

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С345е1
ИС-696

4/11-1
9 - 9184

Е.П.Жидков, М.С.Касчиев, Е.М.Кулакова, Р.Д.Лазаров,
Р.В.Полякова

4661/2-75

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

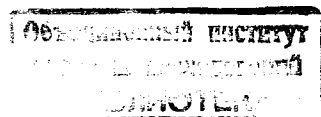
1975

9 - 9184

Е.П.Жидков, М.С.Касчиев,* Е.М.Кулакова, Р.Д.Лазаров,*
Р.В.Полякова

**РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ**

* Институт математики и механики, София, Болгария



1. Введение

В ряде случаев представляет интерес расчет трехмерного поля, создаваемого прямоугольными электродами. Решение данной задачи проиллюстрировано на примере ускоряющего поля синхрофазотрона ОИЯИ.

Ускоряющая система синхрофазотрона представляет собой дрейфовую трубку длиной 610 см. У концов трубки имеются заземленные рамки, соединенные с вакуумной камерой ускорителя /рис. 1/. Изменение конфигурации этих рамок приводит к изменению распределения в пространстве компонент ускоряющего электрического поля, E_x , E_y , E_z , в частности, это влияет на величину поперечных составляющих их поля E_y , E_z .

Разработанная методика численного расчета позволяет вычислить компоненты поля, а также оценить влияние неточности установки дрейфовой трубки на их величину.

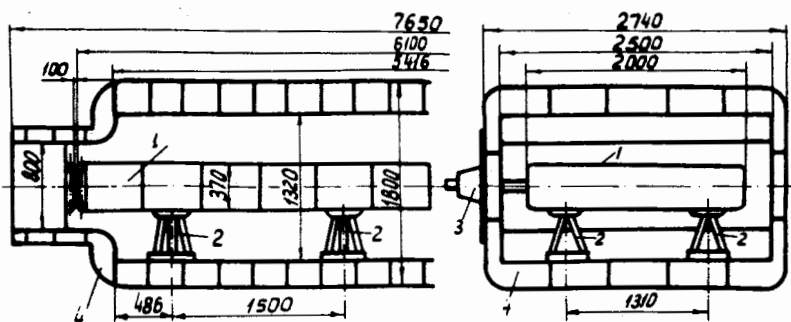


Рис. 1. Ускоряющий электрод синхрофазотрона /1/, изоляторы /2,3/, вакуумная камера /4/.

2. Математическая постановка задачи

Для расчетов движения частиц в режиме ускорения необходимо иметь распределение всех трех компонент напряженности электрического поля $E=(E_1, E_2, E_3)$ в пространстве первой щели, внутри электрода и во второй щели. При этом компоненты поля должны быть рассчитаны с учетом реальной геометрии электрода.

Электрическое поле $E(x)=(E_1(x), E_2(x), E_3(x))$, $x=(x_1, x_2, x_3)$ ищется в виде градиента от потенциала $U(x)$, который в области G , показанной на рис. 2, есть решение следующей задачи: —

$$\Delta U \equiv \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad x \in G, \quad /1/$$

$$U = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad /2/$$

$$U = 1, \quad x \in \Gamma_1, \quad /3/$$

$$\lim U = 0, \quad /4/$$

где Γ_1 - поверхность электрода, а Γ_0 - поверхность заземленной вакуумной коробки.

Ортогональную координатную систему введем следующим образом: направим ось $0x_1$ по направлению продольной оси камеры, а начало установим в начале

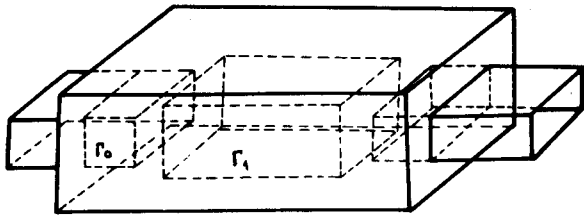


Рис. 2. Область, в которой определяются компоненты электрического поля.

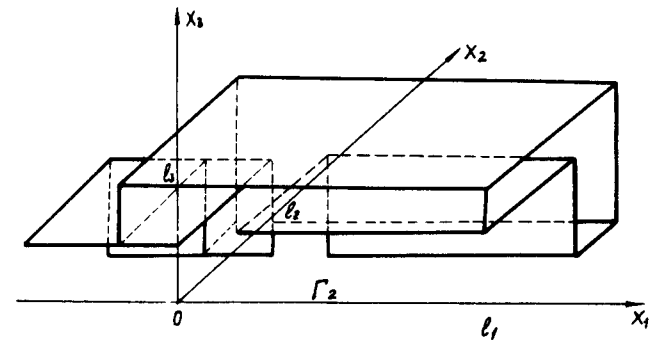


Рис. 3. Одна восьмая часть области, приведенной на рис. 2.

