сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9-88-286

Э.Л.Иванов, Э.А.Перельштейн

РАСЧЕТ ТРАНСПОРТИРОВКИ ПУЧКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С КВАДРУПОЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ МЕТОДОМ ПОГРУЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВО ФАЗОВЫХ МОМЕНТОВ

1988

Уравнения движения заряженной частицы с зарядом Ze и импульсом $\vec{p}$ в статическом магнитном поле $\vec{B}$, в декартовой системе координат имеют вид

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{ze}{m}(\dot{y}B_s - \dot{s}B_y),\\
\ddot{y} &= \frac{ze}{m}(\dot{s}B_x - \dot{x}B_s),\\
\ddot{s} &= \frac{ze}{m}(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени.

Переходя к независимой переменной s и учитывая, что

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = const, \; \sqrt{1+x'^2+y'^2} = 1 + \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + O(4),$$

$K = K(s) = \frac{ze}{p}\frac{dB_x}{dy} = \frac{ze}{p}\frac{dB_y}{dx}$, а также квадрупольную симметрию магнитного поля, мы получаем следующие уравнения с учетом нелинейности третьего порядка по фазовым координатам x, x', y, y':

$$
\begin{aligned}
& x'' + Kx - \frac{K''}{12}x(x^2+3y^2) + \frac{K}{2}x(3x'^2+y'^2) - K'xyy' - Kx'yy' = 0,\\
& y'' - Ky + \frac{K''}{12}y(y^2+3x^2) - \frac{K}{2}y(3y'^2+x'^2) + K'yxx' + Ky'xx' = 0.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (2) ищем аналитически методом погружения в пространство фазовых моментов /1,2/.

Определяем вектор $\vec{U} = \| x, x', y, y' \|$ в фазовом пространстве $\Phi(x, x', y, y')$, где x, x' и y, y' – фазовые координаты частицы.

Фазовым моментом $i_j + i_k$ порядка назовем величину $\vec{U}_j^{i_j} \vec{U}_k^{i_k}$,

где $i_j, i_k = 0, 1 \ldots\ldots\ldots, \quad j, k = 1, 2 \ldots\ldots\ldots N$.

Далее введем следующие векторы в пространстве фазовых моментов первого и третьего порядка:

$$\vec{Z}_1 = \begin{Vmatrix} x \\ x' \end{Vmatrix}, \quad \vec{Z}_2 = \begin{Vmatrix} x.x.x \\ x.x'.x \\ x.x'.x' \\ x'.x'.x' \end{Vmatrix}, \quad \vec{Z}_3 = \begin{Vmatrix} x.y.y \\ x.y.y' \\ x.y'.y' \\ x'.y.y \\ x'.y.y' \\ x'.y'.y' \end{Vmatrix}, \quad \vec{V}_3 = \begin{Vmatrix} y.x.x \\ y.x.x' \\ y.x'.x' \\ y'.x.x \\ y'.x.x' \\ y'.x'.x' \end{Vmatrix},$$

$$\vec{V}_1 = \begin{Vmatrix} y \\ y' \end{Vmatrix},$$

$$\vec{V}_2 = \begin{Vmatrix} y.y.y \\ y.y'.y \\ y.y'.y' \\ y'.y'.y' \end{Vmatrix}, \quad \vec{Z} = \begin{Vmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_2 \\ \vec{Z}_3 \end{Vmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{Vmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{Vmatrix}.$$

Тогда систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) приближенно можно записать как систему линейных дифференциальных уравнений в пространстве фазовых моментов первого и третьего порядка:

$$[\vec{Z}^i(s)]' = P^{ij}[\kappa(s)]\vec{Z}^j(s)\,;\; [\vec{V}^i(s)]' = P^{ij}[-\kappa(s)]\vec{V}^j(s), \qquad (3)$$

где матрица P^{ij} имеет блочный верхнедиагональный вид.

