ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

В.Г. Маханьков

910

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКОМПЕНСИРОВАННОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПЛАЗМОЙ

Дубна 1962 год

В.Г. Маханьков

910

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКОМПЕНСИРОВАННОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПЛАЗМОЙ

Получено дисперсионное уравнение электромагнитных колебаний для неограниченного пучка заряженных частиц с скомпенсированным зарядом, движущегося в магнитоактивной плазме с релятивистской скоростью $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{B}_0$. Исследуются волны, распространяющиеся вдоль внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$, при условии, когда тепловым движением частиц можно пренебречь.

§ 1. В настоящей работе мы следуем общему методу исследования электромагнитных волн в системе, состоящей из неограниченного пучка заряженных частиц и покоящейся плазмы (см., например,/1/). Как известно, спектр электромагнитных колебаний в такой системе описывается дисперсионным уравнением:

$$| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} (\omega, \vec{k}) | = 0, \tag{1.1}$$

где ω и $\vec{k}$ суть частота и волновой вектор, а $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ - тензор диэлектрической проницаемости системы.

Уравнение (1.1) связывает величины ω и $\vec{k}$. Если найденная с помощью решения этого уравнения частота $\omega(\vec{k})$ имеет положительную мнимую часть $Im\ \omega > 0$, то колебания становятся нарастающими во времени, а состояние системы - неустойчивым.

Пренебрегая столкновениями частиц, тензор диэлектрической проницаемости системы можно записать в виде:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \epsilon^{(2)}_{ij}(\omega, \vec{k}) + \epsilon^{(1)}_{ij}(\omega, \vec{k}) - \delta_{ij}, \tag{1.2}$$

где $\epsilon^{(1)}_{ij}(\omega, \vec{k})$ - тензор диэлектрической проницаемости покоящейся плазмы, а $\epsilon^{(1)}_{ij}(\omega, \vec{k})$ - тензор диэлектрической проницаемости пучка, движущегося вдоль внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$. Выражение для $\epsilon^{(1)}_{ij}(\omega, \vec{k})$ можно получить с помощью преобразования Лоренца для плотности тока и заряда/2/:

$$\epsilon^{(1)}_{ij}(\omega, \vec{k}) = \frac{\omega'}{\omega} a_{i\mu} \{ \epsilon^{(1)'}_{\mu\nu}(\omega', \vec{k}') - \delta_{\mu\nu} \} \beta_{\nu j} + \delta_{ij}. \tag{1.3}$$

Здесь $\epsilon^{(1)'}_{\mu\nu}(\omega', \vec{k}')$ - тензор диэлектрической проницаемости пучка в собственной системе координат, ω' и $\vec{k}'$ - частота и волновой вектор в этой системе, а $a_{i\mu}$ и $\beta_{\nu j}$ имеют вид:

$$a_{i\mu} = \delta_{i\mu} + \frac{u_i u_\mu}{u^2}(\gamma - 1) + \gamma \frac{u_i k_\mu}{\omega'} ,$$

$$\beta_{\nu j} = \frac{\omega'}{\omega}\delta_{\nu j} - \frac{u_\nu u_j}{u^2}(\gamma - 1) + \gamma \frac{k_\nu u_j}{\omega} , \tag{1.4}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} ,$$

$$\vec{k}' = \vec{k} + (\gamma - 1)\vec{u}\,\frac{\vec{u}\vec{k} - \omega\frac{\gamma+1}{\gamma}}{u^2} , \tag{1.5}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - \vec{u}\vec{k}).$$

Следует заметить, что при переходе к лабораторной системе координат, связанной с покоящейся плазмой, преобразуется также и ларморовская частота $\Omega_e = \frac{e B_0}{m c}$, а именно $\Omega_e' = \gamma\Omega_e$. Ленгмюровская же частота $\omega_{0e} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$ при этом не преобразуется, так как $N_e' = \gamma N_e$, а $m' = \gamma m$; в результате $\omega_{0e}' = \omega_{0e}$.

Подставляя (1.2) в (1.1), получим дисперсионное уравнение электромагнитных волн.

