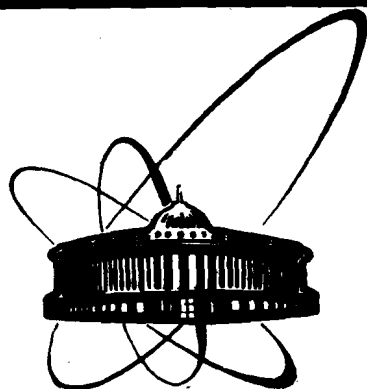


89-487



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

M 69

9-89-487

В. А. Михайлов, В. А. Щепунов

ВЛИЯНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАЗБРОС ЧАСТОТ  
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

1989

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что во втором приближении метода усреднения квадратичная нелинейность магнитного поля приводит к появлению зависимости частот бетатронных колебаний от амплитуд, а также к возможности развития структурных резонансов 4 порядка<sup>1/</sup>. В данной работе проводится подробное исследование разбросов бетатронных частот, которые появляются как вследствие амплитудной зависимости, так и из-за наличия искажения замкнутой орбиты. При этом учитываются два источника искажения - отклонение импульсов частиц от равновесного и ошибки в юстировке магнитов ускорителя. Принимается во внимание также сакитта в прямоугольных дипольных магнитах.

Полученные формулы легли в основу программы для ПЭВМ, способной рассчитывать разброс частот ускорителя с точностью до второго порядка асимптотического разложения. С помощью программы были проведены расчеты для нуклотрона ОИЯИ.

### 1. ДВИЖЕНИЕ В СЕКСТУПОЛЬНОМ ПОЛЕ

В линейном приближении бетатронное движение заряженной частицы в идеальной магнитной структуре синхротрона описывается гамильтонианом  $H_0$ :

$$H_0 = p_x^2/2 + p_z^2/2 + (K(s) z^2/2 - (K(s) - 1/\rho^2(s)) x^2/2),$$

$$K(s) = (e/p_0c) (\partial B_z / \partial x) \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}}, \quad K(s+L) = K(s), \quad /1/$$

$$B_0 = (p_0c/e\rho(s)),$$

где  $(x, p_x)$ ,  $(z, p_z)$  - канонически сопряженные координаты и импульсы частицы для радиальных и вертикальных колебаний соответственно в криволинейной системе координат<sup>2/</sup>;  $s$  - временная переменная, равная длине траектории, измеряемой вдоль равновесной орбиты;  $L$  - длина периметра ускорителя;  $K(s)$  - периоди-

ческая квадрупольная сила;  $1/\rho(s)$  - кривизна равновесной орбиты;  $p_0, e$  - равновесный импульс и заряд частицы.

Решения уравнений движения для /1/ записываются в виде

$$x(s) = \sqrt{2I_x \beta_x(s)} \cos(\mu_x(s)),$$

$$F_x(s) = -\sqrt{2I_x/\beta_x(s)} (\sin(\mu_x(s)) + a_x(s) \cos(\mu_x(s))), \quad /2/$$

$$\mu_x(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{\beta_x(\sigma)} + \mu_{x0},$$

а функции Твисса  $\beta_x(s)$ ,  $a_x(s)$  находятся из уравнений:

$$\beta_x''' + 4K_x(s) \beta_x' + 2K_x'(s) \beta_x = 0,$$

$$\beta_x \beta_x'' / 2 - (\beta_x')^2 / 4 + K_x(s) \beta_x^2 = 1, \quad /3/$$

$$\beta_x(s+L) = \beta_x(s), \quad K_x(s) = -(K(s) - 1/\rho^2(s)), \quad a_x(s) = -\beta_x'(s)/2$$

и аналогично для  $(z, p_z)$  с учетом того, что  $K_z(s) = K(s)$ .

$I_{x,z}, \mu_{x,z}$  - переменные действие-угол для гамильтониана /1/, в которых он имеет следующий вид:

$$H_0 = I_x / \beta_x(s) + I_z / \beta_z(s), \quad /4/$$

где использовано старое обозначение  $H_0$ .

Для секступольного возмущения  $V(s)$  гамильтониана /1/ имеем

$$V(s) = \frac{m(s)}{6} (x^3 - 3xz^2) - \frac{\tilde{m}(s)}{6} (z^3 - 3zx^2), \quad /5/$$

$$m(s) = (1/|B_{0\rho}|) (\partial^2 B_z / \partial x^2) \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}}, \quad \tilde{m}(s) = (1/|B_{0\rho}|) (\partial^2 B_z / \partial z^2) \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}}$$

$$m(s+L) = m(s), \quad \tilde{m}(s+L) = \tilde{m}(s).$$

Здесь  $m(s)$  и  $\tilde{m}(s)$  - прямая и косая секступольные силы магнитов соответственно.

Прежде чем переходить к переменным действие-угол в возмущении /5/, к общему решению /2/ для невозмущенного гамильтониана необходимо добавить периодические /с периодом L/ функции  $f_x(s)$  и  $f_z(s)$ , которые описывают замкнутую орбиту для других видов возмущений /1/. Тем самым эффективно учитывается совместное воздействие квадратичных нелинейностей и других источников возмущения. В данной работе рассматриваются три таких источника, а именно:

- искажение орбиты для частиц с неравновесным импульсом

$$\delta = (p - p_0) / p_0$$

- искажение орбиты из-за ошибок в юстировке дипольных и квадрупольных магнитов,

- сагитта в дипольных прямоугольных магнитах.

Тогда в линейном приближении функции возмущения орбиты можно записать как

$$f_x(s) = \psi(s) \delta + \xi_x(s) + X_s(s), \quad f_x(s+L) = f_x(s), \quad /6/$$

$$f_z(s) = \xi_z(s), \quad f_z(s+L) = f_z(s),$$

где  $\psi(s)$  - дисперсионная функция,  $\xi_{x,z}(s)$  - вклад ошибок юстировки в искажение орбиты,  $X_s(s)$  - сагитта диполей. Функции /6/ являются периодическими решениями уравнений движения для /1/ с соответствующими возмущениями /3,4/. Их вид приводится в п.3.

Подставляя /2/ в /5/ с учетом /6/ и сохраняя старое обозначение для  $V$ , получим следующее выражение для секступольного возмущения в переменных  $I_{x,z}, \mu_{x,z}$ :

$$\begin{aligned} V(\vec{I}, \vec{\mu}) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{m}{3\sqrt{2}} (I_x \beta_x)^{3/2} \cdot \cos 3\mu_x - \frac{\tilde{m}}{3\sqrt{2}} (I_z \beta_z)^{3/2} \cdot \cos 3\mu_z + \right. \\ & + F_3 (I_x \beta_x \cos 2\mu_x - I_z \beta_z \cos 2\mu_z) + \sqrt{2I_x \beta_x} \cos \mu_x (F_1 + m(\frac{1}{2} \beta_x I_x - \beta_z I_z)) - \\ & - \sqrt{2I_z \beta_z} \cos \mu_z (-F_2 + \tilde{m}(\frac{1}{2} I_z \beta_z - I_x \beta_x)) + \\ & + \frac{\tilde{m}}{2} I_x \beta_x \sqrt{2I_z \beta_z} \cdot (\cos(\mu_z + 2\mu_x) - \cos(\mu_z - 2\mu_x)) - \\ & - \frac{m}{2} I_z \beta_z \sqrt{2I_x \beta_x} (\cos(\mu_x + 2\mu_z) + \cos(\mu_x - 2\mu_z)) + \\ & \left. + 2F_4 \sqrt{I_x \beta_x I_z \beta_z} (\cos(\mu_x + \mu_z) + \cos(\mu_x - \mu_z)) \right\} + \frac{F_3}{2} (I_x \beta_x - I_z \beta_z), \quad /7/ \end{aligned}$$