Для уравнений (2) элементы матрицы P^{ij} есть

$$P^{11} = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ -\kappa & 0 \end{Vmatrix}, \qquad P^{12} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa''}{12} & 0 & \frac{-3\kappa}{2} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$P^{13} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa''}{4} & \kappa' & \frac{-\kappa}{2} & 0 & \kappa & 0 \end{Vmatrix}, \qquad P^{22} = \begin{Vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0\;0 & 2 & 0 \\ 0 & -2\kappa & 0 & I \\ 0 & 0 & -3\kappa & 0 \end{Vmatrix},$$

$$P^{33} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 & I & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 2\kappa & 0 & 0 & 0 & I \\ -\kappa & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \kappa & 0 & I \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 2\kappa & 0 \end{Vmatrix}.$$

Чтобы получить элементы матрицы $P^{ij}[-\kappa(s)]$,нужно изменить на противоположный знак перед κ, κ' и κ'' в выражениях для $P^{ij}[\kappa(s)]$.

Введем матриданты уравнений (3) в двух плоскостях:

$$\vec{Z}^i(s) = H^{ij}(s/s_0)\vec{Z}^j(s_0)\,;\; \vec{V}^i(s) = V^{ij}(s/s_0)\vec{V}^j(s),$$

где векторы $\vec{Z}^j(s_0)$ и $\vec{V}^j(s_0)$ – векторы начальных условий.

Матриданты H^{11} и V^{11} линейных уравнений (4) есть

$$\vec{Z}^1(s) = H^{11}(s/s_0)\vec{Z}^1(s_0)\,;\; \vec{V}^1(s) = V^{11}(s/s_0)\vec{V}^1(s_0), \qquad (4)$$

$$H^{11}(s/s_0) = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin\varphi \\ -\sqrt{\kappa}\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \quad V^{11}(s/s_0) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\operatorname{sh}\varphi \\ \sqrt{\kappa}\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{Vmatrix},$$

где $\varphi = \sqrt{\kappa}\,(s - s_0)$.

Остальные элементы матриданта $H^{ij}(s/s_0)$ выражаются через элементы матриц H^{11} по формулам:

– для диагональных блоков

$$(H^{jj})_{\kappa\ell} = \sum_{\ell=1}^{j} (H^{11})_{\kappa_1 \ell_{i_1}} \ldots\ldots\ldots (H^{11})_{\kappa_j \ell_{i+j-1}}$$

в случае,если среди компонент мультииндекса ℓ есть различные,и

$$(H^{jj})_{\kappa\ell} = (H^{11})_{\kappa_1 \ell_i} \ldots\ldots\ldots\ldots (H^{11})_{\kappa_n \ell_i},$$

если все компоненты мультииндекса ℓ равны друг другу,

– для недиагональных блоков

$$H^{ij}(s/s_0) = \sum_{\ell=i+1}^{j} \int_{s_0}^{s} H^{ii}(s/\tau)\, P^{i\ell}(\tau)\, H^{\ell j}(\tau/s_0)\, d\tau .$$

По этим же формулам определяются и элементы матриданта $V^{ij}(s/s_0)$. Явный вид матридантов $H^{ij}(s/s_0)$ и $V^{ij}(s/s_0)$ дан в работе/3/,где описана и программа QUADRUPOL расчета динамики частиц в квадрупольной линзе с учетом аберрации третьего порядка.

Расчет велся по измеренной карте поля для линзы с градиентом ~200 Э/см,а градиент к определялся с помощью восьмиточечной лагранжевой интерполяции,в каждом сечении вдоль линзы,в точках x=0, y=0.Дальше по полученным значениям градиента четырехточечной интерполяции вычислялись градиент $\kappa = \kappa(s)$,а также первая и вторая его производная $\kappa'(s)$ и $\kappa''(s)$ для каждого шага вдоль линзы.

Начальные условия задавались генератором случайных чисел в эллипсе с полуосями X_{max}=10 мм и $X' = \frac{V_x}{V_s}$ =1000/(П.X_{max}).Аналогичным образом задавались и начальные условия в фазовой плоскости $(y, y' = \frac{V_y}{V_s})$.

