сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9-90-485

П.Г.Акишин, Д.Х.Динев*, И.Б.Иссинский,
В.А.Михайлов, В.А.Щепунов

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕКЦИИ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ НУКЛОТРОНА

---

* Институт ядерных исследований
и ядерной энергетики БАН, София, НРБ

1990

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ СИНХРОТРОНА

Замкнутая орбита в синхротроне описывается периодическим решением неоднородного уравнения движения:

$$\frac{d\eta}{d\phi^2} + Q^2\eta = Q^2 f(\phi) \ , \qquad /1/$$

$$\eta(\phi + 2\pi) = \eta(\phi) \ ,$$

которое можно представить в виде

$$\eta(\phi) = \frac{Q}{2\sin(\pi Q)} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(t) \cos Q(\phi + \pi - t)\, dt. \qquad /2/$$

Здесь η и ϕ - обобщенные координаты:

$$\eta = X / \sqrt{\beta} \ ; \qquad \phi = \int_0^s \frac{d\sigma}{Q\beta(\sigma)} \ ; \qquad /3/$$

β - бетатронная функция, Q - частота бетатронных колебаний. Функция $f(\phi)$ связана с погрешностями поля $(\Delta B / B)$ следующим соотношением:

$$f(\phi) = \beta^{3/2}(\phi)(\Delta B / B\rho) \ . \qquad /4/$$

Учитывая малую угловую протяженность отдельного магнитного элемента, выражение /2/ можно переписать в виде суммы

$$\eta(\phi_i) \cong \frac{Q}{2\sin(\pi Q)} \sum_{j=i}^{N_t} \bar{f}_j \Delta\phi_j \cos Q(|\phi_i - \phi_j| - \pi) \ ,$$

где черта над f_j означает усреднение по ϕ в пределах магнитного элемента, имеющего j-ю погрешность поля, или с учетом /3/:

$$X_i \cong \sum_{j=1}^{N_t} \frac{\sqrt{\beta_i \beta_j}}{2\sin(\pi Q)} \cos Q\left(|\phi_i - \phi_j| - \pi\right) \left(\frac{\Delta B \Delta s}{B\rho}\right)_j ; \qquad /5/$$

N_t - полное число элементов, погрешности магнитного поля которых вызывают искажение замкнутой орбиты. Для корректора $(\Delta B \Delta s / B\rho)$ имеет смысл угла, корректирующего орбиту:

$$\Delta_k = \left(\frac{B_c \Delta s}{B\rho}\right)_k ; \qquad k = 1, 2, \ldots N_{cor} ; \qquad /6/$$

N_{cor} - число корректоров.

Через фурье-гармоники силы $f(\phi)$ замкнутую орбиту можно выразить следующим образом:

$$X(\phi) = \sqrt{\beta(\phi)}\, Q^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{X_m}{Q^2 - m^2} e^{im\phi} ; \qquad /7/$$

где

$$X_m = \frac{1}{2\pi Q} \sum_{j=1}^{N_t} \sqrt{\beta_j}\, e^{-im\phi_j} \left(\frac{\Delta B \Delta s}{B\rho}\right)_j . \qquad /8/$$

2. ОЦЕНКИ ИСКАЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ

Основными источниками искажения орбиты являются: разброс индукций $\langle \Delta B / B \rangle_м$ в дипольных магнитах, поворот их медианной плоскости вокруг оси на угол $\langle \alpha_в \rangle_м$, поперечные смещения продольных магнитных осей квадрупольных линз на величину $\langle \Delta X \rangle_л$ и $\langle \Delta Y \rangle_л$. Здесь и далее скобки $\langle\rangle$ обозначают среднеквадратичные значения случайной величины. Погрешности магнитного поля связаны с ошибками юстировки структурных элементов соотношениями:

$$\langle \Delta B / B \rangle_{x,o,м} = \langle \alpha_s \rangle_м , \qquad \langle \Delta B / B \rangle_{y,o,л} = (G_л / B) \langle \Delta X \rangle_л ,$$
$$\langle \Delta B / B \rangle_{x,o,л} = (G_л / B) \langle \Delta Y \rangle_л , \qquad /9/$$

где $G_л$ - градиент в структурных квадрупольных линзах.