где

$$F_1(s) = m(f_x^2 - f_z^2) + 2\tilde{m}f_x f_z,$$

$$F_2(s) = \tilde{m}(f_x^2 - f_z^2) - 2mf_x f_z,$$

/8/

$$F_3(s) = mf_x + \tilde{m}f_z,$$

$$F_4(s) = \tilde{m}f_x - mf_z.$$

Решение уравнений движения для гамильтониана /4/ с возмущением /7/ можно найти, используя метод усреднения /5/. Малость параметра  $\epsilon$  асимптотического разложения обеспечивается в данной задаче малой величиной квадратичных нелинейностей. При заданных эмиттантах пучка это приводит к ограничению максимальных значений модулей нелинейностей  $m(s)$  и  $\tilde{m}(s)$  сверху, в пределах которого приближение оправданно. Необходимо также, чтобы бетатронные частоты находились достаточно далеко от соответствующих резонансных линий /см. п.3/.

Отметим, что все полученные ниже формулы могут быть найдены также в рамках канонической нерезонансной теории возмущений Цейпеля - Пуанкаре с помощью техники фурье-преобразования для производящей функции уравнения Гамильтона - Якоби /13,6/.

## 2. ПЕРВЫЙ ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ

Запишем уравнения движения в векторной форме:

$$d\vec{X}/ds = \epsilon \vec{Y}(\vec{X}, s),$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_z \\ \mu_x \\ \mu_z \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}(\vec{X}, s) = \begin{pmatrix} -\partial V / \partial \mu_x \\ -\partial V / \partial \mu_z \\ \partial V / \partial I_x \\ \partial V / \partial I_z \end{pmatrix}. \quad /9/$$

Решения /9/ ищутся в виде асимптотического ряда:

$$\vec{X}(s) = \vec{X}^{(0)} + \epsilon \vec{X}^{(1)}(s) + \epsilon^2 \vec{X}^{(2)}(s) + \dots$$

В первом порядке  $\vec{X}^{(1)}(s)$  находится путем интегрирования усредненной по  $s$  правой части, т.е.

$$d\vec{X}^{(1)}/ds = \langle \vec{Y}(\vec{X}, s) \rangle_s,$$

/10/

$$\langle \vec{Y}(\vec{X}, s) \rangle_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{Y}(\vec{X}, s) ds.$$

При этом необходимо учитывать, что

$$\mu_{x,z}(s+L) = \mu_{x,z}(s) + 2\pi Q_{x,z}, \quad /11/$$

где  $Q_{x,z}$  - частоты бетатронных колебаний:

$$Q_{x,z} = (\mu_{x,z}(L) - \mu_{x,z}(0)) / 2\pi.$$

Замечая, что выражение в фигурных скобках в /7/ при усреднении обращается в ноль, найдем

$$I_{x,z}^{(1)} = 0,$$

$$\Delta C_{x,z}^{(1)} = \mu_{x,z}^{(1)}(L) / 2\pi = \pm \frac{1}{4\pi} \int_0^L F_3(s) \beta_{x,z}(s) ds. \quad /12/$$

Введем нормализованные квадратичные нелинейности следующим образом:

$$(\Delta \bar{B}/B)(s) = (r^2 / 2B_0) (\partial^2 B_z / \partial x^2) \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} - \text{для прямой компоненты}, \quad /13/$$

$$(\Delta \tilde{B}/B)(s) = (r^2 / 2B_0) (\partial^2 B_z / \partial z^2) \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} - \text{для косой компоненты},$$

где  $r$  - радиус нормализации. Для разброса бетатронных частот окончательно получим

$$\Delta Q_{x,z}^{(1)} = \pm \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^L \beta_{x,z}(s) (f_x(s) (\Delta \bar{B}/B) + f_z(s) (\Delta \tilde{B}/B)) ds. \quad /12a/$$

### 3. ВТОРОЙ ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ

Усредненные уравнения второго приближения записываются в виде /7/:

$$\frac{d\vec{X}_i^{(2)}}{ds} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds \int_0^s d\sigma \sum_{j=1}^4 \vec{y}_j(\vec{X}^{(0)} + \vec{X}^{(1)}, \sigma) \left( \frac{\partial y_i(\vec{X}, s)}{\partial x_j} \right) \Big|_{\vec{X} = \vec{X}^{(0)} + \vec{X}^{(1)}} \quad /14/$$

$$\vec{y}_i(\vec{X}, \sigma) = y_i(\vec{X}, \sigma) - \langle y_i(\vec{X}, \sigma) \rangle_\sigma, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Здесь  $\vec{X}^{(1)}$  - решение в первом приближении. Процедура вычисления /14/ достаточно громоздка и приведена в приложении 1.

Разброс частот во втором порядке складывается из двух частей:

$$\Delta Q_{x,z}^{(2)} = \Delta Q_{x,z}^{(1)} + \Delta Q_{x,z}^{(0)}, \quad /15/$$

причем  $\Delta Q_{x,z}^{(1)}$  связаны с конечным размером пучка, а  $\Delta Q_{x,z}^{(0)}$  зависят от величины искажения замкнутой орбиты и сагитты.  $\Delta Q_{x,z}^{(1)}$ , в свою очередь, складываются из  $\Delta \bar{Q}_{x,z}$  и  $\Delta \tilde{Q}_{x,z}$ , определяемых значениями прямой и кривой секступольных нелинейностей соответственно:

$$\Delta Q_{x,z}^{(1)} = \Delta \bar{Q}_{x,z} + \Delta \tilde{Q}_{x,z}.$$

Для разбросов частот, вызванных систематическими нелинейностями диполей, можно получить следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{Q}_x \\ \Delta \bar{Q}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xz} \\ a_{zx} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_z \end{pmatrix} \left( \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad a_{xz} = a_{zx}.$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \tilde{Q}_x \\ \Delta \tilde{Q}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xz} \\ b_{zx} & b_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_z \end{pmatrix} \left( \frac{\Delta \tilde{B}}{B} \right)^2, \quad b_{xz} = b_{zx}. \quad /16/$$

Постоянные коэффициенты в /16/ выражаются через двойные интегралы от структурных функций  $\beta_{x,z}(s)$  /см. приложение 2/. Эти выражения содержат резонансные знаменатели, обращающиеся в ноль, если частоты бетатронных колебаний связаны одним из соотношений:

$$Q_x = N, \quad Q_x \pm 2Q_z = N, \quad 3Q_x = N, \quad N - \text{целое} \quad /17a/$$

$$Q_z = N, \quad Q_z \pm 2Q_x = N, \quad 3Q_z = N, \quad /17b/$$

причем резонансы /17a/ проявляются при наличии прямой компоненты нелинейности, а /17b/ - кривой.

