ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

9 - 9468

БОНДАРЕНКО
Владимир Саввич

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАКСВЕЛЛОВСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1976

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук
профессор Е.П.Жидков,
кандидат физико-математических наук
С.И.Сердюкова.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор — Д.П.Костомаров,
кандидат физико-математических наук — А.А.Корнейчук.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Московский инженерно-физический институт, г.Москва.

Автореферат разослан " " ________ 1976 г.

Защита диссертации состоится " " ________ 1976 г. в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета — Т.П.Пузынина

БОНДАРЕНКО
Владимир Саввич

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАКСВЕЛЛОВСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Задача расчета полей, возбуждаемых движением плотных сгустков или пучков электронов в неоднородных структурах (резонаторах, отрезках волноводов и др.), представляет большой интерес для коллективных методов ускорения, таких, как метод колец или самоускоряющихся пучков. Ускоряясь, релятивистский сгусток тратит часть своей энергии на излучение сторонних зарядов, возбуждаемое его электрическим полем при пролете мимо пространственных неоднородностей.

Важно знать распределение поля вдоль потока электронов и уметь оценивать потери энергии на излучение.

На эту тему имеется большое количество работ/I-I4/. Подробную библиографию можно найти, например, в/9/. В большинстве работ скорость движения источника принимается постоянной/I, 2,4,5,7,I4/, даже если нет достаточного релятивизма: закон движения источника предписывается заранее/I,3,5/.

В рассматриваемых работах в качестве основных методов решения используются методы, основанные на аналитических разложениях полей/I5/. Поле, несомое сгустком электронов, раскладывается на фурье-компоненты по времени/II/. Решается задача рассеяния или дифракции/I/, а затем полученные фурье-компоненты полного поля собираются вновь.

В /9/ приводится выражение для энергии излучения (ΔW) тонкого заряженного кольца, оставленной в резонаторе после его вылета через вторую стенку. Эта энергия выражается в виде сложного двойного ряда с коэффициентами, зависящими от многих параметров. Для предельных случаев бесконечно тонкого кольца и точечного заряда ряд для ΔW является логарифмически расходящимся. В случае же, когда ряд для ΔW сходится, вычисление его довольно затруднительно и требует больших затрат машинного времени.

В рассматриваемой работе обсуждается новый подход к решению задач указанного типа,использующий то обстоятельство, что в большинстве случаев время, в течение которого происходит взаимодействие сгустка с ускоряющей структурой,мало. Это дает возможность решать соответствующую группу уравнений Максвелла с разрывным пространственным распределением плотности тока (компактный сгусток электронов) методом конечных разностей, без каких-либо аналитических разложений. На таком пути удается эффективно учитывать как начальные данные, так и граничные условия.

В диссертации предложенный подход реализован при расчете модели неоднородной структуры с ограниченным объемом, возбуждаемой движущимся сгустком электронов в виде тора квадратного сечения /I6-I8/. Используется заданный закон движения источника: предполагается его равноускоренное движение от состояния покоя. На рассмотренных примерах удалось проследить и отметить основные трудности, возникающие при таком подходе, и указать способы их преодоления. Сложность численного расчета полей заключается в следующем: линейный размер сгустка много меньше длины структуры, в которой происходит его движение. Для правильного учета геометрии сгустка требуется создание мелкой сетки, что затруднительно из-за большой длины структуры.

Кроме того, правая часть системы уравнений Максвелла, описывающей состояние структуры, содержит движущийся разрыв, порождающий явления неустойчивости.

Указанные трудности были преодолены в результате ряда численных экспериментов и теоретических исследований на модельных задачах/I6,I7,I8,I9/. Было замечено, что все явления неустойчивости рождаются и локализуются в районе нахождения сгустка. Это позволило создать локальную мелкую сетку в районе сгустка. Мелкая сетка движется вместе со сгустком. Создание мелкой сетки существенно усложнило программу решения задачи и увеличило время счета, которое оставалось, однако, вполне приемлемым для машинной реализации.

В процессе счета получена "динамика" полной карты поля (приблизительно I2000 точек по rz и 600 шагов по t). При этом затраты машинного времени (2 час.40мин. на ЭВМ СДС-6200) соизмеримы с затратами на счет 5-6 точек при использовании методов, основанных на аналитических разложениях.

Предложенный метод решения гиперболической системы с разрывом на малой относительно основной области площадке может быть использован и при решении других задач, например, задач с несколькими резонаторами или задач с более сложными граничными условиями. Основные трудности в таких задачах связаны со счетом в окрестности разрыва. Эти трудности преодолены.

Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения и приложения.

Первая глава посвящена физической и математической постановке задач.

В § I.I описывается физическая постановка задачи: рассматривается замкнутая коаксиальная структура, в которой ускоряется сгусток электронов с полным числом частиц $N = 3\cdot 10^{13}$. Задается закон движения источника. Выписаны уравнения Максвелла для рассматриваемого случая. Поставлена потенциальная электростатическая задача, решение которой определяет начальные значения полей возбуждения.

