta \cdot m_i,$$

где $\theta = \frac{1}{\rho}$ - магнитное отклонение на единицу длины
и

$$m_i = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \right)$$

Если предположить, что углы многократного рассеяния и ошибки измерения имеют гауссовское распределение, то можно показать методом максимума правдоподобия, что лучшей оценкой θ является взвешенное среднее вида:

$$\theta = \sum_i p_i \frac{\omega_i}{m_i}.$$

Веса p_i вычисляются для эквидистантных точек и принимаются во внимание корреляции между последовательными углами ω_i

p_i зависят от числа измеренных точек и параметра d^2 , который является функцией отношения между ошибкой многократного рассеяния и ошибкой измерения.

Более точно, α^2 определяется соотношением:

$$\alpha^2 = \frac{3\delta^2}{\sigma^2 l_0^3}$$

, где

- δ - среднеквадратичная ошибка измерения ординаты точки, восстановленной в пространстве,
- σ - среднеквадратичный угол многократного рассеяния на единицу длины,
- l_0 - длина части трека, рассматриваемой для оценки кривизны.

Оценки угловых величин трека.

Точки в пространстве проектируются ортогонально на цилиндр радиуса $\rho = \frac{1}{\sigma}$, перпендикулярного к плоскости OXY и имеющего первую и последнюю точки трека на своей поверхности. Оценки для азимутального угла φ и глубинного угла λ выводятся из цилиндрических координат их проекций на цилиндре. Так же, как и для кривизны, оценки для φ и α являются взвешенными средними простых функций координат, веса в этом случае также вычисляются методом максимума правдоподобия.

Использование взвешенных средних для определения углов играет более или менее ту же роль, как выбор оптимальной длины.

Длина в пространстве и спроектированная длина трека оцениваются из расстояний между последовательными точками.

Обнаружение изломов.

Поскольку программа вычисляет углы между последовательными хордами, то введена проверка трека на изломы, основанная на обнаружении большого отклонения этих углов от их средней величины. Однако, так как изломы могут значительно повлиять на эту среднюю величину, то перед вычислением взвешенного среднего дающего оценку ρ , вычисляется медиана между хордами для исключения больших углов. Эта процедура делает возможным различие между реальными изломами и ошибками измерения, поскольку последние дадут два последовательных больших угла с противоположными знаками.

Когда программа обнаруживает излом на треке, то в качестве последней точки берется последняя точка перед первым изломом.

§ 6. ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Тяжелые жидкости, используемые для экспериментов с пузырьковыми камерами, имеют радиационную длину между десятью и тридцатью сантиметрами. Это приводит к трудностям в измерении импульса электрона по кривизне. Так как радиационная длина того же порядка, что и измеряемая длина трека, то может часто происходить одиночное тормозное излучение, при котором значительная доля энергии электрона теряется. Таким образом, в пределах измеряемой длины трека, энергия электрона может измениться значительно с изменением в кривизне и, возможно, рассеяние.

а) Метод Бэра-Митнера [9]

Бэр и Митнер в Париже проанализировали процесс образования трека, используя формулу Гайтлера для тормозного излучения электронов, и нашли ошибку, вызываемую тормозным излучением при измерении трека по трем точкам. Они вывели выражение для коррекции к вероятному импульсу, выражение для ошибки в импульсе и предложили метод измерений с оптимальными длинами.

Их формулы выведены в предположении, что, благодаря резкому изменению кривизны трека, можно заметить однократную радиационную потерю энергии электрона, большую, чем определенная доля начальной энергии. Треки, содержащие такие единичные потери, измеряются до области с резким изменением кривизны. Если величина наименьшего единичного излучения, которая может быть обнаружена неожиданным изменением в кривизне есть k_0 , тогда импульс по Бэру-Митнеру в начале трека дается выражением :

$$\rho = \frac{0.3 \cdot B \cdot \ell_p^2}{8 \cos \lambda s} \left(1 + \frac{b \ell_p y_0}{2 \cos \lambda} \right) + \frac{\mathcal{E}_{coll} \cdot \ell_p}{2 \cos \lambda} \quad (I)$$

$$y_0 = - \ln \frac{E - k_0}{E} \quad (I)$$

Ошибка в импульсе вычисляется по формуле:

$$\frac{\Delta(1/\rho)}{1/\rho} = \left[\frac{b \cdot \ell_p \cdot y_0^2}{6 \cdot \cos \lambda} + \left(\frac{42}{0.3B} \right)^2 \cdot \frac{1}{6 \ell_p \cdot \cos \lambda \cdot \chi_0} \right]^{1/2} \quad (2)$$

Где

ℓ_p - длина хорды от первой до третьей измеренных точек, спроектированная на плоскость, перпендикулярную магнитному полю.