Система коррекции хроматичности также будет давать вклад в разброс частот:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{Q}_x^{\text{cor}} \\ \Delta \bar{Q}_z^{\text{cor}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx}^{\text{cor}} & a_{xz}^{\text{cor}} \\ a_{zx}^{\text{cor}} & a_{zz}^{\text{cor}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_z \end{pmatrix}, \quad a_{xz}^{\text{cor}} = a_{zx}^{\text{cor}}. \quad /18/$$

где коэффициенты  $a_{xx}^{\text{cor}}$ ,  $a_{xz}^{\text{cor}}$ ,  $a_{zz}^{\text{cor}}$  квадратично зависят от сил секступольных корректоров /приложение 2/ и имеют резонансные зависимости типа /17a/.

Для второго слагаемого в /15/, связанного с искажением замкнутой орбиты, получаем

$$\begin{aligned} \Delta Q_x^{(0)} = & -\frac{1}{16\pi} \int_0^L ds \int_0^s d\sigma \sqrt{\beta_{xs}\beta_{x\sigma}} (F_{1s} m_\sigma \beta_{x\sigma} + F_{1\sigma} m_s \beta_{xs}) \times \\ & \times \frac{\cos(\mu_{x\sigma} - \mu_{xs} - \pi Q_x)}{\sin \pi Q_x} + \\ & + \sqrt{\beta_{zs}\beta_{z\sigma}} (F_{2s} \tilde{m}_\sigma \beta_{x\sigma} + F_{2\sigma} \tilde{m}_s \beta_{zs}) \frac{\cos(\mu_{z\sigma} - \mu_{zs} - \pi Q_z)}{\sin \pi Q_z} + \\ & + 2F_{3\sigma} F_{3s} \beta_{x\sigma} \beta_{xs} \frac{\cos(2\mu_{x\sigma} - 2\mu_{xs} - 2\pi Q_x)}{\sin 2\pi Q_x} + \end{aligned}$$

$$+ 2F_{4\sigma} F_{4s} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma} \beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \cdot \left( \frac{\cos(\mu_{x\sigma} + \mu_{z\sigma} - \mu_{xs} - \mu_{zs} - \pi(Q_x + Q_z))}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} - \frac{\cos(\mu_{x\sigma} - \mu_{z\sigma} - \mu_{xs} + \mu_{zs} - \pi(Q_x - Q_z))}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \}, \quad /19/$$

где индексы s и  $\sigma$  обозначают переменную интегрирования, а функции  $F_1 - F_4$  определены в /8/. Выражение для  $\Delta Q_z^{(1)}$  получается из /19/ заменой x на z и  $m(s)$  на  $\tilde{m}(s)$  и наоборот. Отметим, что наличие искажения орбиты приводит к резонансной зависимости разбросов частот при приближении к линиям

$$2Q_x = N, \quad 2Q_z = N, \quad Q_x \pm Q_z = N, \quad N - \text{целое.} \quad /17в/$$

Однако формула /19/ /также как и выражения для коэффициентов в /16/ и /18// справедлива лишь при частотах, лежащих далеко от соответствующих резонансных полос.

#### 4. ОШИБКИ ЮСТИРОВКИ И САГИТТА

Рассмотрим подробнее второе и третье слагаемые в /6/. Для оценки влияния ошибок юстировки дипольных и квадрупольных магнитов на разброс бетатронных частот ограничимся одной фурье-гармоникой замкнутой орбиты. Выбор номера гармоники и ее амплитуды производится, исходя из положения рабочей точки ускорителя на плоскости бетатронных частот, учета суперпериодичности и допусков на разброс частот /8/. Таким образом,

$$\xi_{x,z} = \xi_{x0,z0} \cos\left(M \frac{s}{R} + a_{x,z}\right), \quad R = L/2\pi, \quad /20/$$

где  $\xi_{x0,z0}$ ,  $a_{x,z}$  - амплитуды и фазы M-й гармоники искаженной орбиты.

Влияние сагитты оценивается следующим образом. В работе /9/ показано, что хорошим приближением для равновесных траекторий /с точностью  $\delta X/X < 10^{-3}$ / в дипольных магнитах синхротрона, имеющих не слишком большую величину квадратичной нелинейности поля  $|\Delta B/B| < 3 \cdot 10^{-3}$ , являются окружности. Поэтому для декартовой координаты  $Y_s$  неискаженной орбиты в прямоугольном диполе можно записать /см. рис.1/:

$$Y_s(\phi) = y_i + \rho(\cos(\phi - \phi_i) - \cos \phi_i), \quad /21/$$

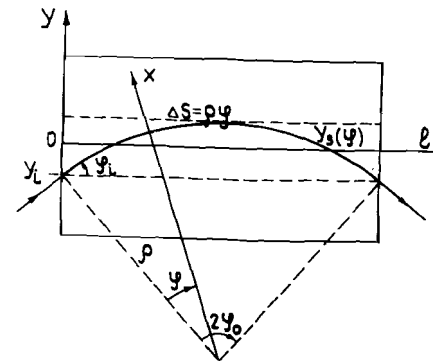


Рис.1. Равновесная орбита в прямоугольном дипольном магните.

где  $y_i$ ,  $\phi_i$  - координата и угол частицы на входе в диполь,  $\phi = \Delta s/\rho$  - текущий угол, отсчитываемый от точки входа частицы в диполь. В частности, в симметричном случае получим:

$$\phi_i = \phi_0, \quad y_i = -\frac{\rho}{2}(1 - \cos \phi_0), \quad /22/$$

$2\phi_0$  - угол поворота магнита. Координата произвольной частицы, совершающей бетатронные колебания,

$$y = x \cos(\phi - \phi_i) + Y_s = x \cos(\phi - \phi_i) + y_i + \rho(\cos(\phi - \phi_i) - \cos \phi_i), \quad /23/$$

x - радиальное отклонение в криволинейной системе координат /2/. Чтобы учесть сагитту, в возмущение /5/ вместо x необходимо подставить декартову координату /23/. После подстановки /2/ в /23/ координата частицы

$$y = \sqrt{2I_x} \beta_x \cos^2(\phi - \phi_i) \cdot \cos \mu_x + \psi \cos(\phi - \phi_i) \delta + \xi_x \cos(\phi - \phi_i) + Y_s.$$

Отсюда видно, что сагитта будет учтена, если во всех полученных выше формулах произвести замену:

$$\beta_x \rightarrow \beta_x \cos^2(\phi - \phi_i), \quad \psi \rightarrow \psi \cos(\phi - \phi_i),$$

$$\xi_x \rightarrow \xi_x \cos(\phi - \phi_i), \quad /24/$$

которая действует только в пределах дипольных магнитов; а также добавить слагаемое /21/ к  $f_x(s)$ , обозначенное в /6/ как  $X_s(s)$ . В дальнейших расчетах преобразование /24/ не учитывается, ввиду того, что дает малое относительное изменение координаты, порядка  $\frac{1}{2} \phi_0^2$ , где  $2\phi_0$  - угол поворота диполя /в радианах/.