§ 2. Рассмотрим вначале случай, когда отсутствует внешнее магнитное поле, $\vec{B}_0 = 0$. В пределе двухжидкостной гидродинамики (которая справедлива в области частот $\omega \gg k v_{e;i}$, когда тепловым движением частиц можно пренебречь) тензоры $\epsilon_{ij}^{(1)'}(\omega',0)$ и $\epsilon_{ij}^{(2)}(\omega,0)$ диагональны. При этом иэ формул (1.3) и (1.4) получаем:

$$\epsilon_{ij}^{(1)}(\omega,\vec{k}) = (\epsilon^{(1)'}(\omega,0) - 1)\left[\frac{\omega'^2}{\omega^2}\delta_{ij} - (\gamma^2 - 1)\frac{u_i u_j}{u^2} + \gamma^2\frac{u_i u_j}{u^2}\frac{k^2 u^2}{\omega^2} + \gamma\omega'\frac{k_i u_j + u_i k_j}{\omega^2}\right]. \tag{2.1}$$

Дисперсионное уравнение (1.1) в рассматриваемом случае распадается на два уравнения, одно из которых является аналогом поперечных волн, а другое — аналогом продольных волн в плазме. Первое из них

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left[\epsilon^{(2)}(\omega,0) + \frac{\omega'^2}{\omega^2}(\epsilon^{(1)'}(\omega',0) - 1)\right] = 0 \tag{2.2}$$

имеет лишь такие решения $\omega(\vec{k})$, которые соответствуют затухающим электромагнитным колебаниям системы /1/. Второе уравнение имеет вид:

$$\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon^{(2)}(\omega,0)+\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\epsilon^{(1)'}(\omega',0)-1\right)\right)\right]\left(\epsilon^{(2)}(\omega,0)+\epsilon^{(1)'}(\omega',0)-1\right)$$
$$-\frac{k^2u^2-(\vec{k}\,\vec{u})^2}{c^2}\,\gamma^2(\epsilon^{(1)'}-1)(\epsilon^{(2)}-1)=0. \tag{2.3}$$

Исследуем более подробно это уравнение. При $u \ll c$ из уравнения (2.3) получаем:

$$\epsilon^{(1)'}+\epsilon^{(2)}-1=0, \tag{2.4}$$

или, подставляя выражения для $\epsilon^{(1)'}$ и $\epsilon^{(2)}$,

$$\frac{\omega^2_{10e}}{(\omega-\vec{u}\,\vec{k})^2}+\frac{\omega^2_{20e}}{\omega^2}-1=0. \tag{2.5}$$

Ввиду пренебрежения пространственной дисперсией уравнение (2.5) справедливо лишь при скоростях пучка $\vec{u}$, больших чем тепловые скорости частиц в системе.

В области частот $\omega \gg \vec{k}\,\vec{u}$, когда фазовая скорость продольных волн больше скорости пучка, уравнение (2.5) описывает ненарастающие во времени колебания (учет мнимых частей $\epsilon^{(1)}$ и $\epsilon^{(2)}$ приводит к затуханию этих волн).

Для частот $\omega \lesssim \vec{k}\,\vec{u}$ существуют решения, соответствующие нарастающим во времени колебаниям системы.

Решения уравнения (2.5) в области частот $\omega \ll \vec{k}\,\vec{u}$ имеют вид:

$$\omega=\pm\frac{\vec{k}\,\vec{u}\;\omega_{20e}}{\sqrt{(\vec{k}\,\vec{u})^2-\omega^2_{10e}}}. \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что при $(\vec{k}\,\vec{u})^2<\omega^2_{10e}$ состояние системы неустойчиво. Полученное выражение справедливо при $N_{2e} \ll N_{1e}$.

В обратном предельном случае, когда $N_{1e} \ll N_{2e}$, из уравнения (2.5) имеем:

$$\omega=\vec{k}\,\vec{u}\pm\frac{\omega_{10e}}{\sqrt{1-\frac{\omega^2_{20e}}{(\vec{k}\,\vec{u})^2}}}, \tag{2.7}$$

откуда следует, что при $(\vec{k}\vec{u})^2 < \omega^2_{20e}$ колебания в системе будут нарастающими во времени.

Существует еще одна область неустойчивости состояния системы при любых значениях N_{1e} и N_{2e}, а именно, область $\omega \ll \omega_{20e}$, при этом

$$\omega = \vec{u}\vec{k}\,\frac{1 \pm i\sqrt{\frac{N_{1e}}{N_{2e}}}}{1 + \frac{N_{1e}}{N_{2e}}}\,. \tag{2.8}$$

Выражение (2.8) справедливо, когда $\vec{u}\vec{k} \ll \omega_{20e}\sqrt{1 + \frac{N_{1e}}{N_{2e}}}$.