S - стрелка прогиба в средней точке, также спроектирована

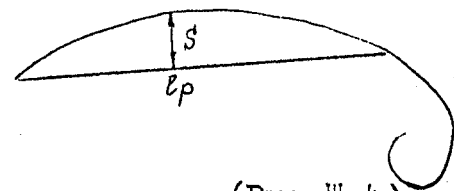
λ - глубинный угол трека

B - поле в кгс

χ_0 - радиационная длина

$b = 1/\chi_0 \cdot \ln 2$ - радиационный параметр Гайтлера

\mathcal{E}_{coll} - средние потери электронов на столкновение в рассматриваемой области энергий.



(Рис. III-4)

В формуле (I) первый член снаружи скобок представляет собой импульс, соответствующий треку с заданными ℓ_p, S и т.д. в

вакууме. Второй член внутри скобок представляет собой коррекцию на тормозное излучение, а член $\left(\frac{E_{coll} \cdot l_p}{2 \cos \lambda} \right)$ является коррекцией на ионизационные потери.

В формуле (2) первый член представляет собой ошибку из-за тормозного излучения, а второй - ошибку из-за многократного рассеяния.

Если продифференцировать формулу (2), то окажется, что ошибка имеет минимум, когда две парциальные ошибки равны, следовательно, существует оптимальная длина для измерений.

$$l_{p \text{ opt}} = \left(\frac{42}{0.38} \right) \frac{\sqrt{\ln 2}}{y_0}$$

В следующей таблице приведены значения оптимальных длин для различных жидкостей (магнитное поле $B \cong 17$ кгс)

X_0 см	110	50	22
$h\nu/E = k_0$	0.33	0.39	0.50
l_{opt} см	15	11	7
Неопределенность в сагитте на оптимальной длине	0.11	0.19	0.33

Метод Бара-Митнера широко применялся в различных экспериментах.

б) Аппроксимация электронного трека параболой и введение поправок к импульсу на ионизационные потери.

Данный метод рассмотрен в работе [10] и использовался для обработки событий, полученных в пропановой пузырьковой камере

В результате измерения координат точек на треках частиц в камере получается набор пространственных координат X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, \dots, N$) для каждого из следов в системе осей X, Y, Z , связанных с камерой. Координаты точек трека на плоскости XOY , перпендикулярной магнитному полю, аппроксимируются параболой вида [12]:

$$y = a \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 + c,$$

где

$$l = \sqrt{(X_1 - X_N)^2 + (Y_1 - Y_N)^2}.$$

Система координат (x, y) определяется следующим образом: Ось X проходит через точки (X_1, Y_1) и (X_N, Y_N) . Ось " Y " лежит в плоскости XOY и перпендикулярна к OX , начало отсчета совпадает с точкой (X_1, Y_1) , оси (x, y) и (X, Y) образуют одинаковые системы, левую или правую, соответственно (рис. 5)

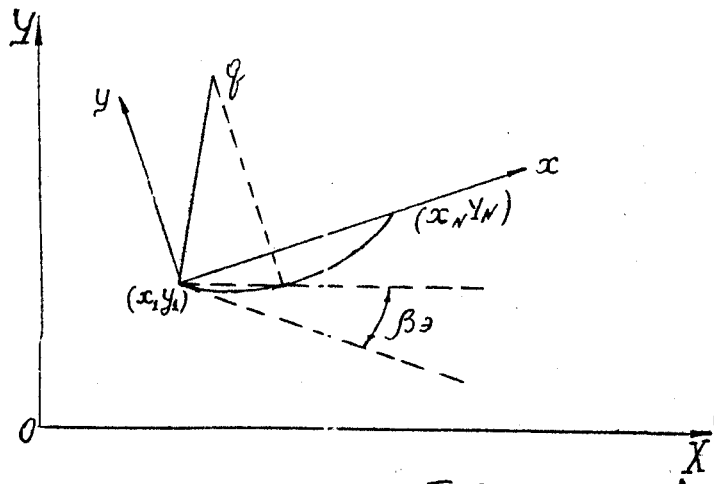


Рис. III-5

φ - центр кривизны параболы в точке с координатами $(\frac{\ell}{2}, c)$ (в системе x, y).

Коэффициенты "а" и "с" определяются методом наименьших квадратов в предположении, что измеренные точки имеют одинаковый вес. За экспериментальное значение радиуса кривизны ($R_э$) проекции трека принимается:

$$R_э = \frac{1}{2a_э} .$$

Угол $\beta_э$ определяется как угол между осью OX и перпендикуляром, проведенным в плоскости XOY к прямой, проходящей через точку (X, Y) и центр кривизны параболы в точке $(\frac{\ell}{2}, c)$.

Угол $\alpha_э$ определяется методом наименьших квадратов, как угол подъема винтовой линии, ось которой проходит через точку φ параллельно оси Z , а радиус кривизны равен $R_э$.