Максимальное отклонение замкнутой орбиты оценивалось с помощью гармонического метода /1/. В нуклотроне наиболее близкими к частотам бетатронных колебаний являются четыре гармоники с номерами m= 5, 6, 7, 8. Среднеквадратичные значения амплитуды m-й гармоники разложения /7/ определяются как

$$<X_m> = \frac{Q_x \sqrt{\beta_{x\,max}}}{|Q_x^2 - m^2| \;\pi\rho} \left\{ \sum_j M_j <\frac{\Delta B}{B}>^2_{o,j} \Delta s_j \bar{\beta}_{xj} \right\}^{1/2} ; \qquad /10/$$

и аналогично для $<Y_m>$. Индекс j здесь указывает тип магнитного элемента, Δs_j - его эффективная длина, M_j - число однотипных элементов. Максимальное отклонение орбиты в соответствии с /1/ с вероятностью 98% не превышает величины

$$X_{max} = 2 \left\{ \sum_{m=5}^{8} <X_m>^2 \right\}^{1/2} (1+|\delta|-|\delta|^2) , \qquad /11/$$

где $|\delta| = |Q_x - m|$, m - номер гармоники возмущения ближайшего целого резонанса; аналогично для Y_{max}.

Для почти симметричной по градиентам магнитной структуры нуклотрона оценки для x- и y-плоскостей примерно равны, и при $|\delta| = 0{,}1$ среднеквадратичные значения амплитуд 5-8 гармоник связаны с погрешностями поля и юстировки соотношениями

$$\begin{aligned} <X_5>^2 &= 0{,}5 <\Delta B/B>^2_{о,м} + 9 <\Delta X>^2_{п} ; \\ <X_6>^2 &= 1{,}9 <\Delta B/B>^2_{о,м} + 32 <\Delta X>^2_{п} ; \\ <X_7>^2 &= 95 <\Delta B/B>^2_{о,м} + 1630 <\Delta X>^2_{п} ; \\ <X_8>^2 &= 0{,}7 <\Delta B/B>^2_{о,м} + 11 <\Delta X>^2_{п} ; \end{aligned} \qquad /12/$$

где линейные смещения $<\Delta X>_п$ и амплитуды $<X_m>$ даны в метрах. Допуски на разброс индукций магнитного поля и на ошибки юстировки с учетом /11/ определяются тогда из неравенства:

$$427 <\Delta B/B>^2_{o,m} + 7334 <\Delta X>^2_{п} < X^2_{max} . \qquad /13/$$

3. МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ

Силы корректоров /6/ связаны со значениями орбиты в мониторах X_i $(i = 1 ... N_m)$ с помощью матрицы коррекции $\hat{C}_{cor}$ размерностью $N_{cor} \times N_m$:

$$\vec{\Delta} = \hat{C}_{cor} \vec{X} ; \qquad /14/$$

причем матричные элементы $c_{k,i}$ зависят от выбора метода коррекции и расстановки мониторов и корректоров.

Общие методы коррекции основаны на соотношении /5/.

1а. В методе наименьших квадратов [2] минимизируется целевая функция F :

$$F = \sum_{i=1}^{N_m} X_i^2 , \qquad /15/$$

где X_i - значение орбиты в i-м мониторе, N_m - число мониторов. С учетом /5/ можно показать, что минимум F наступает при следующем выборе $\hat{C}_{cor}$:

$$\hat{C}_{cor} = -(\hat{A}^T \hat{A})^{-1} \hat{A}^T , \qquad /16/$$

где элементы матрицы $\hat{A}$ определяются как

$$a_{ik} = \sqrt{\beta_i \beta_k} \cos Q(|\phi_i - \phi_k| - \pi) / (2 \sin \pi Q) ; \qquad /17/$$

$i = 1 \ldots N_m$ - индекс монитора, $k = 1 \ldots N_{cor}$ - индекс корректора.