Таким образом, учет сагитты приводит к появлению третьего слагаемого в /6/, отличного от нуля в пределах прямоугольных магнитов и имеющего вид /21/.

## 5. СДВИГИ ЧАСТОТ ДЛЯ ИСКАЖЕННЫХ ОРБИТ

Воспользуемся /20/ и /21/ и более детально исследуем сдвиги частот  $\Delta Q_{x,z}^{(1)}$ ,  $\Delta Q_{x,z}^{(f)}$  для искаженных орбит  $f_x(s)$  и  $f_z(s)$ . После подстановок получим для первого приближения следующие выражения:

$$\Delta Q_{x,z}^{(1)} = \Delta Q_{x,z}^{(\delta)} + \Delta Q_{x,z}^{(\xi)} + \Delta Q_{x,z}^{(s)}, \quad /25/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(\delta)} = \pm \frac{1}{4\pi} \delta \int_0^L \beta_{x,z} \psi m ds, \quad /26/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(\xi)} = \pm \frac{1}{4\pi} \int_0^L \beta_{x,z} (\xi_x m + \xi_z \tilde{m}) ds, \quad /27/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(s)} = \pm \frac{1}{2\pi\rho\Gamma^2} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right) \int_0^L \beta_{x,z} X_s ds. \quad /28/$$

Изменение естественной хроматичности  $\chi_{x_0, z_0}$  в присутствии систематической нелинейности дипольных магнитов, как следует из /26/, равно:

$$\Delta \chi_{x,z} = \Delta Q_{x,z}^{(\delta)} / \delta = \pm \frac{1}{2\pi\rho\Gamma^2} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right) \int_0^L \beta_{x,z} \psi ds \quad /29/$$

и компенсируется вместе с  $\chi_{x_0, z_0}$  при помощи секступольных корректоров. Когерентные сдвиги частот, вызванные сагиттой в диполях, характеризуются величинами  $\lambda_{x,z}^{(s)}$ :

$$\lambda_{x,z}^{(s)} = \Delta Q_{x,z}^{(s)} / \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right) = \pm \frac{1}{2\pi\rho\Gamma^2} \int_0^L \beta_{x,z} X_s ds. \quad /30/$$

Сдвиги частот /27/ для искаженной орбиты /20/ происходят в случае, когда отличны от нуля гармоники квадратичной нелинейности, кратные  $M$ . Это может иметь место для секступольных корректоров. Сдвиги частот в приближении тонких линз можно получить тогда из выражений:

$$\lambda_{x,z}^{(\xi) \text{ cor}} = \left| \Delta Q_{x,z}^{(\xi)} \right| / \xi_{x_0, z_0} = \frac{1}{4\pi} \left| \sum_k \beta_{x,z}^{(k)} e^{iM \frac{s_k}{R}} (m \Delta s)_k^{\text{cor}} \right|, \quad /31/$$

где  $\xi_{x_0, z_0}$  - амплитуды  $M$ -й гармоники орбиты,  $(m \Delta s)_k^{\text{cor}}$  - сила  $k$ -го корректора,  $R = L/2\pi$ ,  $s_k$  - координата  $k$ -го корректора.

После подстановки /6/, /20/, /21/ в /19/ для сдвигов частот во втором порядке получим

$$\Delta Q_{x,z}^{(f)} = \Delta Q_{x,z}^{(\xi^2)} + \Delta Q_{x,z}^{(s^2)} + \Delta Q_{x,z}^{(\delta^2)} + \Delta Q_{x,z}^{(s\delta)} + \Delta Q_{x,z}^{(\xi\delta)}, \quad /32/$$

индексы в скобках показывают источник сдвига частот, причем  $s^2$  означает влияние сагитты во втором порядке, а  $s\delta$  - совместное воздействие сагитты и отклонения импульса от равновесного. Заметим, что в /32/ отсутствует член вида  $\Delta Q_{x,z}^{(s\xi)}$ , равный нулю, поскольку принимается во внимание только нулевая гармоника квадратичных нелинейностей диполей.

Для сдвигов частот в дипольных магнитах из /19/ следует:

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x^{(\xi^2)} \\ \Delta Q_z^{(\xi^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x_0}^2 \\ \xi_{z_0}^2 \end{pmatrix} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right)^2 + \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x_0}^2 \\ \xi_{z_0}^2 \end{pmatrix} \left( \frac{\overline{\Delta \tilde{B}}}{B} \right)^2 + \begin{pmatrix} g_x \\ g_z \end{pmatrix} \xi_{x_0} \xi_{z_0} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right) \left( \frac{\overline{\Delta \tilde{B}}}{B} \right), \quad /33a/$$

где коэффициенты  $c$ ,  $d$  и  $g$  /с соответствующими индексами/ являются постоянными структуры ускорителя, а  $\xi_{x_0}$ ,  $\xi_{z_0}$  - амплитуды в /20/;

$$\Delta Q_{x,z}^{(s^2)} = \bar{\lambda}_{x,z}^{(s^2)} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right)^2 + \tilde{\lambda}_{x,z}^{(s^2)} \left( \frac{\overline{\Delta \tilde{B}}}{B} \right)^2, \quad /33б/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(\delta^2)} = \left[ \bar{\lambda}_{x,z}^{(\delta^2)} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right)^2 + \tilde{\lambda}_{x,z}^{(\delta^2)} \left( \frac{\overline{\Delta \tilde{B}}}{B} \right)^2 \right] \cdot \delta^2, \quad /33в/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(s\delta)} = \left[ \bar{\lambda}_{x,z}^{(s\delta)} \left( \frac{\overline{\Delta B}}{B} \right)^2 + \tilde{\lambda}_{x,z}^{(s\delta)} \left( \frac{\overline{\Delta \tilde{B}}}{B} \right)^2 \right] \cdot \delta, \quad /33г/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(\xi\delta)} = 0.$$

Для сдвигов частот на корректорах хроматичности получим

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x^{(\xi^2) \text{ cor}} \\ \Delta Q_z^{(\xi^2) \text{ cor}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx}^{\text{cor}} & c_{xz}^{\text{cor}} \\ c_{zx}^{\text{cor}} & c_{zz}^{\text{cor}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x0}^2 \\ \xi_{z0}^2 \end{pmatrix}, \quad /34a/$$

причем в отличие от /33a/ коэффициенты в /34a/ зависят также и от фаз M-й гармоники /20/ -  $\alpha_{x,z}$ :

$$\begin{pmatrix} c_{xx}^{\text{cor}} & c_{xz}^{\text{cor}} \\ c_{zx}^{\text{cor}} & c_{zz}^{\text{cor}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx}^{(0)} + c_{xz}^{(0)} \\ c_{zx}^{(0)} + c_{zz}^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{xx}^{(2)} \cos(2\alpha_x - \Omega_x) & c_{xz}^{(2)} \cos(2\alpha_z - \Omega_z) \\ c_{zx}^{(2)} \cos(2\alpha_x - \Phi_x) & c_{zz}^{(2)} \cos(2\alpha_z - \Phi_z) \end{pmatrix}, \quad /34б/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(\delta^2) \text{ cor}} = \lambda_{x,z}^{(\delta^2) \text{ cor}} \cdot \delta^2, \quad /34в/$$

$$\Delta Q_{x,z}^{(\xi\delta) \text{ cor}} = \lambda_{x,z}^{(\xi\delta) \text{ cor}} \delta \xi_{x0,z0} \cos(\alpha_{x0,z0} - \gamma_{x,z}). \quad /34г/$$

Выражения для коэффициентов в /33a-г/ и /34a-г/ и фаз  $\Omega_{x,z}$ ,  $\Phi_{x,z}$  и  $\gamma_{x,z}$  приведены в приложении 2.