первой щели; оси $0x_2$ и $0x_3$ направим перпендикулярно боковым поверхностям коробки.

Мы рассматриваем задачу при симметричном расположении электрода. Поэтому решение задачи /1/-/4/ в области G можно искать в $1/8$ области, причем на поверхностях симметрии потребуем выполнения граничного условия:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

n - нормаль к этой поверхности /см. рис. 3/.

Поместим область G в параллелепипед $\{x_\alpha = -a_\alpha \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha=1,2,3\}$, где введем неравномерную, согласованную с границей области G разностную сетку ω_h следующим образом. Пусть $\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(0)} < x_\alpha^{(1)} < \dots < x_\alpha^{(N_\alpha)}\}$ - некоторое разбиение отрезка $[-a_\alpha, l_\alpha]$ на подынтервалы. Тогда $\omega_h = \omega_1 \times \omega_2 \times \omega_3$.

Введение неравномерной сетки необходимо, чтобы сгущать сетку в областях, где априори известно, что решение быстро меняется /например, в пространстве первой щели/, и разрежать ее там, где решение меняется медленно /например, к середине электрода/. Напомним, что граница области G попадает в узлы сетки ω_h . Шаг сетки в направлении x_α есть сеточная функция, которая определяется так:

$$h_\alpha \equiv h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)} \quad - \text{ левый шаг,}$$

$$h_a^+ = h_a^{(i_a+1)} = x_a^{(i_a+1)} - x_a^{(i_a)} - \text{правый шаг.}$$

Пусть $\gamma_j = \Gamma_j \cap \hat{\omega}_h, j=0,1,2$. Если $x \in \hat{\omega}_h$ обозначим $x^{(\pm 1a)} = (x_1, \dots, x_{a \pm h_a}, \dots, x_3), U^{(\pm 1a)} = U(x_a^{(\pm 1a)}), a=1,2,3$.

Будем использовать аппроксимацию оператора Лапласа на семиточечном шаблоне^{1/} с учетом неравномерности сетки.

$$\lambda_a U \equiv \begin{cases} \frac{1}{h_a^-} \left\{ \frac{U^{(+1a)} - U}{h_a^+} - \frac{U - U^{(-1a)}}{h_a^-} \right\}, & x \in \hat{\omega}_h, \\ h_a = (h_a^+ - h_a^-) / 2, & a = 1, 2, 3, \\ \frac{2}{h_1^-} \frac{U - U^{(-1_1)}}{h_1^-}, & x \in \gamma_2^{(1)} \equiv \hat{\omega}_h \cap \{x_1 = \ell_1\}, \\ \frac{2}{h_2^+} \frac{U^{(+1_2)} - U}{h_2^+}, & x \in \gamma_2^{(2)} \equiv \hat{\omega}_h \cap \{x_2 = -a_2\}, \\ \frac{2}{h_3^+} \frac{U^{(+1_3)} - U}{h_3^+}, & x \in \gamma_3^{(3)} \equiv \hat{\omega}_h \cap \{x_3 = -a_3\}, \\ \lambda U \equiv \sum_{a=1}^3 \lambda_a U. \end{cases}$$

Тогда разностная задача, аппроксимирующая исходную задачу /1/-/4/, формулируется в виде

$$\lambda y = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h \cup \gamma_2, \quad /5/$$

$$y = 0, \quad x \in \gamma_0, \quad /6/$$

$$y_i = 1, \quad x \in \gamma_1. \quad /7/$$

Это возможно, так как узлы сетки попадают на границу области G.

Задача /5/-/7/ записывается как система линейных алгебраических уравнений

$$y = Ay + f, \quad /8/$$

где матрица A выражается через λ .

Для решения системы /8/ использовали метод верхней релаксации^{2/}.

$$y^{n+1} = (1 - \beta) y^n + \beta (Ay^n + f), \quad /9/$$

y^0 - произвольное.

Так как точное значение максимального собственного значения матрицы неизвестно, когда сетка неравномерная, то оптимальное значение релаксационного параметра β выбиралось в процессе счета по методу Caree^{3/}. Значение β определили в первом численном эксперименте, а дальше при счете использовали только это значение. В нашем случае $a_2 = a_3 = 0, \ell_1 = 3100 \text{ мм}, \ell_2 = 1250 \text{ мм}, \ell_3 = 400 \text{ мм}$.

Для установления значения параметра a_1 был проведен ряд численных экспериментов в соответствии с условием /4/ для $a_1 = 100, 500, 750, 1000 \text{ мм}$. Цель этих экспериментов - установить влияние замены условия /4/ на граничное условие $U=0$ при $x_1 = -a_1$.