1б. Метод Хереварда - Баконие [3] является модификацией метода 1а. Здесь ограничивается сила в корректорах с помощью параметра $\gamma \in (0,1]$, подбираемого экспериментально. Целевая функция имеет вид

$$F = \gamma \sum_{i=1}^{N_m} X_i^2 + (1-\gamma) \sum_{k=1}^{N_{cor}} \Delta_k \beta_k^2 . \qquad /18/$$

Минимум /18/ достигается при

$$\hat{C}_{cor} = -\gamma [\, \gamma(\hat{A}^T \hat{A}) + (1-\gamma) \hat{B} \,]^{-1} \hat{A}^T , \qquad /19/$$

где $\hat{A}$ определена в /17/, а для $\hat{B}$ имеем

$$b_{\ell k} = \delta_{\ell k} \beta_k^2 ; \qquad /20/$$

$\ell, k = 1 \ldots N_{cor}$;

$\delta_{\ell k}$ - символ Кронекера. При $\gamma = 1$ метод 1б переходит в 1а. Возможно исключение весов β_k^2 во второй скобке в формуле /18/, при этом сохраняется перед суммой нормирующий множитель $\bar{\beta}^2$ - усредненный по корректорам квадрат β-функции.

1в. Метод наименьших квадратов с выбором главных гармоник основан на соотношении

$$\cos Q(|\phi_i - \phi_k| - \pi) = \frac{2Q}{\pi} \sin(\pi Q) \left(\frac{1}{2Q^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(\phi_i - \phi_k)}{m^2 - Q^2} \right) . \qquad /21/$$

В этом методе используется $\hat{C}_{cor}$ как в /16/, но $\hat{A}$ определена по-другому:

$$a_{ik} = \sqrt{\beta_i \beta_k} \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left(\frac{1}{2Q^2} - \sum_{m} \frac{\cos m(\phi_i - \phi_k)}{m^2 - Q^2} \right) , \qquad /22/$$

где в сумме по m берется конечное число ближайших к Q гармоник. Подстановка /21/ с конечным числом гармоник в сумме по m в /2/ показывает, что этот метод осуществляет коррекцию нескольких главных гармоник при целевой функции /15/.

2. Другим общим методом коррекции является динамический метод /4/, основанный на минимизации функции:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi)\, d\phi . \qquad /23/$$

В работе /5/ показано, что минимум /23/ достигается, если взять $\hat{C}_{cor}$ в виде

$$c_{k,i} = \frac{2 \sin(\pi Q)}{\sqrt{\beta_k \beta_i}} \left(\hat{B}^{-1} \hat{A}^{T} \right)_{ki} , \qquad /24/$$

где элементы матрицы $\hat{B}$ определяются как

$$b_{qr} = \cos Q |\phi_q - \phi_r| + \frac{\sin(\pi Q)}{\pi Q} [\cos Q (\pi - |\phi_q - \phi_r|) - \qquad /25/$$

$$- Q |\phi_q - \phi_r| \sin Q (\pi - |\phi_q - \phi_r|)] ,$$

$q, r = 1 \ldots N_{cor}$ - индексы корректоров. Элементы матрицы $\hat{A}$ равны:

$$a_{ir} = \left(\frac{2}{N_m} \right) \frac{2Q \sin(\pi Q)}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{Q^2 - (N_m / 2)^2} \right) + \right.$$

$$+\sum_{m=1}^{N_m/2-1} \frac{\cos m(\phi_i - \phi_r)}{Q^2 - m^2}] ; \qquad /26/$$

$i = 1 \dots N_m$ - индекс монитора.

3. Гармонический метод $^{/5/}$ основан на создании с помощью корректоров таких гармоник искажения орбиты, которые равны по величинам и противоположны по знаку ближайшим к Q гармоникам замкнутой орбиты, т.е.

$$\frac{1}{\pi} \int^{2\pi} f_{cor}(\phi) \left({\cos m\phi \atop \sin m\phi} \right) d\phi \cong \frac{1}{\pi Q} \sum_{k=1}^{N_{cor}} \sqrt{\beta_k} \Delta_k \left({\cos m\phi_k \atop \sin m\phi_k} \right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{m^2}{Q^2}\right) \left({u \atop v} \right)_m ; \qquad /27/$$

где

$$\left({u \atop v} \right)_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{X(\phi)}{\sqrt{\beta(\phi)}} \left({\cos m\phi \atop \sin m\phi} \right) d\phi . \qquad /28/$$