Таким образом, геометрическая программа ставит в соответствие каждому следу три параметра $R_э$, $\beta_э$ и $\alpha_э$ и их среднеквадратичные ошибки, которые определяются по формулам типа:

$$\frac{\Delta R_э}{R_э} = \frac{1}{R_э} \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial R_э}{\partial y_i}\right)^2 (\Delta y_i)^2} .$$

В программе идентификации γ -квантов радиусы кривизны $A = \frac{1}{R}$ электронов (позитронов) корректируются на ионизационные и радиационные потери по формулам:

$$A = \frac{A_э - (a_2 + \frac{\ell}{2} a_3 + \frac{\ell^2}{7} a_4)}{a'_2 + \frac{\ell}{2} a'_3 + \frac{\ell^2}{7} a'_4} \quad \Big| \quad A_э + A_э ;$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 - коэффициенты уравнения проекции средней электронной траектории на плоскость XOY :

$$Y = a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \frac{1}{24} a_4 x^4,$$

q - центр кривизны параболы в точке с координатами $(\frac{c}{2}, c)$ (в системе x, y).

Коэффициенты "а" и "с" определяются методом наименьших квадратов в предположении, что измеренные точки имеют одинаковый вес. За экспериментальное значение радиуса кривизны ($R_э$) проекции трека принимается:

$$R_э = \frac{1}{2a_э} .$$

Угол $\beta_э$ определяется как угол между осью OX и перпендикуляром, проведенным в плоскости XOY к прямой, проходящей через точку (X, Y) и центр кривизны параболы в точке $(\frac{c}{2}, c)$.

Угол $\alpha_э$ определяется методом наименьших квадратов, как угол подъема винтовой линии, ось которой проходит через точку q параллельно оси Z , а радиус кривизны равен $R_э$.

Таким образом, геометрическая программа ставит в соответствие каждому следу три параметра $R_э$, $\beta_э$ и $\alpha_э$ и их средне-квадратичные ошибки, которые определяются по формулам типа:

$$\frac{\Delta R_э}{R_э} = \frac{1}{R_э} \sqrt{\sum_i (\frac{\partial R_э}{\partial y_i})^2 (\Delta y_i)^2} .$$

В программе идентификации γ -квантов радиусы кривизны $A = \frac{1}{R}$ электронов (позитронов) корректируются на ионизационные и радиационные потери по формулам:

$$A = \frac{A_э - (a_2 + \frac{c}{2} a_3 + \frac{c^2}{7} a_4)}{a'_2 + \frac{c}{2} a'_3 + \frac{c^2}{7} a'_4} \quad | \quad A_э + A_э ;$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 - коэффициенты уравнения проекции средней электронной траектории на плоскость XOY :

$$y = a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \frac{1}{24} a_4 x^4 ,$$

полученной в предположении, что на каждом элементе траектории потери электрона равны средним потерям и потери на излучение на элементе ds не превосходят величину E/k ; где
 E - энергия электрона,
 k - константа, определяющая отбор следов на измерения,
 ds - элемент длины электронного трека в пространстве.

$$a_1 = -\operatorname{tg} \phi ;$$

$$a_2 = A \cdot \frac{1}{\cos^3 \phi} ;$$

$$a_3 = \frac{A \cdot k \cdot \cos \phi - 3A^2 \cdot \sin \phi}{\cos^5 \phi} ;$$

$$a_4 = \frac{\cos \phi [\cos \phi (3A^3 + k^2 A) - 5kA^2 \sin \phi]}{\cos^7 \phi} +$$

$$+ \frac{-5A \cdot \sin \phi [A \cdot k \cdot \cos \phi - 3A^2 \cdot \sin \phi]}{\cos^7 \phi} ;$$

$$a'_i = \frac{\partial a_i}{\partial A} \quad (i = 1, 2, 3, 4) .$$

ϕ - угол поворота между осью Ox и касательной к траектории в начальной точке.

$$\sin \phi \approx \sin \phi_0 - \frac{F'}{F'_1} ;$$

$$\sin \phi_0 = \frac{A\ell}{1 + \sqrt{1 + A^2 \ell^2}} ;$$

$$F' = \sin \phi - \frac{A\ell}{2} \cdot \cos^2 \phi_0 \left[1 + \frac{k}{3} \cdot \ell \cdot \cos \phi_0 + \frac{\ell^2 (3A^2 + k^2)}{12} \cdot \cos^2 \phi_0 \right]$$

$$F'_1 = 1 + \frac{A \cdot \ell}{2} \cos^2 \phi_0 \left[\frac{k\ell}{3} \operatorname{tg} \phi_0 + \frac{\ell^2 (3A^2 + k^2)}{6} \cdot \sin \phi_0 \right]$$

Правильность введения поправок на ионизационные и радиационные потери электронов в среде была проверена измерением массы

π^0 - мезона в пропановой пузырьковой камере. Было отобрано 167 0 - лучевых звезд с не менее чем двумя γ - квантами. Среднее значение массы π^0 - мезона после введения поправок оказалась равной $136.6 \pm 2 \text{ Мэв}$ — без них $122 \pm 3 \text{ Мэв}$.