## 6. РАЗБРОС БЕТАТРОННЫХ ЧАСТОТ НУКЛОТРОНА

Для вычисления разбросов частот в нуклотроне, вызванных квадратичными нелинейностями магнитного поля, была написана программа расчета одно- и двукратных интегралов от известных структурных функций /8/. Интегрирование осуществлялось методом Симпсона, причем для секступольных корректоров использовалось приближение тонких линз, а каждый дипольный магнит разбивался на 4 равных интервала. Это обеспечило точность интегрирования не хуже  $2 \cdot 10^{-3}$ .

Нуклотрон имеет магнитную структуру, состоящую из 8 суперпериодов. Размещение магнитных элементов в суперпериоде и его структурные функции показаны на рис.2. Два корректора хроматичности /в каждом суперпериоде/ располагаются после первой Ф и перед последней D-линзами и имеют силы

$$(m\Delta s)_1 = 9,68 \cdot 10^{-5} \text{ 1/см}^2, \quad (m\Delta s)_2 = -5,53 \cdot 10^{-5} \text{ 1/см}^2. \quad /35/$$

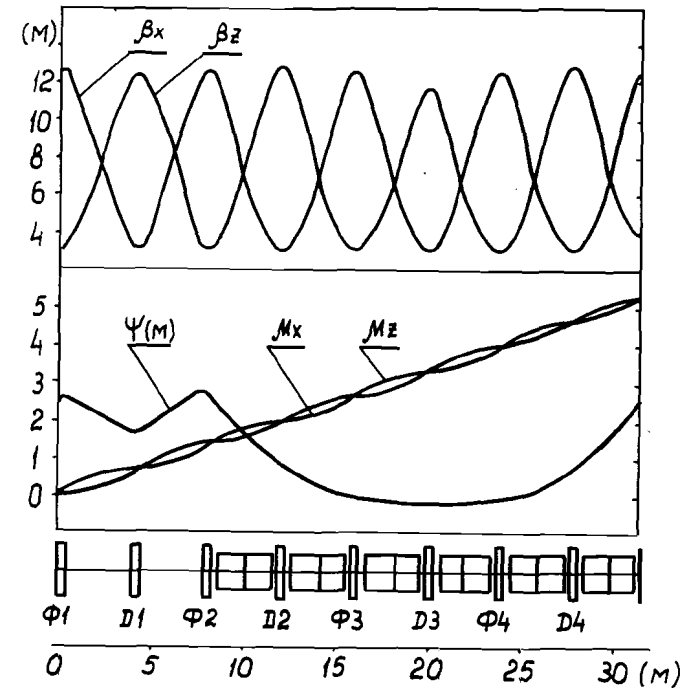


Рис.2. Функции магнитной структуры суперпериода нуклотрона.

Значения  $(m\Delta s)_1$  и  $(m\Delta s)_2$  находятся из условия компенсации естественной хроматичности структуры  $\chi_{x0} = -7,8$  и  $\chi_{z0} = -10,0$ . Расчет проводился для бетатронных частот  $Q_x = 6,8$  и  $Q_z = 6,85$  и с учетом только прямых нелинейностей. Радиус нормализации брался равным 4 см. Поскольку 8-я гармоника для нуклотрона является структурной, то в /20/  $M = 8$ .

В первом порядке получены следующие результаты.

1. Для дипольных магнитов:

а/ изменение хроматичности:

$$\Delta \chi_x = 2,47 \cdot 10^3 \left( \frac{\Delta \bar{B}}{\bar{B}} \right),$$

$$\Delta \chi_z = -2,27 \cdot 10^3 \left( \frac{\Delta \bar{B}}{\bar{B}} \right); \quad /36a/$$

б/ когерентный сдвиг частоты /для симметричной сагитты/:

$$\Delta Q_x^{(8)} = 8,30 \left( \frac{\Delta \bar{B}}{\bar{B}} \right), \quad y_1 = -1,178 \text{ см.}$$



$$\Delta Q_z^{(s)} = -8,32 \left( \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right), \quad \phi_i = 1,75^\circ. \quad /366/$$

2. Для корректоров хроматичности, с учетом /31/ при  $M = 8$ :

$$\Delta Q_x^{(\xi)} = 33 \cdot \xi_{x0} \cos(\alpha_x + 152^\circ) \cdot 10^{-3}, \quad /36в/$$

$$\Delta Q_z^{(\xi)} = 67 \cdot \xi_{z0} \cos(\alpha_z - 130^\circ) \cdot 10^{-3},$$

где  $\xi_{x0, z0}$  - в сантиметрах, а начало отсчета фаз  $\alpha_{x,z}$  здесь и далее ведется от первой Ф-линзы суперпериода /рис.2/. Из /36в/ следует, что сдвиги частот могут быть достаточно большими, даже если амплитуды 8-й гармоники искаженной орбиты сравнительно малы  $\sim 0,1$  см/.

Разброс частот во втором порядке.

1. Для дипольных магнитов:

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x^{(1)} \\ \Delta Q_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,100 & 0,022 \\ 0,022 & -0,088 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_z \end{pmatrix} \left( 10^3 \cdot \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad /37а/$$

$$\Delta Q_x^{(s^2)} = -26 \left( \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad \Delta Q_z^{(s^2)} = -13 \left( \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad /37б/$$

$$\Delta Q_x^{(\delta^2)} = -4,3 \delta^2 \left( 10^3 \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad \Delta Q_z^{(\delta^2)} = 96 \delta^2 \left( 10^3 \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad /37в/$$

$$\Delta Q_x^{(s\delta)} = -5,3 \cdot 10^{-3} \delta \left( 10^3 \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad \Delta Q_z^{(s\delta)} = 0,18 \delta \left( 10^3 \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad /37г/$$

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x^{(\xi^2)} \\ \Delta Q_z^{(\xi^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -188 & -1442 \\ -26 & 1282 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x0}^2 \\ \xi_{z0}^2 \end{pmatrix} \left( \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right)^2, \quad /37д/$$

где  $I_{x,z}$  и  $\xi_{x0, z0}$  - в сантиметрах.