Точное решение уравнения (2.5) можно получить для одинаковых плотностей электронов в пучке и плазме, $N_{1e} = N_{2e}$ (или $\frac{N_{1e} - N_{2e}}{N_e} \ll 1$). В этом случае заменой $\omega_1 = \omega - \frac{\vec{u}\vec{k}}{2}$ уравнение (2.5) приводится к биквадратному уравнению

$$\frac{\omega^2_{0e}}{(\omega_1 - \frac{\vec{u}\vec{k}}{2})^2} + \frac{\omega^2_{0e}}{(\omega_1 + \frac{\vec{u}\vec{k}}{2})^2} - 1 = 0\,,$$

решение которого имеет вид:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\,\vec{u}\vec{k} \pm \sqrt{\omega^2_{0e} + \frac{(\vec{u}\vec{k})^2}{4} \pm \omega_{0e}\sqrt{\omega^2_{0e} + (\vec{u}\vec{k})^2}}\,. \tag{2.9}$$

Из этого выражения видно, что при $\vec{u}\vec{k} < 2\omega_{0e}$ колебания в системе становятся нарастающими во времени, а состояние системы – неустойчивым.

Часто рассматривают плазму, в которой все электроны имеют некоторую направленную скорость относительно ионов. Строго говоря, в этом случае в системе имеется ток и неоднородное магнитное поле, поэтому применять понятие диэлектрической проницаемости некорректно. Однако в определенных условиях магнитным полем можно пренебречь (например, при небольших скоростях пучка электронов конечного радиуса). При этом дисперсионное уравнение электромагнитных колебаний принимает вид:

$$1 - \frac{\omega^2_{0e}}{(\omega - \vec{u}\vec{k})^2} - \frac{\omega^2_{0i}}{\omega^2} = 0\,.$$

В области частот $\omega \gg \vec{u}\vec{k}$ это уравнение, как и уравнение (2.5), имеет лишь такие решения, которые соответствуют незатухающим колебаниям. При $\omega \ll \vec{u}\vec{k}$ получаем

$$\omega^2 = \frac{\omega^2_{0i}}{1 - \omega^2_{0e}/(\vec{u}\vec{k})^2}\,, \tag{2.10}$$

и, если $(\vec{u}\vec{k})^2 < \omega_{0e}^2$, то колебания становятся нарастающим во времени. Легко найти также решения этого уравнения в области частот $\omega \approx \vec{u}\vec{k}$. Имеем

$$\omega = \vec{u}\vec{k} \pm \frac{\omega_{0e}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{01}^2}{(\vec{u}\vec{k})^2}}} . \qquad (2.11)$$

При $\omega_{01}^2 > (\vec{u}\vec{k})^2$ колебания, соответствующие этому решению, становятся неустойчивыми.

Приведенное здесь рассмотрение справедливо только при скоростях пучка, больших по сравнению с тепловыми скоростями частиц в системе. Можно было бы провести исследование для множества различных случаев возбуждения электромагнитных колебаний при учете теплового движения частиц. Однако, ввиду того, что это исследование было проведено в ряде работ (см., например, /1/), мы останавливаться здесь на них не будем.

Рассмотрим теперь случай релятивистских скоростей пучка, когда $u/c \sim 1$. Как и выше, тепловым движением частиц пренебрегаем, т.е. $\omega \gg k v_{i;e}$. В этом случае уравнение (2.3) принимает вид:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{10e}^2 + \omega_{20e}^2}{c^2} \right] \left[1 - \frac{\omega_{10e}^2/\gamma^2}{(\omega - \vec{u}\vec{k})^2} - \frac{\omega_{20e}^2}{\omega^2} \right] = \qquad (2.12)$$

$$= \frac{k^2 u^2 - (\vec{k}\vec{u})^2}{\omega^2 c^2} \, \frac{\omega_{10e}^2 \, \omega_{20e}^2}{(\omega - \vec{u}\vec{k})^2} = 0 .$$