Введем матрицу $\hat{D}$ размерностью $N_{cor} \times N_{cor}$ следующим образом:

$$d_{2m-1,k} = \cos m\phi_k ;$$
$$d_{2m,k} = \sin m\phi_k ; \qquad /29/$$

$m = 1 \dots N_{cor}/2$, $k = 1,2 \dots N_{cor}$, тогда силы в корректорах можно определить с помощью /27/ через элементы обратной матрицы $\hat{D}^{-1}$:

$$\Delta_k = -\frac{\pi Q}{\sqrt{\beta_k}} \sum_{m=1}^{N_{cor}/2} \left(1 - \frac{m^2}{Q^2}\right) \left(d^{-1}_{k,2m-1} u_m + d^{-1}_{k,2m} v_m\right) . \qquad /30/$$

В наилучшем случае равномерного расположения мониторов фурье- гармоники /28/ с точностью до гармоник порядка выше $N_m/2$ совпадают с коэффициентами Бесселя $^{/4/}$:

$$\left({u \atop v} \right)_m \cong \left({U \atop V} \right)_m = \left(\frac{2}{N_m} \right) \sum_{i=1}^{N_m} \frac{X_i}{\sqrt{\beta_i}} \left({\cos m\phi_i \atop \sin m\phi_i} \right) . \qquad /31/$$

Подставляя /31/ в /30/ для $\hat{C}_{cor}$ можно получить:

$$c_{kj} = -\frac{\pi Q}{\sqrt{\beta_k \beta_i}} \left(\frac{2}{N_m}\right) \sum_{m=1}^{N_{cor}/2} \left(1 - \frac{m^2}{Q^2}\right) \left(d^{-1}_{k,2m-1} \cos m\phi_i + \right. \qquad /32/$$

$$\left. + d^{-1}_{k,2m} \sin m\phi_i\right).$$

В случае коррекции ближайших к Q гармоник в суммах /30/ и /32/ необходимо оставить их соответствующие номера, причем условие $N_{cor} \geq 2N_{max}$, где N_{max} - максимальный номер корректируемых гармоник, по-прежнему должно выполняться. Подчеркнем, что в /27-32/ ϕ - обобщенный азимут /3/.

Динамический метод, а также использование /32/ в гармоническом методе предполагает, что мониторы расставлены эквидистантно. Если это не так, то нужно дополнительно рассчитывать значения орбиты в регулярных точках. Это можно сделать с помощью аппроксимации орбиты сплайном. В этом случае под $\vec{X}$ в /14/ понимаются регулярные точки, которые обозначим здесь как X_{reg}. Построим матрицу $\hat{G}$, элементы которой равны:

$$g_{rj} = \chi_i(\phi_r), \qquad /33/$$

где $r = 1 \ldots N_{reg}$ - индексы регулярных точек, $i = 1 \ldots N_m$ - индексы мониторов, N_{reg} и N_m - число регулярных точек и мониторов. Периодические функции $\chi_i(\phi) : \chi_i(\phi + 2\pi) = \chi_i(\phi)$ строятся с помощью сплайна на основе N_m значений в азимутах, где расположены мониторы:

$$\chi_i(\phi_j) = \delta_{ij}; \qquad /34/$$

$i, j = 1 \ldots N_m$ - индексы мониторов, δ_{ij} - символ Кронекера. С помощью матрицы $\hat{G}$ получим

$$\vec{X}_{reg} = \hat{G}\vec{X}, \qquad /35/$$

где $\vec{X}$ - орбита в мониторах. Откуда

$$\vec{\Delta} = \hat{C}_{cor}\vec{X}_{reg} = (\hat{C}_{cor}\hat{G})\vec{X} = \hat{\hat{C}}_{cor}\vec{X} \qquad /36/$$

при

$$\hat{\hat{C}}_{cor} = \hat{C}_{cor}\hat{G}. \qquad /37/$$

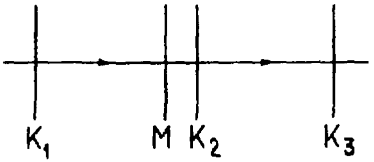

Рис.1. Расположение монитора M и корректоров $K_1 - K_3$ в бамп-методе.

Таким образом, при нерегулярном расположении мониторов в методе 2 и 3 необходимо использовать /36/-/37/. $\hat{C}_{cor}$ при этом рассчитывается для некоторого набора регулярных точек /например, вблизи структурных Ф- и Д-линз/.