2. Для корректоров хроматичности:

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x^{(1)} \\ \Delta Q_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,30 & 0,84 \\ 0,84 & 0,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_z \end{pmatrix}, \quad /38а/$$

$$\Delta Q_x^{(\delta^2)} = 143 \cdot \delta^2, \quad \Delta Q_z^{(\delta^2)} = 81 \delta^2, \quad /38б/$$

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x^{(\xi^2)} \\ \Delta Q_z^{(\xi^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,03 + 1,13 \cos 2\alpha_x & -7,67 + 7,12 \cos(2\alpha_z - 21^\circ) \\ 0,68 + 0,64 \cos(2\alpha_x + 55^\circ) & 8,54 + 7,87 \cos(2\alpha_z + 149^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{x0}^2 \\ \xi_{z0}^2 \end{pmatrix} 10^{-3}.$$

При  $\delta \leq 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\left( \frac{\Delta \bar{B}}{B} \right) \leq 10^{-3}$  и  $I_{x,z} = 2,2 \cdot 10^{-3}$  см основной вклад в разброс частот во 2-м порядке будут давать /37а/ и /38а/, связанные с величинами поперечных эмиттансов пучка.

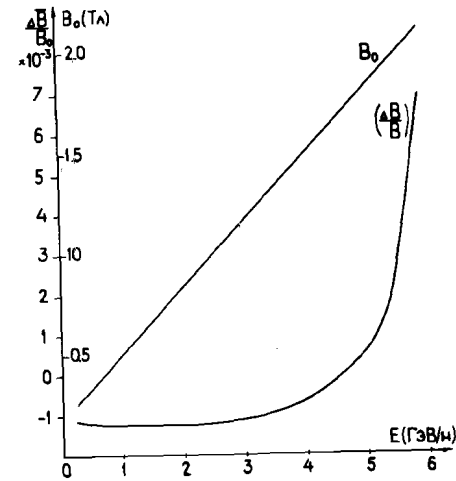
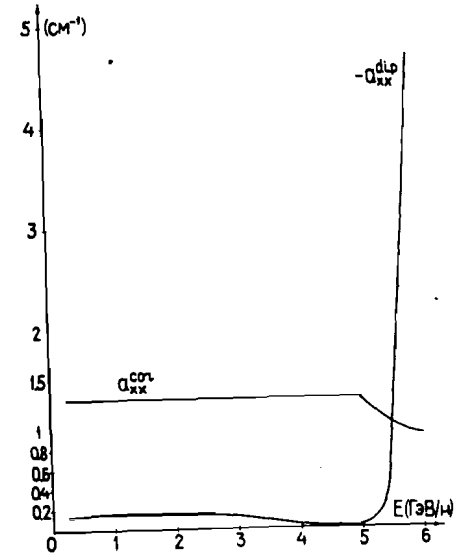


Рис.4. Амплитудная зависимость  $a_{xx} = (\partial Q_x / \partial I_x)$  частоты бетатронных колебаний нуклотрона, вызванная системой коррекции хроматичности ( $a_{xx}^{cor}$ ) и нелинейностями в диполях ( $a_{xx}^{dip}$ ) при  $Q_{x0} = 6,8$ ,  $Q_{z0} = 6,85$ .

Рис.3. Прямая секступольная нелинейность  $(\Delta \bar{B}/B)$  магнитного поля  $B_0$  в дипольных магнитах нуклотрона.



На рис.3 показана зависимость квадратичной систематической нелинейности в дипольных магнитах от энергии ускоряемых частиц /10/. При  $E \lesssim 5$  ГэВ/н разбросы частот, вносимые магнитами, на порядок меньше тех, которые происходят под воздействием корректоров хроматичности /рис.4/. Следует также отметить, что в этом случае значения разбросов во втором порядке составляют несколько процентов от величин первого порядка. Резкий рост нелинейности при  $V \gtrsim 1,94$  Тл ( $E \gtrsim 5,3$  ГэВ/н) является следствием эффекта насыщения железных полюсов магнитов. По этой же причине при  $V \gtrsim 1,83$  Тл начинают уменьшаться секступольные силы корректоров хроматичности /рис.3/. При  $V > 1,99$  ( $E > 5,5$  ГэВ/н) дипольные магниты становятся основным источником квадратичной нелинейности поля.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ разбросов бетатронных частот нуклотрона, вызванных квадратичными нелинейностями поля, показал, что в диапазоне энергий ускоряемых частиц вплоть до  $E = 5,3$  ГэВ/н система коррекции хроматичности является основным источником этих разбросов. При больших энергиях резко возрастает систематическая квадратичная нелинейность полей дипольных магнитов /10/, которая не может быть скорректирована из-за насыщения корректоров. При  $E \sim 6,0$  ГэВ/н движение частиц становится существенно нелинейным, а полученные выше формулы неверными. Исследование устойчивости такого движения должно проводиться либо с применением программ трассировки /11/, либо исходя из адекватных аналитических расчетов /12,13/.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

В уравнениях /14/ второго приближения необходимо выполнить следующий предельный переход:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds \int_0^s \Phi(s, \sigma) d\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{LN} \int_0^{LN} ds \int_0^s \Phi(s, \sigma) d\sigma, \quad /П1.1/$$

где  $L$  - периметр синхротрона,  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Меняя местами порядок интегрирования и предельного перехода, можно /П1.1/ переписать в виде:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NL} \int_0^L ds \sum_{n=0}^{N-1} \int_s^{s+L} d\sigma \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(s + nL, \sigma + mL) = \quad /П1.2/$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L ds \int_s^{s+L} d\sigma \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(s + nL, \sigma + mL) \right).$$

При вычислении предела двойной суммы в /П1.2/ необходимо воспользоваться условиями периодичности

$$\beta_{x,z}(s+L) = \beta_{x,z}(s), \quad m(s+L) = m(s), \quad /П1.3/$$

$$f_{x,z}(s+L) = f_{x,z}(s), \quad \tilde{m}(s+L) = \tilde{m}(s)$$

и следующими соотношениями:

$$\mu_{x,z}(s+Ln) = \mu_{x,z}(s) + 2\pi n Q_{x,z},$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin(a + 2qn) = \frac{\cos(a - q)}{2 \sin(q)} - \frac{\cos(a + (2N - 1)q)}{2 \sin(q)}, \quad /П1.4/$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(a + 2qn) = -\frac{\sin(a - q)}{2 \sin(q)} + \frac{\sin(a + (2N - 1)q)}{2 \sin(q)}.$$

Обозначим предел под интегралом в /П1.2/ через  $\bar{\Phi}(s, \sigma)$ :

$$\bar{\Phi}(s, \sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(s + nL, \sigma + mL) \right). \quad /П1.5/$$

Ненулевой вклад в  $\bar{\Phi}(s, \sigma)$  будут давать лишь те слагаемые в сумме по  $n$ , которые от  $n$  не зависят /и появляются в результате взятия суммы по  $m$ /.

Меняя порядок интегрирования, можно показать также, что

$$\int_0^L ds \int_s^{s+L} \bar{\Phi}(s, \sigma) d\sigma = \int_0^L ds \int_s^L (\bar{\Phi}(s, \sigma) + \bar{\Phi}(\sigma, s)) d\sigma, \quad /П1.6/$$

что упрощает окончательные выражения.