Из расчетов видно, что решения задачи /5/-/7/, получаемые при $a_1 = 500$ и $a_1 = 750$, отличаются на единичку четвертого знака после запятой.

Система /8/, содержащая около 40 000 уравнений, решалась по методу /9/, причем процесс останавливался, когда

$$\max |y^{n+1} - y^n| \leq \epsilon.$$

На ЭВМ СДС-6200 при $\epsilon = 10^{-4}$ при каждом расчете выполнялось около 56-58 итераций, что занимало около 7 мин счетного времени.

3. Результаты расчета

С помощью вышеприведенной методики были выполнены расчеты для двух конфигураций электродов, показанных на рис. 4 в разрезе, причем конфигурация 2 соответствует реальному электроду /см. рис. 1/.

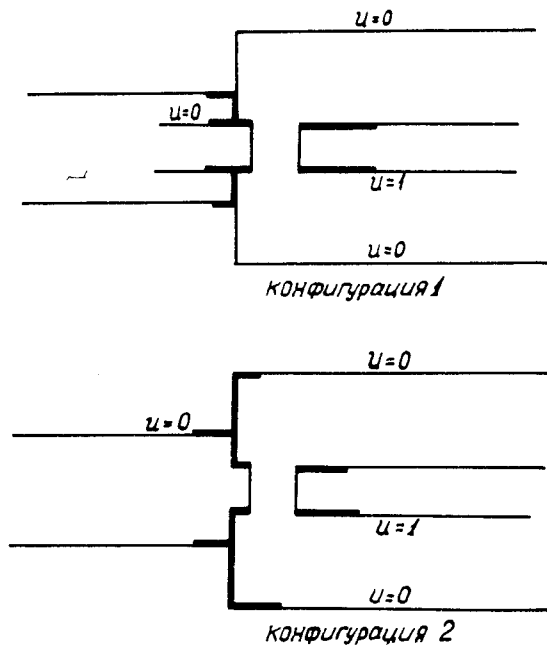


Рис. 4. Схематическое изображение сечений электродов для двух выбранных конфигураций.

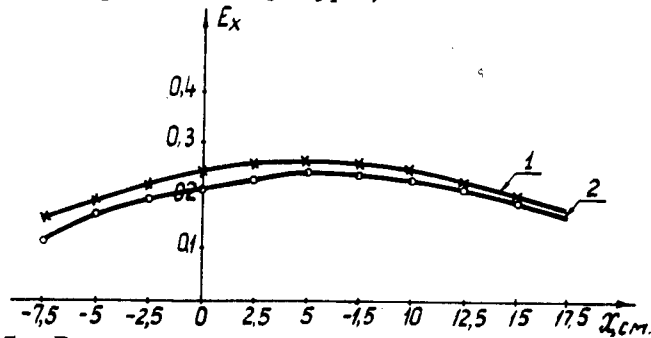


Рис. 5. Распределение продольной составляющей поля $E_x(x)$ для $y=0$ и $z=0$ для конфигурации электрода 1 /кривая 1/ и конфигурации 2 /кривая 2/.

Ниже приведены кривые распределения в зазоре и его окрестности компонент поля $E_x(x)$, $E_x(y)$, $E_y(x)$ и $E_z(x)$ /рис. 5-8/. Из рис. 5 видно, что ускоряющие компоненты поля $E_x(x)$ для конфигураций 1 и 2 /кривые 1 и 2/ отличаются несущественно ($y=0, z=0$). Распределение компоненты $E_x(y)$ не зависит от y для конфигурации 1 и слабо нарастает с y для конфигурации 2 /рис. 6/. Компонента $E_y(x)$ для конфигурации 2 на три порядка больше по величине, чем для конфигурации 1, и имеет явно выраженный максимум на расстоянии 17,5 см влево от центра зазора /рис. 7/.

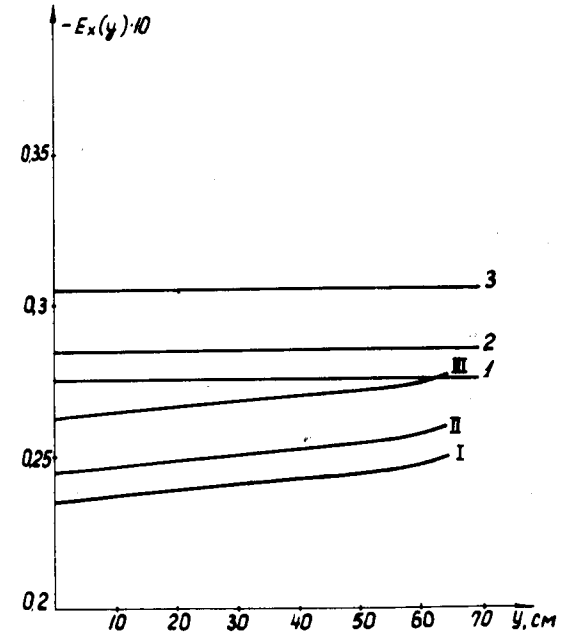


Рис. 6. Распределение продольной составляющей ускоряющего поля $E_x(y)$ для $x=5, z=2,4,6$; для конфигурации электрода 1 /кривые 1,2,3/ и конфигурации 2 /кривые I,II,III/.