В области частот $\omega \gg \vec{k}\vec{u}$ это уравнение описывает ненарастающие во времени колебания. В обратном предельном случае, когда $\omega \ll \vec{u}\vec{k}$, получаем

$$\omega^2 = A \pm \sqrt{A^2 - B} . \qquad (2.13)$$

Здесь $$A = \frac{1}{2}\, \frac{(k^2c^2 + \omega_{10e}^2 + \omega_{20e}^2)\left[(\vec{k}\vec{u})^2 - \omega_{10e}^2/\gamma^2\right] + \omega_{20e}^2 (\vec{k}\vec{u})^2}{(\vec{k}\vec{u})^2 - \omega_{10e}^2/\gamma^2} ,$$

$$B = \frac{\omega_{20e}^2 (\vec{k}\vec{u})^2 (k^2c^2 + \omega_{10e}^2 + \omega_{20e}^2) + \omega_{10e}^2 \omega_{20e}^2 (k^2u^2 - (\vec{k}\vec{u})^2)}{(\vec{k}\vec{u})^2 - \omega_{10e}^2/\gamma^2} .$$

Выражение (2.13) при достаточно большой плотности электронов в пучке $N_{1e} \gg N_{2e}$ может стать комплексным, что соответствует нарастающим колебаниям плазмы. При $u/c \to 0$ это выражение переходит в (2.6).

Приведем также решение уравнения (2.12) в случае малой плотности частиц в пучке, когда $N_{1e} \ll N_{2e}$. Имеем

$$\omega = \vec{k}\vec{u} \pm \frac{\left(k^2 - \frac{(\vec{k}\vec{u})^2}{c^2} + \frac{\omega_{10e}^2 + \omega_{20e}^2}{c^2}\right)\frac{\omega_{10e}^2}{\gamma^2} + \frac{(k^2u^2 - (\vec{k}\vec{u})^2)\omega_{10e}^2\omega_{20e}^2}{(\vec{k}\vec{u})^2 c^2}}{\sqrt{\left(k^2 - \frac{(\vec{u}\vec{k})^2}{c^2} + \frac{\omega_{10e}^2 + \omega_{20e}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_{20e}^2}{(\vec{u}\vec{k})^2}\right)}}. \qquad (2.14)$$

Из этого выражения видно, что при $\omega_{20e}^2 > (\vec{k}\vec{u})^2$ частота становится комплексной, а состояние системы – неустойчивым. В этом случае, когда частота колебаний много меньше ленгмюровской частоты электронов в плазме ($\omega \ll \omega_{20e}$) решение принимает вид:

$$\omega = \frac{\omega_{20e}^2 \vec{u}\vec{k} \pm i\omega_{10e}\omega_{20e}\sqrt{\frac{(\vec{u}\vec{k})^2}{\gamma^2} + \frac{(u^2k^2 - (\vec{u}\vec{k})^2)(\omega_{20e}^2 + \omega_{10e}^2/\gamma^2)}{k^2c^2 + \omega_{10e}^2 + \omega_{20e}^2}}}{\omega_{10e}^2/\gamma^2 + \omega_{20e}^2}. \qquad (2.15)$$

В пределе $u/c \to 0$ выражения (2.14) и (2.15) переходят соответственно в (2.7) и (2.8).

Для наглядности рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль пучка $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{u}$. Тогда уравнение (2.12) распадается, как и в нерелятивистском случае, на два уравнения, одно из которых соответствует ненарастающим во времени колебаниям, являющимся аналогом поперечных колебаний в плазме, другое имеет вид:

$$1 - \frac{\omega_{20e}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{10e}^2/\gamma^2}{(\omega - uk)^2} = 0. \qquad (2.16)$$

Это уравнение отличается от нерелятивистского уравнения (2.5) тем, что в третьем члене присутствует множитель $1/\gamma^2$; поэтому, заменив в выражениях (2.6), (2.7), (2.8) ω_{10e}^2 на ω_{10e}^2/γ^2, получим решение уравнения (2.16) в соответствующих областях частот:

$$\omega = \pm \frac{\omega_{20e}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{10e}^2/\gamma^2}{u^2 k^2}}}, \quad \omega << uk \tag{2.17}$$

$$\omega = \vec{u}\vec{k} \pm \frac{\omega_{10e}/\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{20e}^2}{u^2 k^2}}}, \quad \omega \sim uk$$

и, наконец,

$$\omega = uk \frac{1 \pm i \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{N_{1e}}{N_{2e}}}}{1 + \frac{1}{\gamma} \frac{N_{1e}}{N_{2e}}}, \quad \omega << \omega_{20e}. \tag{2.18}$$