4. Бамп-метод осуществляет локальную коррекцию орбиты с помощью трех корректоров на основании показаний одного или нескольких мониторов. Силы корректоров Δ_1, Δ_2, Δ_3 выбираются из условия минимальных значений орбиты в мониторах и ее неизменности за пределами корректируемого участка /6/ . При использовании показаний одного монитора /рис.1/ из 3 линейных уравнений можно получить следующие выражения для сил корректоров:

$$\Delta_1 = -X_m/(\sqrt{\beta_m \beta_1}\,\sin\mu_{1m}),$$

$$\Delta_2 = -\Delta_1\sqrt{\beta_1}\,\sin\mu_{13}/(\sqrt{\beta_2}\,\sin\mu_{23}), \qquad /38a/$$

$$\Delta_3 = \Delta_1\sqrt{\beta_1}\,\sin\mu_{12}/(\sqrt{\beta_3}\,\sin\mu_{23}),$$

где индексы 1-3 относятся к корректорам, а m - к пикап-электроду; $\mu_{ij} = (\mu_j - \mu_i)$ - набег фазы бетатронных колебаний между точками i и j ; X_m - показания монитора до коррекции.

Более предпочтительной схемой коррекции является та, которая учитывает значения орбиты в нескольких мониторах /9/ . Силы в K_2 и K_3 определяются через силу первого корректора из 2-го и 3-го уравнений в /38а/. Сила первого корректора Δ_1 находится из условия минимума суммы квадратов орбиты в N мониторах. Минимизируется следующий функционал, второе слагаемое в котором с безразмерным множителем λ^2 служит для ограничения силы корректоров:

$$F = \sum_{i=1}^{N} (X^{(cor)} + X^{(m)})_i^2 + \lambda^2 \beta_1 \beta_2 \Delta_1^2 \sin^2 \tilde{\mu}_{12},$$

где

$$\tilde{\mu}_{12} = \begin{cases} \mu_{12} = \mu_2 - \mu_1, & \text{если } \mu_{12} \le \pi/2, \\ \pi/2, & \text{если } \mu_{12} > \pi/2, \end{cases}$$

i - индекс монитора; $X_i^{(m)}$ - орбита в i-м мониторе перед коррекцией; $X_i^{(cor)}$ - орбита, создаваемая корректорами:

$$X_i^{(cor)} = \Delta_1 \tilde{X}_i^{(cor)} ,$$

$$\tilde{X}_i^{(cor)} = \sqrt{\beta_1 \beta_i^{(m)}} \begin{cases} \sin(\mu_i^{(m)} - \mu_1), & \text{если } \mu_i^{(m)} \leq \mu_2 , \\ \sin(\mu_i^{(m)} - \mu_1) - \dfrac{\sin \mu_{13}}{\sin \mu_{23}} \sin(\mu_i^{(m)} - \mu_2) , \\ \text{если } \mu_i^{(m)} > \mu_2 \end{cases}$$

Фазы μ и амплитудные β-функции с индексом (m) вверху относятся к мониторам, без него - к корректорам.

Минимум F наступает при следующем Δ_1:

$$\Delta_1 = - \sum_{i=1}^{N} X_i^{(m)} C_i , \qquad /38б/$$

где

$$C_i = \tilde{X}_i^{(cor)} / (\sum_{i=1}^{N} (\tilde{X}_i^{(cor)})^2 + \lambda^2 \beta_1 \beta_2 \sin^2 \tilde{\mu}_{12}) .$$

В случае последовательного применения бамп-коррекции с продвижением на каждом шаге от одного корректора к соседнему получим итеративную бамп-коррекцию. Коррекция в последнем мониторе может, однако, разрушить скорректированную орбиту в первом мониторе. Этого можно избежать либо путем многократного повторения упомянутых проходов коррекции вдоль периметра, либо путем точного вычисления матрицы C_{cor} итеративного бамп-метода /7/ .