б) Аппроксимация электронного трека кривой с переменным радиусом кривизны с использованием матрицы многократного рассеяния

Для аппроксимации электронных треков использовалась кривая

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y^2, \text{ а минимизировался функционал}$$

вида:

$$\chi^2 = \sum_{i,k=1}^n \Delta y_i \cdot S_{ik}^{-1} \cdot \Delta y_k,$$

где

n - число точек на треке,

Δy_i - отклонение экспериментальных точек от аппроксимирующей трек функции,

$S_{ik} = F_{ik} + \sigma^2(mes) \cdot \delta_{ik}$ - матрица ошибок.

$$F_{ik} = \frac{E_s^2 (m^2 + p^2)}{6 X_0 p^4} \sum_{j=1}^{i-1} (\ell_{j,j+1}^3 \cdot (1 + \frac{3\ell_{j+1,i}}{2\ell_{j,j+1}}) \times (1 + \frac{3\ell_{j+1,k}}{2\ell_{j,j+1}}) + \frac{3}{4} \ell_{j,j+1} \times \ell_{j+1,i} \times \ell_{j+1,k});$$

матрица кулоновского рассеяния,

$\ell_{j,j+1}$ - расстояние между точками j и $j+1$;

$\sigma(mes)$ - ошибка измерения,

δ_{ik} - символ Кронекера.

Проверка правильности учета кулоновского рассеяния и тормозного излучения у электронных треков производилась при анализе событий с двумя γ -квантами, „смотрящими” в 0,2 и 4-луче звезды типа п-р. События были получены на метровой пропановой камере ОИЯИ ($X = 110$ см), экспонированной в пучке π^- с импульсом $5.1 \text{ gev}/c$.

Сравнивался данный метод и метод проведения окружности через электронные треки с последующим введением поправок к импульсу. Было найдено, что средние значения массы π^0 -мезона совпадают в пределах ошибок, а ширины распределений в первом случае $\frac{\Delta M_{\gamma\gamma}}{M_{\pi^0}} = 8 \pm 1\%$, а во втором — $\frac{\Delta M_{\gamma\gamma}}{M_{\pi^0}} = 11 \pm 1\%$.

в) Метод Морелле [13].

Заданы пространственные координаты трека X, Y, Z .

а) В плоскости XY МНК к треку подгоняется парабола вида $y = ax^2 + bx + c$, по коэффициентам которой находится радиус кривизны R .

б) В плоскости $Z, R\varphi$ проводится прямая линия:

$$Z = Z_0 + R\varphi$$

φ - азимутальный угол.

При этом каждой точке приписывается вес и учитываются корреляции между соседними точками из-за многократного рассеяния

$$\sigma^2 = (\sigma_{z \text{ meas}})^2 + (\sigma_{\text{scatt}})^2$$

$(\sigma_z)_{\text{meas}}$ - ошибка измерения Z - координаты, постоянная для всех точек.

Матрица корреляции ошибок многократного рассеяния равна: ^{*})

$$(\sigma_{scatt}^+)^2 x_j \cdot x_i = \frac{\phi_0^2}{\sqrt{2}} x_i^2 (3x_j - x_i),$$

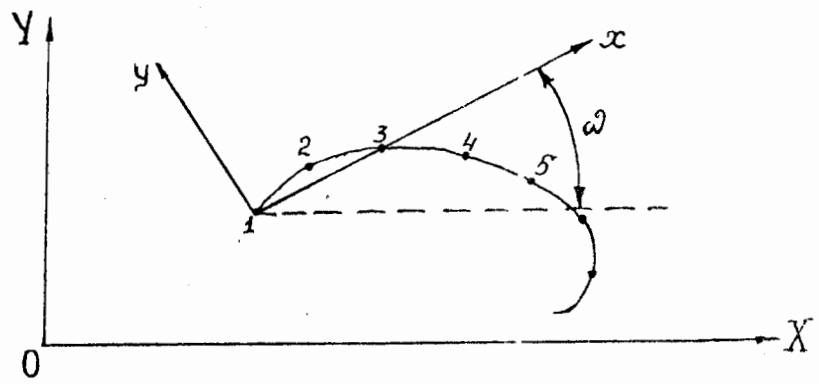
где $x = R\psi$

j, i - индексы двух точек,

$$\phi_0^2 = \frac{E_s^2}{(\rho\beta c)^2} \cdot \frac{1}{x_0}$$

В результате получается глубинный угол с ошибкой: $\lambda \pm \delta\lambda$

в) Координаты X, Y преобразуются в систему, в которой одна из осей (x) проходит через первую и третью точки трека, а другая перпендикулярна ей (y)