Можно рассмотреть еще случай ультрарелятивистских скоростей пучка, когда $\gamma^2 >> 1$ и $\frac{\omega_{10e}^2}{(\omega - uk)^2} \sim \frac{\omega_{20e}^2}{\omega^2}$. При этом имеем из (2.16)

$$\omega^2 = \omega_{20e}^2 \left(1 + \frac{\omega_{10e}^2/\gamma^2}{(\omega_{20e} - uk)^2}\right). \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что если разность $(\omega_{20e} - uk)$ не очень мала (только в этом случае применимо полученное выражение), то влияние пучка на продольные колебания в такой системе пренебрежимо мало.

Как было уже отмечено ранее, можно рассмотреть плазму, в которой все электроны имеют некоторую направленную скорость относительно ионов. В случае релятивистских скоростей электронов исследование с помощью понятия диэлектрической проницаемости становится еще более некорректным, так как трудно в этом случае говорить о малых токах и о пренебрежении неоднородным магнитным полем.

Для случаев, когда это можно сделать для волн, распространяющихся вдоль пучка, получено уравнение

$$1 - \frac{\omega_{0e}^2/\gamma^2}{(\omega - uk)^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} = 0, \tag{2.20}$$

которое в области частот $\omega << uk$ имеет решения $\omega^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{1 - \omega_{0e}^2/\gamma^2 u^2 k^2}$, а в области частот $\omega \sim uk$ — $\omega = uk \pm \frac{\omega_{0e}/\gamma}{\sqrt{1 - \omega_{0i}^2/u^2k^2}}$ эти решения являются комплексными при $(uk)^2 > \frac{\omega_{0e}^2}{\gamma^2}$ $(uk)^2 > \omega_{0i}^2$ соответственно.

§ 3. При наличии магнитного поля количество неустойчивостей значительно повышается. Естественно ожидать появления неустойчивых решений в тех областях спектра, где антиэрмитовские части тензоров $\epsilon_{ij}^{(1)'}(\omega', \vec{k}')$ и $\epsilon_{ij}^{(2)}(\omega, \vec{k})$ пренебрежимо малы по сравнению с эрмитовскими. Нас будет интересовать из этих областей только такая область спектра колебаний, для которой тепловым движением частиц в плазме и пучке можно пренебречь, т.е. $|\omega \pm \Omega_{e,i}|$, $\omega >> k\, v_{e,i}$.
В этом случае тензоры $\epsilon_{ij}^{(1)'}(\omega', 0)$ и $\epsilon_{ij}(\omega, 0)$ имеют вид:

$$\epsilon_{ij}^{(2)}(\omega, 0) = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(2)} & -ig^{(2)} & 0 \\ ig^{(2)} & \epsilon_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \epsilon_{ij}^{(1)'}(\omega', 0) = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(1)'} & -ig^{(1)'} & 0 \\ ig^{(1)'} & \epsilon_1^{(1)'} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^{(1)'} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

где

$$\epsilon_1^{(1)'} = 1 - \frac{\omega_{10e}^2}{\omega'^2 - \Omega_e'^2} - \frac{\omega_{20i}^2}{\omega'^2 - \Omega_i'^2}, \qquad \epsilon_2^{(1)'} = 1 - \frac{\omega_{10e}^2}{\omega'^2}$$

$$\epsilon_1^{(2)} = 1 - \frac{\omega_{20e}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega_{20i}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \qquad \epsilon_2^{(2)} = 1 - \frac{\omega_{20e}^2}{\omega^2} \tag{3.2}$$

$$g^{(1)'} = -\frac{\omega_{10e}^2\, \Omega_e'}{\omega'(\omega'^2 - \Omega_e'^2)} - \frac{\omega_{10i}^2\, \Omega_i'}{\omega'(\omega'^2 - \Omega_i'^2)}, \qquad g^{(2)} = \frac{\omega_{20e}^2\, \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)} - \frac{\omega_{20i}^2\, \Omega_i}{\omega(\omega^2 - \Omega_i^2)}.$$

Для исследования дисперсионного уравнения (1.1) нужно приравнять к нулю определитель следующей матрицы.