Рис. 7. Распределение поперечной составляющей ускоряющего поля $E_y(x)$ для конфигурации 1 /кривые 1,2,3,4/ и конфигурации 2 /кривые I,II,III,IV/ при $z = 0$ и $y = 5, 15, 25, 40$ см.

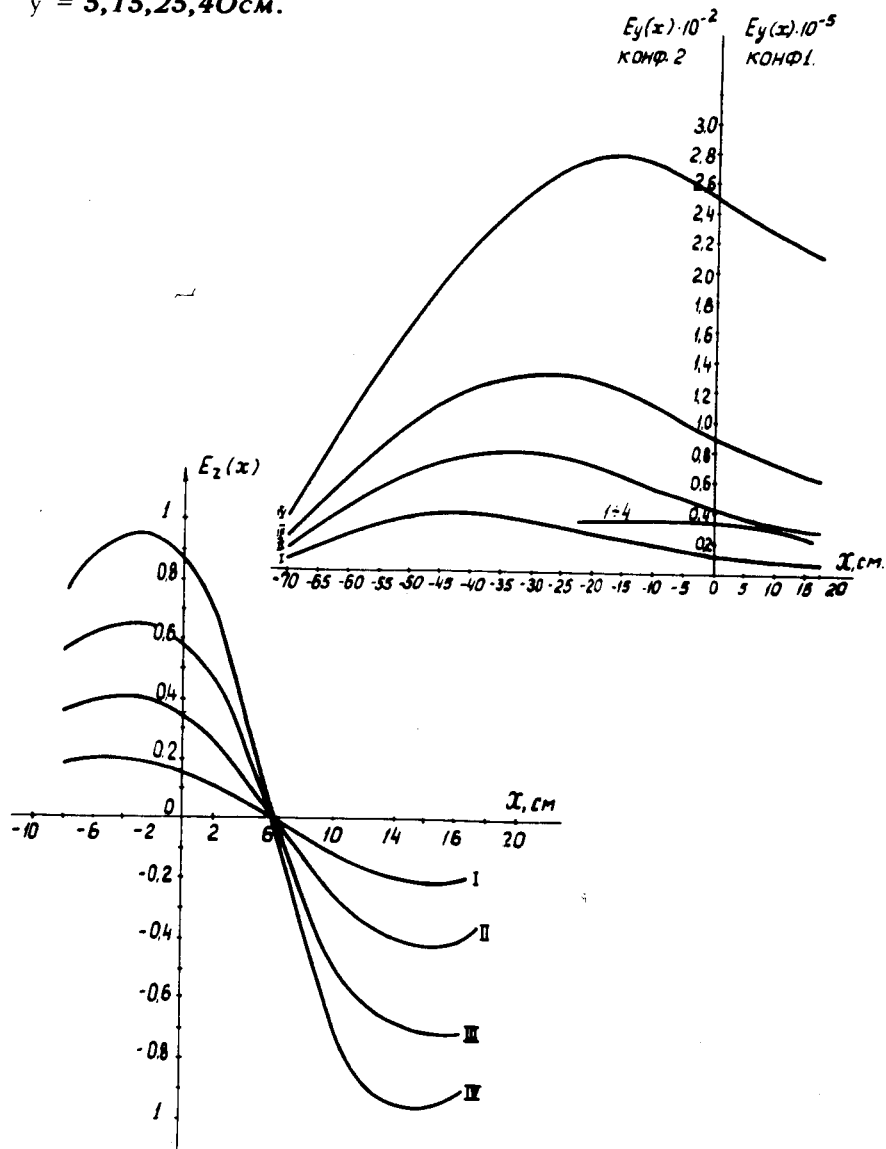


Рис. 8. Распределение компоненты $E_z(x)$ для конфигурации 2 при $y=0$ и $z = 2, 4, 6, 8$ см.

Расчеты показали, что распределения $E_z(x)$ практически совпадают для обеих конфигураций /рис. 8/ и поэтому приведены только для второго случая. Действие компоненты $E_z(x)$ на частицу компенсируется, т.к. E_z меняет знак при переходе через центр зазора.

Литература

1. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1971.
2. В.Вазов, Дж.Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, Москва, 1963.
3. В.А.Саре. The Determination of the Accelerating Factor for SOR. Computer J., vol. 4, No. 1, April, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1975 года.