ω - угол поворота новой системы относительно старой,

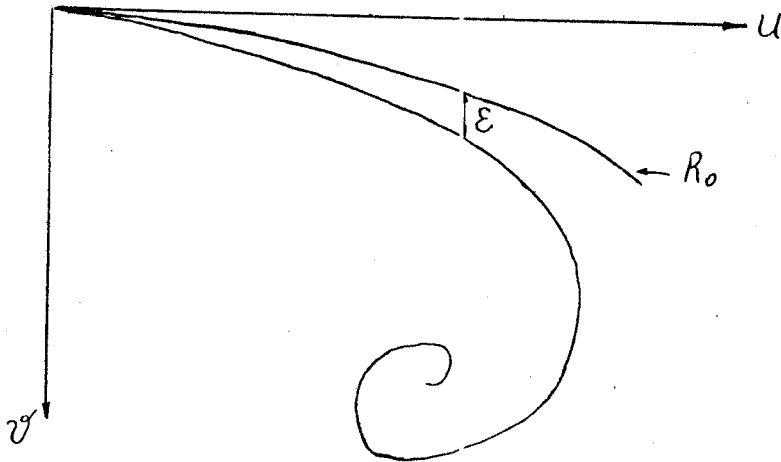
г) Трек аппроксимируется кривой, учитывающей тормозное излучение электрона:

$$\mathcal{E}(z) = \frac{z^2}{R_0} \left[\frac{e^{A_1 \beta z} - 1}{A_1 \beta z^2} - \frac{1}{A_1 \beta z} - \frac{1}{2} \right],$$

=====

ж) Она совпадает с матрицей F_{ik} пункта б), при суммировании последней по индексу j .

здесь ε - отклонение кривой тормозного излучения от окружности с радиусом R_0 .

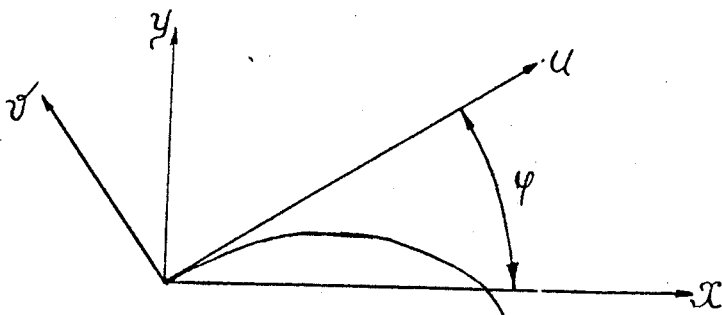


Эта кривая при данном $b = \frac{1}{\chi_0 \ln 2}$ зависит от трех величин: α_0 , R_0 , φ .

$\alpha_0 = \ln\left(1 - \frac{h\nu_{\max}}{E_0}\right)$ - параметр обрезания, характеризующий максимальную долю энергии, потерянную электроном.

φ - угол поворота системы координат (u, v) относительно системы координат (x, y) . (У системы (u, v) начало координат находится в начальной точке трека, ось u направлена по касательной к окружности с радиусом R_0 , ось v перпендикулярна к u).

$$A_1 = f(\alpha_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m! m} \alpha_0^m$$



При 8 значениях $\alpha_0 = 0.1, 0.2, \dots, 0.8$ минимизируется функционал:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\varepsilon_i - \varepsilon(Z_i)]^2}{\sigma_i^2} \quad \sigma_i^2 = (\sigma_{x,y;max})^2 + (\sigma_{i;scatt})^2$$

Находится значение α_0 , при котором χ^2 минимален.

д) После того, как найдены α_0 и φ , через координаты u, v снова проводится кривая тормозного излучения, но каждой точке, кроме ошибок из-за измерения и многократного рассеяния, приписывается ошибка из-за тормозного излучения.

Матрица корреляции ошибок координат из-за тормозного излучения равна:

$$(G^{-1})_{ij} = \langle \varepsilon_j^2 \rangle + u_i u_j \langle \varepsilon_j \Delta \theta_j \rangle + \frac{u_i^2}{2R_0} [\langle \varepsilon_j e^{\alpha(u_j)} \rangle - \langle \varepsilon_j \rangle] + \langle e^{\alpha(u_j)} \varepsilon_j \rangle \langle \varepsilon_j \rangle - \langle \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_j \rangle,$$

где

$$\langle \varepsilon_j^2 \rangle = 2 \frac{u_j^4}{R_0^2} \left[\frac{1}{(A_2 - A_1)^2 v^2 u_j^2} \cdot \left(\frac{e^{A_2 v u_j} - 1}{(A_2 v u_j)^2} - \frac{e^{A_1 v u_j} - 1}{(A_1 v u_j)^2} - \frac{1}{A_2 v u_j} + \frac{1}{A_1 v u_j} \right) + \frac{1}{(A_2 - A_1) v u_j} \left(2 \left(\frac{e^{A_2 v u_j} - 1}{(A_2 v u_j)^2} - \frac{1}{(A_2 v u_j)^2} \right) - \frac{1}{A_2 v u_j} - \frac{e^{A_1 v u_j} - 1}{(A_1 v u_j)^2} + \frac{1}{A_1 v u_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{A_1 v u_j} - 1}{(A_1 v u_j)^2} - \frac{1}{A_1 v u_j} \right) + \frac{1}{8} \right];$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_j \Delta \theta_j \rangle = & \frac{u_j^3}{R_0^2} \left[\frac{1}{(A_2 - A_1) v u_j} \left(\frac{e^{A_2 v u_j - 1}}{A_2 v u_j} - \frac{e^{A_1 v u_j - 1}}{A_1 v u_j} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{(A_2 - A_1) v u_j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{e^{A_2 v u_j - 1}}{(A_2 v u_j)^2} - \frac{1}{A_2 v u_j} \right) - \right. \\ & - \left. \frac{e^{A_1 v u_j - 1}}{(A_1 v u_j)^2} + \frac{1}{A_1 v u_j} - \frac{e^{A_1 v u_j - 1}}{A_1 v u_j} \right) - \\ & \left. - \frac{e^{A_1 v u_j - 1}}{A_1 v u_j} \left(\frac{1}{A_1 v u_j} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{A_1 v u_j} + \frac{1}{2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_j \cdot e^{\alpha(u_j)} \rangle = & \frac{u_j^2}{R_0} \left\{ \frac{1}{(A_2 - A_1)^2 v^2 u_j^2} (e^{A_2 v u_j} - e^{A_1 v u_j}) - \right. \\ & \left. - e^{A_1 v u_j} \left(\frac{1}{(A_2 - A_1) v u_j} + \frac{1}{2} \right) \right\}; \end{aligned}$$