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} k^2 - a_1 - k_1^2 & -k_1 k_2 + iG & -k_1 b + i\beta k_2 \\ -k_1 k_2 - iG & k^2 - a_2 - k_2^2 & -k_2 b - i\beta k_1 \\ -k_1 b - i\beta k_2 & -k_2 b + i\beta k_1 & D_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где

$$D_{33} = k + k_3^2 - a_2 - 2k_3 b - \frac{(1)'}{c^2}\,[\omega'^2 + u^2\gamma^2(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})],$$

$$a_2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\epsilon_2^{(2)} + (2)' - (1)'), \qquad b = k_3 + \gamma\omega' \frac{(1)'u}{c^2}\,, \quad (1)' \equiv \epsilon_1^{(1)'} - 1, \quad (2)' \equiv \epsilon_2^{(1)'} - 1\,,$$

$$G = \frac{\omega^2}{c^2}\, g^{(2)} + \frac{\omega'^2}{c^2} g^{(1)'}, \quad \beta = \gamma\,\omega' \frac{u}{c^2} g^{(1)'}, \quad a_1 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\epsilon_1^{(2)} + \frac{\omega'^2}{c^2}(1)'\,.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} &- \frac{\omega^2}{c^2}(k^2 - a_1)^2(\epsilon_2^{(2)} + (2)') + \frac{\omega^2}{c^2}(k^2 - a_1)\; k_\perp^2(\epsilon_2^{(2)} + \epsilon_2^{(1)'} - \epsilon_1^{(2)} - \epsilon_1^{(1)'}) \\ &+ \frac{\omega^2}{c^2}(k^2 - a_1)\, k_\perp^2 \gamma^2 \frac{u^2}{c^2}(1)'(1) - (k^2 - a_1) k_\perp^2 \beta^2 + k_\perp^4 \beta^2 - 2\beta b\, G\, k_\perp^2 \\ &- G^2 [\, k_\perp^2 (1 - \delta) - \frac{\omega^2}{c^2}(\epsilon_2^{(2)} + (2)')\,] = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\delta = \gamma^2 \frac{u^2}{c^2}(1)', \qquad (1) \equiv \epsilon_1^{(2)} - 1\,.$$

В общем случае это уравнение не удается разделить на два, но для ряда частных случаев это можно сделать. Рассмотрим, например, волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, т.е. $k_\perp = 0$. В этом случае уравнение (3.4) распадается на два, одно из которых имеет такой же вид, как и в отсутствии внешнего магнитного поля (2.16) и было исследовано в § 2. Поэтому остается исследовать второе уравнение, которое имеет вид:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\epsilon_1^{(2)} - \frac{\omega'^2}{c^2}(\epsilon_1^{(1)'} - 1) = \pm\left(\frac{\omega^2}{c^2} g^{(2)} + \frac{\omega'^2}{c^2} g^{(1)'}\right). \tag{3.5}$$

В области частот $\omega \ll \Omega_i$ и $\omega' \ll \Omega_i'$ из уравнения (3.5) можно получить следующее

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{V_{Al}^2} - \frac{(\omega-uk)^2}{V_{Al}^2} = 0,$$

решением которого является

$$\omega = k\,\frac{u V_{Al}^2 \pm V_{Al} V'_{Al}\,[V'^2_{Al} + V_{Al}^2 - u^2]^{1/2}}{V_{Al}^2 + V'^2_{Al}}\,, \qquad (3.6)$$

где $V_{Al} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi N_i M}}$ – альфвеновская скорость плазмы, а V'_{Al} – альфвеновская скорость пучка.

Из этого выражения видно, что при $u^2 > V'^2_{Al} + V^2_{Al}$ частота ω может стать комплексной. В обратном пределе $\omega \gg \Omega_i$ и $\omega' \gg \Omega'_i$ уравнение (3.5) приводится к виду

$$c^2k^2 - \omega^2 + \omega\frac{\omega^2_{20e}}{\omega \mp \Omega_e} + \omega\frac{\omega^2_{20i}}{\omega \mp \Omega_i} + (\omega - uk)\left[\frac{\omega^2_{10e}}{\omega - uk \mp \Omega_e} + \frac{\omega^2_{10i}}{\omega - uk \mp \Omega_i}\right] = 0 \qquad (3.7)$$