Математическая постановка описана в § I.2. В области Ω (рис.I) решается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial (rw)}{\partial r} - \mathcal{F}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r}, \quad \xi \in [0,T], \ \xi = ct, \end{cases} \tag{I}$$

где $u = E_r$, $v = E_z$, $w = H_\varphi$, $\mathcal{F}$ – неизвестные функции от (r, z, ξ).

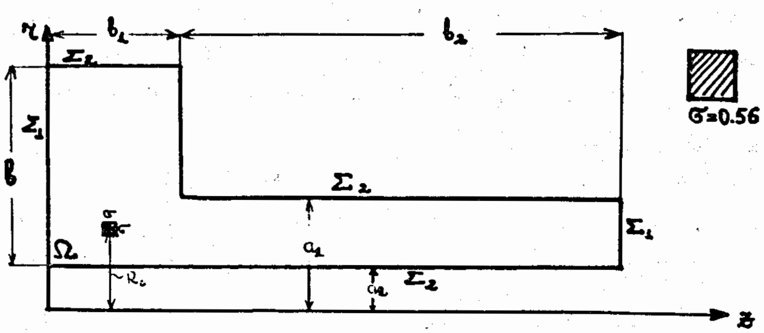

Рис.I

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \dfrac{2\rho_0 \xi}{R_0\sqrt{B^2+\xi^2}}, & (r,z) \in (\sigma,\sigma), \\ 0, & (r,z) \overline{\in} (\sigma,\sigma), \end{cases}$$

B – const (параметр ускорения).

$\Gamma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ – граница области Ω.

$u(r,z,0) = u_0(r,z)$, $v(r,z,0) = v_0(r,z)$, $w(r,z,0) = w_0(r,z)$,

$$u|_{\Sigma_1} = 0, \ v|_{\Sigma_2} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \ \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \ \frac{\partial (ru)}{\partial r}\Big|_{\Sigma_2} = 0, \ \frac{\partial (rw)}{\partial r}\Big|_{\Sigma_2} = 0,$$

$$u_0(r,z) = -\frac{\partial \Phi(r,z)}{\partial r}, \quad v_0(r,z) = -\frac{\partial \Phi(r,z)}{\partial z},$$

$$w_0(r,z) = 0, \tag{2}$$

где функция $\Phi(r, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\mathcal{F}^*,$$

$$\Phi|_\Gamma = 0, \qquad \mathcal{F}^*(r,z) = \begin{cases} \dfrac{2\rho^0}{R^0}, & (r,z) \in (\sigma,\sigma), \\ 0, & (r,z) \overline{\in} (\sigma,\sigma). \end{cases} \tag{3}$$

Во второй главе описаны численные методы расчета начальных данных, алгоритм решения основной динамической задачи. В этой же главе обсуждаются явления неустойчивости, возникающие при счете, и результаты счета.

Метод расчета начальных данных (решение задачи (3)) описан в § 2.2. Задача (3) решалась методом "прогноза" /I7/, позволившим сократить время счета с нескольких десятков часов до 3-4 минут.

§ 2.3 посвящен описанию наблюдаемых при счете явлениях неустойчивости, экспериментам, в результате которых была выбрана разностная схема счета. Даются пояснения к графикам искомых функций,полученных в различных численных экспериментах,а также выписаны значения интегралов,входящих в энергетическое соотношение, для различных временных шагов и разных схем счета.Энергетическое соотношение является точным следствием решаемой системы уравнений и граничных условий.Выполнение разностного аналога этого соотношения использовалось в качестве основного критерия правильности решения задачи.

В § 2.4 описан алгоритм решения основной динамической задачи. Вводится сетка, в узлах которой определяются значения искомых функций на каждом временном шаге /20,2I/. Выписаны разностные формулы, аппроксимирующие граничные условия, и получен дискретный аналог энергетического соотношения.

В § 2.5 строится локальная мелкая движущаяся сетка. Создание такой сетки /I8/ явилось основным этапом в решении задачи. Расчеты показали, что все явления "разбалтывания" значений функций при уменьшении шага по времени, рождаются и локализуются в окрестности движущегося разрыва. В этой окрестности и была создана мелкая сетка, содержащая 4632 узла, I00 из которых лежат на площадке, являющейся геометрическим образом движущегося разрыва. Горизонтальные границы мелкой сетки располагаются по горизонтальным границам основной области. Описывается процесс движения мелкой сетки при движении разрыва, техника счета над мелкой сеткой при изменении времени.

В § 2.6 обсуждаются результаты счета. Рассматриваются и сравниваются значения полей для двух видов структур: с переходным участком и без него ($a_1 = b$, рис.I).

Глава Ш посвящена исследованию вопросов устойчиовсти рассматриваемой задачи /I8,I9/.