4. КАЧЕСТВО КОРРЕКЦИИ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ

Замкнутые орбиты до коррекции $X_0(\phi)$ и после $X_{cor}(\phi)$ являются случайными величинами и для них можно получить статистические аналитические оценки. Для $X_0(\phi)$ из /5/ следует, что

$$X_0(\phi) = \sum_{n=1}^{N_t} a_n(\phi)\, \theta_n , \qquad /39/$$

$$a_n(\phi) = (\sqrt{\beta(\phi)\,\beta(\phi_n)}\,/2\sin\pi Q)\,\cos Q(|\phi - \phi_n| - \pi)\ , \qquad /40/$$

$$\theta_n = (\Delta B\,\Delta s\,/\,B\rho)_n\ , \qquad /41/$$

где ϕ_n - обобщенный азимут n-й /по счету/ погрешности поля θ_n за исключением корректоров орбиты; N_t - полное число погрешностей. Для $X_{cor}(\phi)$ с учетом корректоров орбиты /14/ можно получить:

$$X_{cor}(\phi) = X_0(\phi) + \Delta X_{cor}(\phi) = \sum_{n=1}^{N_t} a_n(\phi)\,\theta_n + \sum_{k=1}^{N_{cor}} a_k(\phi)\,\Delta_k =$$

$$= \sum_{n=1}^{N_t} \theta_n\,(a_n(\phi) + \sum_{k=1}^{N_{cor}} \sum_{i=1}^{N_m} c_{ki}\,a_k(\phi)\,a_n(\phi_i))\ ,$$

или

$$X_{cor}(\phi) = \sum_{n=1}^{N_t} b_n(\phi)\,\theta_n\ , \qquad /42/$$

$$b_n(\phi) = a_n(\phi) + \sum_{k=1}^{N_{cor}} \sum_{i=1}^{N_m} c_{ki}\,a_k(\phi)\,a_n(\phi_i)\ , \qquad /43/$$

где матрица коррекции $\|c_{ki}\|$ зависит от метода коррекции /п.3/; n, k, i - индексы погрешности поля, корректора и монитора соответственно. Если в /39/ и /42/ под θ_n понимать те погрешности, которые линейным образом связаны с ошибками в юстировке магнитов /9/, и предположить гауссов характер распределения последних, а также индукций магнитного поля в дипольных магнитах, то замкнутые орбиты $X_0(\phi)$ и $X_{cor}(\phi)$ также будут гауссовыми случайными величинами с нулевыми средними значениями. Для дисперсии из /39/ и /42/ будем иметь следующие выражения:

$$<X_0(\phi)>^2 = \sum_{p=1}^{M} \sigma_p^2\,(\sum_{n_p=1}^{N_p} a^2_{n_p}(\phi))\ , \qquad /44a/$$

$$\langle X_{cor}(\phi)\rangle^2 = \sum_{p=1}^{M} \sigma_p^2 \Big(\sum_{n_p=1}^{N_p} b_{n_p}^2(\phi)\Big) , \qquad /44а/$$

где $M = 4$ - число основных типов погрешностей поля /см.п.2/; σ_p^2 - дисперсии источников погрешностей: $\langle\Delta X\rangle^2$, $\langle\Delta Y\rangle^2$, $\langle\alpha_s\rangle^2$, $\langle\Delta B/B\rangle_M^2$, $p = 1-4$; N_p - число магнитных элементов /дипольных или квадрупольных магнитов/ с погрешностью p-го типа.

Выражения /44а/ позволяют ввести функции $\xi_{o,\alpha}(\phi)$ и $\xi_{cor,\alpha}(\phi)$, показывающие такие значения орбиты в точке ϕ, которые не будут превышены с вероятностью α:

$$\xi_{o,\alpha}(\phi) = \lambda_\alpha \langle X_o(\phi)\rangle ;$$

$$\xi_{cor,\alpha}(\phi) = \lambda_\alpha \langle X_{cor}(\phi)\rangle . \qquad /44б/$$

Коэффициент λ_α в /44б/ определяется доверительным уровнем α. Например, для $\alpha = 98\%$ $\lambda_\alpha = 2,40$.

Аналогично можно вычислить такую силу каждого корректора $\chi_{k,\alpha}$, которая не будет превышена с вероятностью α. Из /5/ и /14/ получим

$$\Delta_k = \sum_{n=1}^{N_t} \theta_n \Big(\sum_{m=1}^{N_m} c_{km} a_n(\phi_m)\Big),$$

где обозначения такие же, как в /39/-/41/. Откуда

$$\chi_{k,\alpha} = \lambda_\alpha \langle\Delta_k\rangle = \lambda_\alpha \Big(\sum_{p=1}^{M} \sigma_p^2 \sum_{n_p=1}^{N_p} \Big(\sum_{m=1}^{N_m} c_{km} a_{n_p}(\phi_m)\Big)^2 \Big)^{1/2} . \qquad /44в/$$

Для характеристики качества коррекции орбиты в точке ϕ введем качество коррекции:

$$K = \max_{0<\phi<2\pi} |X_o(\phi)| / \max_{0<\phi<2\pi} |X_{cor}(\phi)| , \qquad /45/$$

которое также является случайной величиной.