Дальнейшее упрощение, сокращающее время счета интегралов на ЭВМ, связано с суперпериодичностью синхротрона:

$$\Phi(s + L_s, \sigma) = \Phi(s, \sigma), \quad \Phi(s, \sigma + L_s) = \Phi(s, \sigma), \quad L_s = L/N_s,$$

где  $L_s$  и  $N_s$  - длина суперпериода и их число в ускорителе соответственно. В этом случае

$$\int_0^L ds \int_s^L d\sigma F(s, \sigma) \frac{\cos(\mu_\sigma - \mu_s - \pi Q_x)}{\sin \pi Q_x} = N_s \int_0^{L_s} ds \int_s^{L_s} d\sigma F(s, \sigma) \frac{\cos(\mu_\sigma - \mu_s - \frac{\pi Q_x}{N_s})}{\sin(\frac{\pi Q_x}{N_s})}$$

и аналогично для остальных слагаемых, содержащих резонансные знаменатели  $Q_z, 3Q_z, Q_x \pm 2Q_z, Q_z \pm 2Q_x$  и т.д. /см. приложение 2/.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ

Будем обозначать далее фигурными скобками следующий двойной интеграл:

$$\int_0^L ds \int_s^L d\sigma = \{ \dots \}.$$

### 1. Коэффициенты для $\Delta Q_{x,z}^{(1)}$ .

Для систематической нелинейности в дипольных магнитах:

$$a_{xx} = - \frac{K^2}{32\pi} \{ (\beta_{xs} \beta_{x\sigma})^{3/2} \cdot (3 \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} + \frac{\cos \Phi_{30}}{\sin 3\pi Q_x}) \},$$

$$a_{xz} = \frac{K^2}{16\pi} \{ \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \cdot ( \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} (\beta_{xs} \beta_{z\sigma} + \beta_{x\sigma} \beta_{zs}) -$$

/П2.1/

$$- \beta_{zs} \beta_{z\sigma} ( \frac{\cos \Phi_{12}}{\sin \pi(Q_x + 2Q_z)} - \frac{\cos \Phi_{1-2}}{\sin \pi(Q_x - 2Q_z)} ) \},$$

$$a_{zz} = - \frac{K^2}{32\pi} \{ \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma} \beta_{zs} \beta_{z\sigma}} (4 \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} + \frac{\cos \Phi_{12}}{\sin \pi(Q_x + 2Q_z)} + \frac{\cos \Phi_{1-2}}{\sin \pi(Q_x - 2Q_z)}) \},$$

$$b_{xx} = - \frac{K^2}{32\pi} \{ \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma} \beta_{xs} \beta_{x\sigma}} (4 \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} + \frac{\cos \Phi_{21}}{\sin \pi(Q_z + 2Q_x)} + \frac{\cos \Phi_{-21}}{\sin \pi(Q_z - 2Q_x)}) \},$$

$$b_{zz} = - \frac{K^2}{32\pi} \{ (\beta_{zs} \beta_{z\sigma})^{3/2} (3 \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} + \frac{\cos \Phi_{03}}{\sin 3\pi Q_z}) \},$$

/П2.2/

$$b_{xz} = \frac{K^2}{16\pi} \{ \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \cdot ( \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} (\beta_{xs} \beta_{z\sigma} + \beta_{x\sigma} \beta_{zs}) -$$

$$- \beta_{xs} \beta_{x\sigma} ( \frac{\cos \Phi_{21}}{\sin \pi(Q_z + 2Q_x)} - \frac{\cos \Phi_{-21}}{\sin \pi(Q_z - 2Q_x)} ) ) \},$$

$$\Phi_{10} = \mu_{x\sigma} - \mu_{xs} - \pi Q_x,$$

$$\Phi_{01} = \mu_{z\sigma} - \mu_{zs} - \pi Q_z,$$

$$\Phi_{20} = 2\Phi_{10},$$

$$\Phi_{02} = 2\Phi_{01},$$

$$\Phi_{30} = 3\Phi_{10},$$

$$\Phi_{03} = 3\Phi_{01}, \quad /П2.3/$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{10} + 2\Phi_{01},$$

$$\Phi_{1-2} = \Phi_{10} - 2\Phi_{01},$$

$$\Phi_{21} = 2\Phi_{10} + \Phi_{01},$$

$$\Phi_{-21} = -2\Phi_{10} + \Phi_{01},$$

$$\Phi_{11} = \Phi_{10} + \Phi_{01},$$

$$\Phi_{1-1} = \Phi_{10} - \Phi_{01},$$

$$K = 2/\rho r^2;$$

где  $\rho$  - радиус кривизны диполей,  $r$  - радиус нормализации нелинейностей в /13/, индексы  $s$  и  $\sigma$  обозначают переменную интегрирования. Коэффициенты в /П2.1-П2.2/ имеют размерность 1/см.

Выражения для  $a_{xx}^{cor}$ ,  $a_{xz}^{cor}$ ,  $a_{zz}^{cor}$  можно получить из /П2.1/, убрав множитель  $K^{2xx}$  и вводя под интегралы произведение сил корректоров  $(m_s m_\sigma)^{cor}$ .

2. Коэффициенты для  $\Delta Q_{x,z}^{(n)}$  и  $M$ -й гармоники искаженной орбиты. Для систематической нелинейности в диполях:

$$c_{xx} = -\frac{K^2}{16\pi} \left\{ \frac{(\beta_{xs} + \beta_{x\sigma})}{2} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} + \beta_{xs} \beta_{x\sigma} \frac{\cos \Phi_{20}}{\sin 2\pi Q_x} \cos M \frac{(s-\sigma)}{R} \right\},$$

$$c_{xz} = \frac{K^2}{16\pi} \left\{ \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \frac{(\beta_{xs} + \beta_{x\sigma})}{2} \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} - \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \cdot \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} - \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \cos M \frac{(s-\sigma)}{R} \right) \right\},$$

$$d_{xz} = \frac{K^2}{16\pi} \left\{ \frac{(\beta_{x\sigma} + \beta_{xs})}{2} \sqrt{\beta_{z\sigma} \beta_{zs}} \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} - \beta_{xs} \beta_{x\sigma} \frac{\cos \Phi_{20}}{\sin 2\pi Q_x} \cos M \frac{(s-\sigma)}{R} \right\},$$

$$d_{xx} = -\frac{K^2}{16\pi} \left\{ \frac{(\beta_{x\sigma} + \beta_{xs})}{2} \sqrt{\beta_{z\sigma} \beta_{zs}} \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma} \beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} - \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \cos M \frac{(s-\sigma)}{R} \right\}, \quad /П2.4/$$

$$g_x = -\frac{K^2}{16\pi} \left\{ (\beta_{xs} + \beta_{x\sigma}) \cdot \left( \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} - \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \frac{\cos \Phi_{20}}{\sin 2\pi Q_x} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} - \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \cos M \frac{(s-\sigma)}{R} \right\},$$

где  $R = L/2\pi$  - средний радиус ускорителя. Коэффициенты  $c_{zz}$ ,  $d_{zz}$ ,  $c_{zx}$ ,  $d_{zx}$ ,  $g_z$  находятся из /П2.5/ заменой:

$$c_{xx} \rightarrow d_{zz}, \quad d_{xx} \rightarrow c_{zz}, \quad c_{xz} \rightarrow d_{zx}, \quad d_{xz} \rightarrow c_{zx}, \quad g_x \rightarrow g_z$$

с одновременной перестановкой индексов в правых частях:  $x \leftrightarrow z$ .