Одной из основных целей при решении задачи было получение удовлетворительных значений интегралов, входящих в равенство, выражающее закон сохранения энергии, поэтому, естественно, исследование устойчивости в L_2 разностной задачи , аппроксимирующей исходную непрерывную задачу. Из устойчивости разностной задачи в L_2 следует устойчивый счет интегралов в законе сохранения энергии. Для устойчивости краевой задачи необходимо, чтобы была

устойчива задача Коши. В § 3.I доказана устойчивость задачи Коши в L_2 при $\alpha \le 1$ (α - отношение шага сетки к временному шагу). При доказательвстве используется теорема о возмущениях /25/.

В § 3.2 рассмотрены две модельные однородные задачи. В одной из них исследовалась устойчивость задачи с двумя границами. Показано, что при $\alpha \le 1$ устойчивы левая полубесконечная и правая полубесконечная задачи. Тогда, согласно результатам работ /22-24/, устойчива задача с двумя границами.

Вторая модельная задача построена с целью имитации основной задачи в одномерном случае и служит для нахождения оптимальных шагов мелкой сетки.

В заключении перечислены выводы, полученные в работе. Основные из них состоят в следующем.

I. Рассмотрен и реализован новый подход к решению задачи расчета полей возбуждения неоднородной идеально проводящей структуры с ограниченным объемом движущимся сгустком электронов, который заключается в решении методом конечных разностей /I8/ группы уравнений Максвелла с движущимся разрывом в правой части.

2. Такой подход позволил значительно сократить время, требуемое для решения класса инженерно-физических задач, что подтверждает проведенный конкретный расчет модельной задачи /I6/.

3. Реализован метод "прогноза" решения потенциальной электростатической задачи с большой экономией машинного времени /I7/.

4. Организована движущаяся локальная мелкая сетка в окрестности разрыва, позволившая увеличить на три порядка точность счета интегралов, входящих в энергетическое соотношение.

5. Доказана устойчивость разностной задачи Коши в L_2 при $\alpha \le 1$.

6. Разработана система программ, осуществляющих счет началь-

ных данных и счет динамической задачи для двух видов структур: с переходным участком и без него.

В приложении даны различные графики, иллюстрирующие полученные в работе результаты.

Основные результаты работы докладывались на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1973 г.), семинарах ОНМУ, ЛВТА ОИЯИ и опубликованы в работах /16-19/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский. УФН, 88, 2 (209-254),1966.
2. В.Л.Гинзбург, И.М.Франк. ЖЭТФ, 16, 1, 1946.
3. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский. УФН, 94, 3 (377),1968.
4. В.Л.Гинзбург. УФН, 98, 3 (569-585), 1969.
5. О.А.Колпаков, В.И.Котов. ЖТФ, 34, 8 (1387-1391), 1964.
6. Ю.Н.Днестровский, В.И.Костомаров. ДАН СССР, 124, 1026, 1956.
7. Г.В.Воскресенский, В.Н.Курдюмов. ЖТФ, 10, 1971.
8. Ю.Н.Днестровский, В.И.Костомаров. ДАН СССР, 116 (377-380), 1957.
9. И.Н.Иванов и др. ЭЧАЯ, 1. вып.2 (391-440), 1971.
10. С.Б.Рубин, В.И.Мамонов. ОИЯИ, 9-33462, Дубна, 1967.
11. В.И.Мамонов, С.Б.Рубин. ОИЯИ, Р9-8625, Дубна, 1975.
12. А.Б.Кузнецов, С.Б.Рубин. ОИЯИ, Р9-5247, Дубна, 1970.
13. А.Б.Кузнецов, С.Б.Рубин. Труды Международной конференции по ускорителям частиц высокой энергии, Ереван, т.П (561-567),1965.
14. В.Н.Картин, Г.П.Фоменко. ЖТФ, 45, № 3 (693-969), 1975.
15. В. Гейтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ, 1956.
16. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова. ОИЯИ, Р9-8643, Дубна, 1975.

17. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.И.Сердюкова. Труды Международного совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. ОИЯИ, Д10-7707, стр.48-50, Дубна, 1974.
18. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова. ОИЯИ, Р11-8981, Дубна, 1975.
19. В.С.Бондаренко. ОИЯИ, Р11-9180, Дубна, 1975.
20. Н.С.Бахвалов. Численные методы. "Наука", 1973.
21. И.С.Березин, Н.П.Жидков. Методы вычислений. "Наука", М.,1966.
22. С.И.Сердюкова. ДАН СССР, т.200, № 1, 39, 1971.
23. С.И.Сердюкова. ДАН СССР, т.208, № 1, 52, 1973.
24. С.И.Сердюкова. ОИЯИ, Р5-7592, Дубна, 1973.
25. Р.Рихтмайер, К.Мортон. Разностные методы решения краевых задач, "Мир", М.,1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 января 1976 года.