Аналитически подсчитать распределение вероятности K не представляется возможным. Однако численно методом Монте-Карло можно построить гистограмму распределения K. Цикл моделирования при этом следующий:

1/ в каждом магнитном элементе в соответствии с заранее заданными дисперсиями /9/ разыгрываются ошибки юстировки и поля;

2/ по формулам /39/, /42/ и /45/ определяется величина K.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ НУКЛОТРОНА

Для моделирования искажения замкнутой орбиты и коррекции ее одним из четырех методов, описанных в п.3, была создана программа CORBIT /8/ /язык - FORTRAN-77 для ПЭВМ/, использующая матричный метод расчета. Ошибки поля /9/ в ней разыгрываются с помощью генератора случайных чисел. После этого вычисляются замкнутая орбита и ее максимальные значения в обеих плоскостях до и после коррекции, определяется качество коррекции /45/. Цикл разыгрывания орбиты и ее коррекции повторяется необходи-

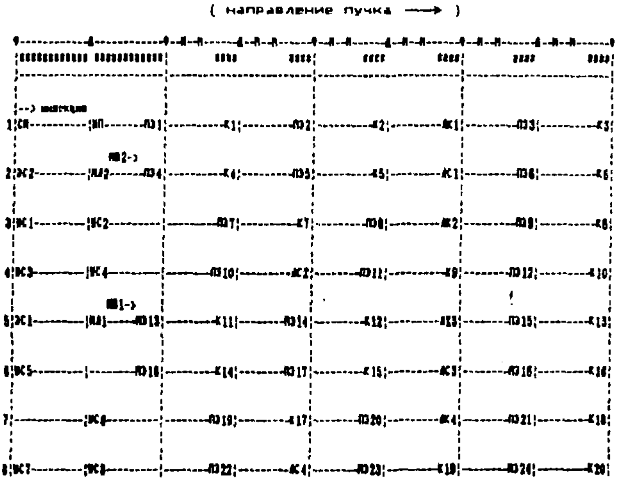

Рис.2. Компоновка дипольных корректоров и датчиков положения пучка в суперпериодах нуклотрона. Обозначения: Ф - фокусирующая квадрупольная линза; Д - дефокусирующая квадрупольная линза; М - дипольный магнит; СМ - септум-магнит системы инжекции; ИП - инфлекторные пластины системы инжекции; УС - ускоряющие станции; МВ1 - медленный вывод в корпус № 205; МВ2 - медленный вывод в корпус № 16; ЭС - электростатический септум системы МВ; МЛ - магнит Ламбертсона системы МВ; ЛК - линза квадрупольная системы МВ; ЛС - линза секступольная системы МВ; ПЭ - пикап-электрод; К - дипольный корректор.

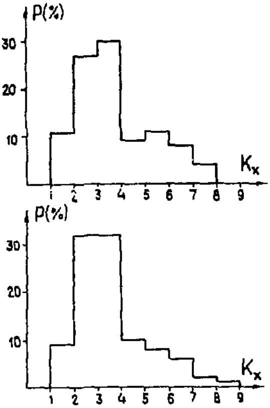

Рис.3. Гистограмма распределения качества коррекции горизонтальной орбиты динамическим методом /вверху/ и методом наименьших квадратов /внизу/.

мое число раз. На рис.2 показано размещение 20 корректоров /К/ и 24 мониторов /ПЭ/ в 8 суперпериодах нуклотрона. В табл.1 и 2 представлены результаты 200 циклов моделирования орбиты и ее коррекции методом наименьших квадратов и динамическим методом для бетатронных частот $Q_x = 6,8$ и $Q_y = 6,85$ и среднеквадратичных ошибок:

$$<\Delta X_л> = <\Delta Y_л> = 0,1 \text{ mm} ;$$

$$<\Delta B/B>_м = <a_s>_м = 5 \cdot 10^{-4}.$$

На рис.3 изображены гистограммы распределения качества коррекции горизонтальной орбиты для указанных методов. Аналогичные распределения - для вертикальной орбиты.