$$\langle \varepsilon_j \rangle = \frac{u_j^2}{R_0} \left[\frac{e^{A_1 v u_j} - 1}{A_1^2 v u_j^2} - \frac{1}{A_1 v u_j} - \frac{1}{2} \right];$$

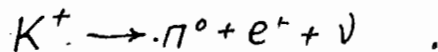
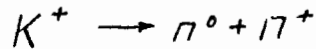
$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle = & \langle \varepsilon_i^2 \rangle + (u_j - u_i) \langle \varepsilon_i \Delta \theta_i \rangle + \langle \varepsilon_i e^{\alpha(u_i)} \rangle (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \\ & + \frac{1}{2 R_0} (u_j - u_i)^2 (\langle e^{\alpha(u_i)} \varepsilon_i \rangle - \langle \varepsilon_i \rangle). \end{aligned}$$

Данный метод был проверен на обширном экспериментальном материале:

I) При измерении энергии электронов в камере, заполненной жидкостью с радиационной длиной $\chi_0 = 25$ см, экспонированной в пучке электронов со средним импульсом 500 Мев/с.

По измерениям 800 электронных треков было найдено, что средняя энергия равна 498.6 ± 2 Мэв/с и ошибка $\sigma = 20\%$, тогда как по методу Бэра-Митнера получается $\sigma = 34\%$.

2) При измерении энергии γ - квантов от K^+ распадов при остановке:



И в этом случае было также найдено преимущество данного метода перед методом Бэра-Митнера.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ТОРМОЗЯЩЕЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В НЕОДНОРОДНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, МЕТОДОМ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

В работе (13) рассмотрен вопрос об определении параметров неизлучающей заряженной частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле из условия обращения в максимум функции правдоподобия:

$$\mathcal{L} = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^N \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_{\varepsilon_i}} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{\sigma_{\delta_i}} \right] \right\}, \quad \text{где} \quad (1)$$

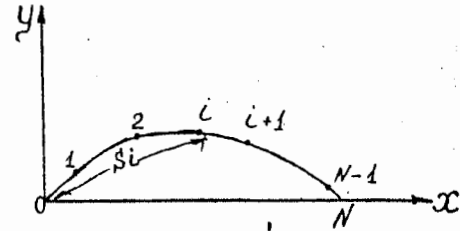
ε_i - измерительная ошибка в координате y_i . (Пространственные координаты точек трека предполагаются измеренными независимо друг от друга)

δ_i - проекция на плоскость XOY угла многократного рассеяния на i -ом интервале между точками $i-1$ и i .

(Предполагается, что магнитное поле направлено в основном по оси H_z и система координат выбрана так, что у измеренных точек трека $x_0 = y_0 = y_N = 0$

$\mathcal{D}\epsilon_i, \mathcal{D}\delta_i$ - соответствующие дисперсии.

$$\mathcal{D}\delta = \left(\frac{12}{\rho v}\right)^2 \epsilon/x_0$$



Такой вид функции правдоподобия получился при пренебрежении η_i - боковым смещением частицы из-за многократного рассеяния (см. формулу В-1) по сравнению с δ_i

$$\epsilon_i = \epsilon_i (y_i, y_0, \epsilon_0, \rho_0, \beta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, s_1, \dots, s_n) \quad (2)$$

$$\epsilon_0 = y_0 - T_0 \quad (3)$$

- ρ_0 - импульс частицы в начальной (нулевой) точке траектории.
- β_0 - угол между осью OX и проекцией импульса частицы в начальной точке на плоскость XOY.
- T_0 - истинное значение y -ой координаты в начальной точке,
- s_i - длина дуги проекции траектории на плоскость XOY.