Если $\omega \sim \Omega_e$, положим $\omega - \Omega_e = \eta$; тогда получим:

$$\eta = \tfrac{1}{2}\,\frac{uk(c^2k^2 - \Omega_e^2 + \omega_0^2) \mp \Omega_e\omega_0^2 \pm \sqrt{[uk(c^2k^2 - \Omega_e^2 + \omega_0^2) \pm \Omega_e\omega_0^2]^2 + 8\Omega_e^2\omega^2_{10e}(uk)^2}}{c^2k^2 - \Omega_e^2 + \omega_0^2 - 2\Omega_e uk}\,, \qquad (3.8)$$

где

$$\omega_0^2 = \omega^2_{10e} + \omega^2_{20e}.$$

Отсюда видно, что уравнение (3.5) в области $|\omega| \sim |\Omega_e|$ комплексных решений не имеет. Рассмотрим еще одну область частот, когда $\omega \sim uk \pm \Omega_e$. Получим выражение для $\eta = \omega - uk \mp \Omega_e$:

$$\eta = \tfrac{1}{2}\,\frac{uk(c^2k^2 - s^2 + \omega_0^2) \pm \Omega_e\omega_0^2 \mp \sqrt{[uk(c^2k^2 - s^2 + \omega_0^2) \mp \Omega_e\omega_0^2]^2 \pm 8(uk)^2(uk \pm \Omega_e)\Omega_e\omega^2_{10e}}}{s^2 + 2suk - c^2k^2 - \omega_0^2}\,, \qquad (3.9)$$

где

$$s = uk \pm \Omega_e\,, \qquad \omega_0^2 = \omega^2_{10e} + \omega^2_{20e}.$$

Из этого выражения следует, что только в случае аномального эффекта Допплера возможно возбуждение волн. Аналогичный результат для нерелятивистских скоростей пучка был получен в работах Степанова К.К. и Киценко А.Б. /3/ и Железнякова В.В. /4/.

Волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, в случае релятивистских скоростей пучка достаточно малой плотности (т.е. для малых ω_{10e}), движущегося под углом к магнитному полю, были исследованы В.В. Железняковым /5/.

Вернемся к уравнению (3.4). В нерелятивистском пределе $u/c \ll 1$ это уравнение принимает вид:

$$
-\frac{\omega^2}{c^2}(k^2-a_1)^2(\epsilon_2^{(2)}+(2)') + \frac{\omega^2}{c^2}(k^2-a_1)k^2\left(\epsilon_2^{(2)}+\epsilon_2^{(1)'}-\epsilon_1^{(2)}-\epsilon_1^{(1)'}\right)
$$

$$
- G^2\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\epsilon_2^{(2)}+(2)')\right] = 0 , \qquad (3.10)
$$

или

$$
An^4 + Bn^2 + C = 0 ,
$$

где

$$
A = 1-(\epsilon_1^{(2)}+\epsilon_1^{(1)'})\sin^2\theta - (\epsilon_2^{(2)}+\epsilon_2^{(1)'})\cos^2\theta ,
$$

$$
B = (\epsilon_1^{(2)}+\epsilon_1^{(1)'})(\epsilon_2^{(1)}+\epsilon_2^{(1)'}) - (g^{(2)}+g^{(1)'})^2\sin^2\theta - (\epsilon_1^{(2)}+\epsilon_1^{(1)'}+\epsilon_2^{(2)}+\epsilon_2^{(1)'})+1 ,
$$

$$
C = (\epsilon_2^{(2)}+\epsilon_2^{(1)'}-1)(g^{(2)}+g^{(1)'})^2 - (\epsilon_2^{(2)}+\epsilon_2^{(1)'}-1)(\epsilon_1^{(2)}+\epsilon_1^{(1)'}-1)^2 \qquad n = \frac{kc}{\omega} .
$$

Это уравнение было исследовано в ряде работ /3/, /4/, /6/, поэтому более подробно на нем мы останавливаться здесь не будем.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А.А.Рухадзе за помощь в работе.

Литература

1. В.П.Силин, А.А.Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Атомиздат, 1961.
2. А.А.Рухадзе. ЖТФ (в печати).
3. К.Н.Степанов, А.Б.Киценко. ЖТФ, 31, 167 (1961).
4. В.В.Железняков. Изв. вузов СССР, Радиофизика, 2, 14 (1959).
5. В.В.Железняков. Изв. вузов СССР, Радиофизика, 3, 57 (1960).
6. Г.Г.Гетманцев, В.О.Рапопорт. ЖЭТФ, 38, 1205 (1960).
7. В.П.Докучаев. ЖЭТФ, 39, 413 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1962 года.