Таблица 1. Замкнутая орбита до и после коррекции для методов наименьших квадратов /слева/ и динамического /справа/

	До коррекции	После коррекции	
Среднее для максимальной орбиты X_{max} /мм/	4.10	1.22	1.08
Среднеквадратичное значение максимального искажения орбиты $<X_{max}>$ /мм/	4.31	1.28	1.16
Y_{max} /мм/	4.75	1.41	1.45
$<Y_{max}>$ /мм/	5.08	1.54	1.60

Как видно из табл.1, между аналитической оценкой /13/ и результатом моделирования имеется хорошее согласие. С помощью CORBIT отдельно исследовался вклад дипольных и квадрупольных магнитов в искажение орбиты, и получено согласие с /13/ с точностью до набранной статистики.

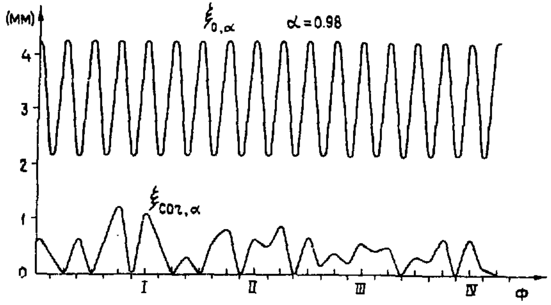

Рис.4. Максимальные значения орбиты до и после коррекции в зависимости от азимута Ф для 4 суперпериодов нуклотрона /отмечены римскими цифрами/: α – доверительный уровень; положения Ф-линз отмечены делениями выше горизонтальной оси, Д-линз – ниже оси; расстояние между соседними Ф- и Д-линзами 11.25°.

Таблица 2. Качество коррекции и максимальные силы в корректорах для методов наименьших квадратов /слева/ и динамического /справа/

Плоскость	$\bar{K}$	$\langle K \rangle$	K_{min}	K_{max}	Максимальный угол поворота в корректоре /мрад/
X	3.60 3.72	3.92 4.05	1.2 1.2	12.1 10.3	1.02 1.12
Y	4.00 3.91	4.67 4.55	1.2 1.2	14.4 13.1	0.77 0.70

На рис.4 показаны графики максимальных значений горизонтальной орбиты до и после коррекции /методом наименьших квадратов/ в зависимости от азимута, вычисленные с помощью аналитических соотношений /44а-б/ при доверительном уровне α = 98%. Максимальные силы в корректорах, полученные из /44в/ /при том же α/, равны 1,21 и 0,77 для горизонтальной и вертикальной плоскостей соответственно, что хорошо согласуется с результатом моделирования методом Монте-Карло /см. табл.2/.

Проводилось также моделирование коррекции орбиты гармоническим методом для этой же расстановки корректоров и мониторов /рис.2/. При коррекции 4 ближайших к Q_x и Q_y гармоник получено несколько худшее качество.

При коррекции динамическим и гармоническим методом использовалась аппроксимация орбиты сплайном и брались ее значения вблизи структурных квадрупольных магнитов.

В заключение следует отметить, что в программе для ЭВМ, управляющей коррекцией орбиты нуклотрона, целесообразно реализовать все 4 рассмотренных метода коррекции: бамп-метод - для коррекции 1-го оборота, остальные методы - для коррекции в процессе ускорения и вывода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gluckstern P.L. - Particle Accelerators, 1978, v.8, p.203.
2. Autin B., Marti Y. - CERN/ISR-MA/73-17, Geneva, 1973.
3. Baconnier Y. - CERN 65-35, Geneva, 1965.
4. Динев Д.Х. - ОИЯИ, Р9-82-502, Дубна, 1982.
5. Autin B., Bryant P.J. - CERN/ISR-MA/71-36, Geneva, 1971.
6. Holtey G. - CERN/Lab. 2-D1-PA/Int. 73-3, Geneva, 1973.
7. Maidment J.R., Planner C.W. - "An analytic method for closed orbit correction in high energy synchrotrons", Nucl. Instr. and Meth., 1972.
8. Щепунов В.А. - ОИЯИ, Б1-9-90-366, Дубна, 1990.
9. Guignard G., Marti Y. - CERN/ISR-BOM-TH/81-32, Geneva, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 октября 1990 года.