Система уравнений, соответствующая условиям экстремума:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \epsilon_i \sum_{j=1}^i c_j (x_j - x_{j-1}) \right\} = 0 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial A} = 0 \right) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \epsilon_i (x_i - x_0) \right\} = 0 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial B} = 0 \right) \quad (5)$$

$$\epsilon_0 + \sum_{i=1}^N \epsilon_i = 0 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial \epsilon_0} = 0 \right) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\mathcal{D}\epsilon} \sum_{j=1}^N \epsilon_j (x_{i-1} + x_i - 2x_j) + \frac{2\delta_i}{\mathcal{D}\delta_i} = 0 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial \delta_i} = 0 \right) \quad (7)$$

где A, b - поправки к начальному приближению a_0^*, β_0^*
 a_0 - кривизна

$$a_0 = a_0^* + A \quad |A| \ll a_0 \quad (8)$$

$$\beta_0^* = \beta_0^* + b \quad |b| \ll 1 \quad (9)$$

$$C_i = \sum_{j=1}^N [q_{j-1} + f_{j-1} \cdot \Delta l_j (1 + \frac{1}{2} G_{j-1} \Delta l_j)] + q_{i-1} \cdot \frac{f_{i-1}}{2} (\Delta l_i) (1 + \frac{1}{3} G_{i-1} \Delta l_i); \quad (10)$$

$$q_i = 1 + \frac{p_0 - p_i}{p_i} \left[1 + \frac{3M^2 c^4}{E_0^2} - \frac{2B_1}{V_0^3 \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \Big|_{p=p_0}} \right] \quad (11)$$

M - масса покоя частицы в МэВ/с

c - скорость света

$$E_0^2 = p_0^2 + M^2$$

B_1 и B_2 - константы в формуле ионизационных потерь:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{P}{|P|} \left[\frac{B_1}{V^3} (B_2 + 2 \ln \frac{v \cdot E}{M} - v^2) \right] \quad (12)$$

$$V = P/E;$$

$$f_i = \frac{p_0}{p_i} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_i} \left(\frac{H_{zi}}{H_{z_0}} - \frac{H_{yi} \cdot \sin \beta_i + H_{xi} \cdot \cos \beta_i}{H_{z_0}} \cdot \operatorname{tg} \alpha_i \right) \quad (13)$$

α_0 - угол между касательной к траектории в начальной точке
 и плоскостью XOY

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$G_i = \frac{1}{p_i \cdot \cos \alpha_i} \cdot \frac{d p_i}{d s}$$

Система линейных уравнений в матричной форме записывается
 следующим образом:

$$(Q) \cdot (\Gamma) = (S)$$

- (Γ) - столбец из неизвестных величин,
 (Q) - квадратная матрица из коэффициентов при этих неизвестных величинах,
 (S) - столбец из свободных членов.

Решение системы находится по формуле:

$$(\Gamma) = (Q)^{-1} (S), \text{ где}$$

$(Q)^{-1}$ - матрица, обратная к (Q).

За начальные приближения параметров в формулах (8), (9) и (13) принимаются:

$$P_0^* = P_3 + \left[\frac{0.15}{\cos^2 \alpha} \cdot (H' \cdot R_3 + \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{B \cdot D}{H} + 2B \sin \alpha) - \frac{\tilde{Z}}{2 \cos \alpha} \right] \cdot S_k +$$

$$+ \frac{0.3}{7 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \left(\frac{P_3}{\cos \alpha} \cdot H'' + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{B \cdot H'}{H} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{B' D}{H} + 3 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot B' - \right.$$

$$\left. - \frac{2 \sin \alpha \cdot D}{R_3} + \frac{2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{B \cdot D'}{H} + \frac{3}{8} \frac{\cos \alpha}{R_3} \cdot H + \frac{5}{2} \tilde{Z} \cdot \tilde{M} + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{4} \frac{R_3}{\cos \alpha} \cdot H' \cdot \tilde{M} \right) \cdot S_k^2; \quad (14)$$

$$\beta_0^* = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(- \frac{\tilde{Z}}{2(R_3 + C)} \right); \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0^* = \frac{\sum_{i=0}^N z_i \cdot \sum_{i=0}^N \theta_i - (N+1) \cdot \sum_{i=0}^N z_i \theta_i}{R_3 \left[\left(\sum_{i=0}^N \theta_i \right)^2 - (N+1) \cdot \sum_{i=0}^N \theta_i^2 \right]} \quad (16)$$

$$a_0^* = \frac{0.3 H}{P_0^* \cos \alpha_0^*}; \quad (17)$$

$$P_3 = \frac{0.3 \cdot R_3}{\cos \alpha} \cdot \left[(H_x \cdot \cos \beta + H_y \sin \beta) \cdot \operatorname{tg} \alpha - H_z \right] \quad (18)$$

$$R_3 = \frac{1}{2a_3} \quad (19)$$

a_3 получается при аппроксимации траектории трека параболой вида:

$$y = a \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + c \quad (20)$$

$$a_3 = \frac{(N+1) \sum_{i=0}^N y_i \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2 - \sum_{i=0}^N y_i \cdot \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2}{(N+1) \cdot \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^4 - \left[\sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2 \right]^2} \quad (21)$$

$$c_3 = \frac{\sum_{i=0}^N y_i \cdot \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^4 - \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^N y_i \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2}{(N+1) \cdot \sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2 - \left[\sum_{i=0}^N \left(x_i - \frac{z}{2}\right)^2 \right]^2} \quad (22)$$