Далее

$$\bar{\lambda}_x^{(s^2)} = -\frac{K^2}{16\pi} \left\{ \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( (\beta_{xs} X_s^2(\sigma) + \beta_{x\sigma} X_s^2(s)) \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} + \right. \right.$$

$$\left. + 2X_s(\sigma) X_s(s) \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \frac{\cos \Phi_{20}}{\sin 2\pi Q_x} \right\},$$

$$\tilde{\lambda}_x^{(s^2)} = -\frac{K^2}{16\pi} \left\{ \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} \left( (\beta_{xs} X_s^2(\sigma) + \beta_{x\sigma} X_s^2(s)) \frac{\cos \Phi_{01}}{\sin \pi Q_z} + \right. \right.$$

$$\left. + 2X_s(\sigma) X_s(s) \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} - \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \right\} + \pi/2.5a/$$

Величины  $\bar{\lambda}_z^{(s^2)}$  и  $\tilde{\lambda}_z^{(s^2)}$  можно получить из /П2.5а/ заменами:

$$\bar{\lambda}_x^{(s^2)} \rightarrow \tilde{\lambda}_z^{(s^2)}, \quad \tilde{\lambda}_x^{(s^2)} \rightarrow \bar{\lambda}_z^{(s^2)} \quad \text{и для индексов: } x \leftrightarrow z. \quad /П2.5б/$$

Формулы для  $\bar{\lambda}_{x,z}^{(\delta^2)}$  и  $\tilde{\lambda}_{x,z}^{(\delta^2)}$  аналогичны /П2.5а/, где вместо  $X_s$  в правых частях стоит  $\psi$ ; а для нахождения  $\bar{\lambda}_{x,z}^{(s\delta)}$  и  $\tilde{\lambda}_{x,z}^{(s\delta)}$  нужно заменить:

$$X_s^2 \rightarrow 2X_s \psi, \quad X_s(s) X_s(\sigma) \rightarrow X_s(s) \psi(\sigma) + X_s(\sigma) \psi(s)$$

и учесть также /П2.5б/.

Для системы коррекции хроматичности значения коэффициентов  $c_{xx}^{(0)} - c_{zz}^{(0)}$  и  $\lambda_{x,z}^{(\delta^2) \text{ cor}}$  получаются из соответствующих выражений для  $c_{xx} - c_{zz}$  и  $\lambda_{x,z}^{(\delta^2)}$  опусканием множителя  $K^2$  и введением под интегралы произведения  $(m_s m_\sigma)^{\text{cor}}$ .

Фазы  $\Omega_{x,z}$ ,  $\Phi_{x,z}$  и амплитуды во второй матрице из /34б/ равны амплитудам и фазам следующих комплексных выражений /соответственно/:

$$\hat{c}_{xx}^{(2)} = -\frac{1}{16\pi} \left\{ (m_s m_\sigma)^{\text{cor}} \left( \frac{1}{2} (\beta_{xs} e^{i2M\sigma/R} + \beta_{x\sigma} e^{i2Ms/R}) \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} + \right. \right.$$

$$+ \beta_{xs} \beta_{x\sigma} e^{iM(s+\sigma)/R} \frac{\cos \Phi_{20}}{\sin 2\pi Q_x} \},$$

$$\hat{c}_{xz}^{(2)} = \frac{1}{16\pi} \{ (m_s m_\sigma)^{\text{cor}} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \frac{1}{2} (\beta_{xs} e^{i2M\sigma/R} + \beta_{x\sigma} e^{i2Ms/R}) \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} - \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} e^{iM(s+\sigma)/R} \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} - \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \right) \},$$

$$\hat{c}_{zx}^{(2)} = \frac{1}{16\pi} \{ (m_s m_\sigma)^{\text{cor}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} (\beta_{zs} e^{i2M\sigma/R} + \beta_{z\sigma} e^{i2Ms/R}) \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} - \beta_{zs} \beta_{z\sigma} e^{iM(s+\sigma)/R} \frac{\cos \Phi_{02}}{\sin 2\pi Q_z} \right) \},$$

$$\hat{c}_{zz}^{(2)} = -\frac{1}{16\pi} \{ (m_s m_\sigma)^{\text{cor}} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \frac{1}{2} (\beta_{zs} e^{i2M\sigma/R} + \beta_{z\sigma} e^{i2Ms/R}) \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} + \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} e^{iM(s+\sigma)/R} \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} + \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \right) \}.$$

Фазы  $\gamma_{x,z}$  и амплитуды  $\lambda_{x,z}^{(\xi\delta)\text{cor}}$  в /34г/ находятся из комплексных чисел  $\hat{\lambda}_{x,z}^{(\xi\delta)\text{cor}}$ :

$$\hat{\lambda}_x^{(\xi\delta)\text{cor}} = \frac{1}{8\pi} \{ (m_s m_\sigma)^{\text{cor}} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} (\beta_{x\sigma} \psi_s e^{iMs/R} + \beta_{xs} \psi_\sigma e^{iM\sigma/R}) + \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} (\psi_s e^{iM\sigma/R} + \psi_\sigma e^{iMs/R}) \frac{\cos \Phi_{20}}{\sin 2\pi Q_x} \right) \},$$

$$\hat{\lambda}_z^{(\xi\delta)\text{cor}} = \frac{1}{8\pi} \{ (m_s m_\sigma)^{\text{cor}} \sqrt{\beta_{xs} \beta_{x\sigma}} \left( \frac{\cos \Phi_{10}}{\sin \pi Q_x} (\beta_{z\sigma} \psi_s e^{iMs/R} + \beta_{zs} \psi_\sigma e^{iM\sigma/R}) + \sqrt{\beta_{zs} \beta_{z\sigma}} (\psi_s e^{iM\sigma/R} + \psi_\sigma e^{iMs/R}) \left( \frac{\cos \Phi_{11}}{\sin \pi(Q_x + Q_z)} + \frac{\cos \Phi_{1-1}}{\sin \pi(Q_x - Q_z)} \right) \right) \}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балбеков В.И., Чирков П.Н. - Препринт ИФВЭ, 81-23, Серпухов, 1981.
2. Bengtsson J. - CERN 88-05, Geneva, 1988.
3. Delahaye J.-P., Jäger J. - Particle Accelerators, 1986, V18, p.183.
4. Динев Д.Х. - ОИЯИ, P9-82-504, Дубна, 1982.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. - Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
6. Лихтенберг А., Либерман М. - Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984, 81.
7. Коломенский А.А., Лебедев А.И. Теория циклических ускорителей. М.: GIFML, 1962, 330.
8. Василюшин Б.В. и др. - ОИЯИ, 9-86-512, Дубна, 1986.
9. King N.M., Cornacchia M. CERN LAB II-DI-PA/74-1, 1974, 10.
10. Борисовская З.В. и др. - ОИЯИ, 9-86-714, Дубна, 1984.
11. Iselin F.Ch. - In: Proc. of the Joint US-CERN School on Particle Accelerators, Santa Margherita di Pula, Sardinia, 31 January - 5 February, 1985, 472.
12. Guignard G. - CERN 88-04, Geneva, 1988, 17.
13. Warnock R.L., Ruth R.D. - Physica, 1987, 26D, 1.

Рукопись поступила в издательский отдел  
28 июня 1989 года.