$$H = (H_x \cdot \cos \beta + H_y \cdot \sin \beta) \cdot \operatorname{tg} \alpha - H_z$$

$$H' = \left(\frac{\partial H_x}{\partial s} \cdot \cos \beta + \frac{dH_y}{ds} \cdot \sin \beta \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{dH_z}{ds};$$

$$H'' = \left(\frac{d^2 H_x}{ds^2} \cdot \cos \beta + \frac{d^2 H_y}{ds^2} \cdot \sin \beta \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{d^2 H_z}{ds^2};$$

$$B = H_y \cdot \cos \beta - H_x \cdot \sin \beta;$$

$$B' = \frac{dH_y}{ds} \cdot \cos \beta - \frac{dH_x}{ds} \cdot \sin \beta;$$

$$D = H_x \cdot \cos \beta + H_y \cdot \sin \beta;$$

$$D' = \frac{dH_x}{ds} \cdot \cos \beta + \frac{dH_y}{ds} \cdot \sin \beta;$$

$$\tilde{L} = \left. \frac{dP}{ds} \right|_{P=P_3};$$

$$\tilde{M} = \left. \frac{d^2 P}{ds^2} \right|_{P=P_3} = \frac{2B_1 \cdot (V_3^2 M^2 - E_3^2)}{E_3^2 \cdot V_3^4} - \frac{3M^2}{V_3 E_3^2} \cdot \tilde{L}$$

$$S_k = \sum_{j=1}^k \Delta l_j \quad - \text{длина дуги}$$

Поправки к импульсу на ионизационные потери и неоднородность магнитного поля в формуле (14) были получены методом наименьших квадратов при минимизации функционала:

$$Q^2 = \int_0^{S_k} [y(s) - a(x(s) - \frac{z}{2})^2 - c]^2 ds, \quad \text{где}$$

$$x = x_1 \cdot \cos \phi + y_1 \cdot \sin \phi ;$$

$$y = -x_1 \cdot \sin \phi + y_1 \cdot \cos \phi ;$$

$$\cos \phi = \frac{x_1(s_k)}{L} ; \quad \sin \phi = \frac{y_1(s_k)}{L} ;$$

$$L = [x_1^2(s_k) + y_1^2(s_k)] ;$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(s) &= \int_0^s \sin \beta ds' \\ x_1(s) &= \int_0^s \cos \beta ds' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{уравнение траектории, касательной к оси} \\ \text{OX}_1 \text{ и проходящей через точку с координатами } (0, 0) \end{array}$$

$$\beta(s) = \beta_{i-1} + \frac{d\beta_{i-1}}{ds} (s - s_{i-1}) \left[1 + \frac{1}{2} G_{i-1} (s - s_{i-1}) \right]$$

Зависимость между углом поворота β и плоской дугой S была получена в виде разложения по степеням S при интегрировании уравнения движения в неоднородном магнитном поле с учетом торможения. При этом считалось, что точки на траектории измерены столь часто, что в силу малости $\Delta s_i = S_i - S_{i-1}$ можно ограничиться в окрестности $(i-1)$ -ой точки линейным и квадратичным членами в разложении $\beta(s)$ по степеням $(S - S_{i-1})$.

ЛИТЕРАТУРА к III части

1. Б.Росси. Частицы больших энергий, ГИТТЛ, Москва, 1955.
2. Ю.А.Будагов и др. Методы учета кулоновского рассеяния и тормозного излучения при обработке камерных треков. Препринт, ОИЯИ, Р10-3021, Дубна, 1966 г.
3. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ, Москва, 1956 г.
4. B. Ronne *CERN experience in using THRESH for heavy liquid chambers* CERN 63-23, p. 47
5. W.C. Moorhead *A possible simplified fitting procedure in THRESH for heavy liquids.* CERN 63-23, p. 39
6. J. Sparrow *The heavy liquid geometry programme in use at the Rutherford Laboratory* CERN 63-23, p. 93
7. J. Hennessy *The geometry programme "Bulle" of the Ecole Polytechnique and experience in its use.* CERN 63-23, p. 59.
8. M. Huybrechts *A new geometry programme* CERN 63-23, p. 147
9. Z. Behr and P. Mittner, *Nucl. Instr. and Meth.* 20, 446, 1963.
10. В.Г.Гришин и др. Измерение энергетических и угловых характеристик электронов и γ -квантов в пропановой пузырьковой камере. Препринт ОИЯИ, Р-2277, Дубна, 1965 г.
11. В.Ф.Вишневский и др. Схема обработки треков в пузырьковой камере, сфотографированной двухобъективной стереоголовкой. Препринт ОИЯИ, Р-1486, Дубна, 1963 г.
12. О.Благонравова и др. Программа геометрической реконструкции для пропановой камеры, сфотографированной двухобъективной стереоголовкой. Препринт ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965 г.
13. D. Morellet *Electrons, gammas and π^0 in heavy liquid bubble chambers* Université de Paris Z.A.Z. 1190 April 1963