На рис.1 и 2 показаны фазовые портреты пучка в плоскости (x,x') в середине и в конце линзы соответственно с учетом аберрации третьего порядка.

Из сравнения рисунка 3,где показано фазовое распределение пучка в той же плоскости без учета аберраций,с рисунком 2 видно, что влияние аберраций выражается в увеличении фазовой координаты $x' = \frac{V_x}{V_s}$ больше чем на 10% при сохранении симметрии распределения фазовой плотности и положения центра тяжести пучка.

Для фазовой плоскости $(y, y' = V_y/V_s)$,рис.4 и 5,хорошо видно характерное прогибание фазовой области,занимаемой пучком в результате аберраций третьего порядка.Кроме того,из сравнения рис.5 с рис.6, где показан фазовый портрет пучка в конце линзы без учета аберраций, видно,что это влияние выражается в уменьшении фазовой координаты y' на 37 % и увеличении y на 3,5 %,что существенно при трассировке пучка через длинные ионопроводы с большим количеством фокусирующих элементов.

Для оценки времени и точности расчета были проведены сравнительные расчеты с использованием программы QUADRUPOL и программы численного решения дифференциальных уравнений предикторно-корректорным методом HPCG /4/.

На рис.7 показана траектория (x - координата) заряженной частицы с зарядом Z=4,массовое число А=40 и энергия Е=0,1 МэВ вдоль линзы,полученной расчетным путем с помощью программ QUADRUPOL и HPCG .При этом обе программы работали с одной системой дифференциальных уравнений,а градиент к=к(s) и его производные по направлению движения определялись идентичным способом,описанным выше.Относи-

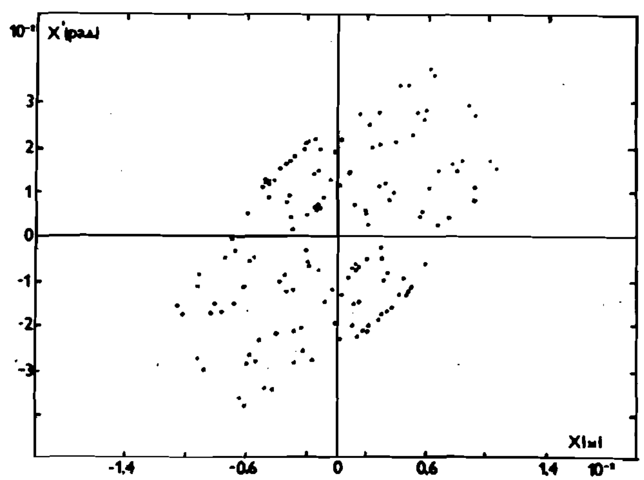

Рис.1.Фазовый портрет пучка в плоскости X,X' посредине линзы с учетом аберрации третьего порядка.

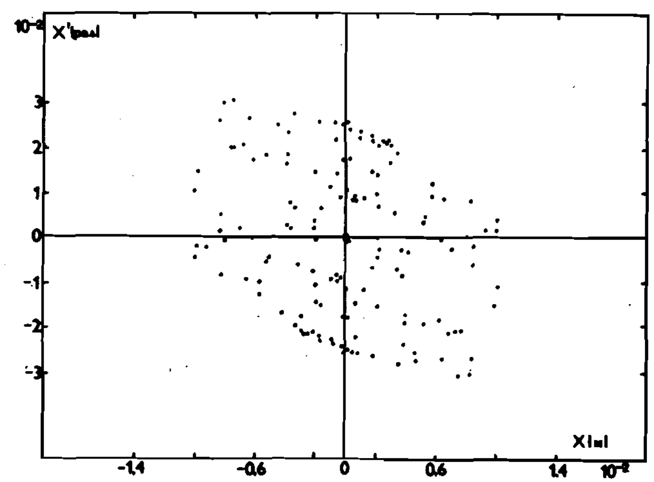

Рис.2.Фазовый портрет пучка в плоскости X,X' на конце линзы с учетом аберрации третьего порядка.

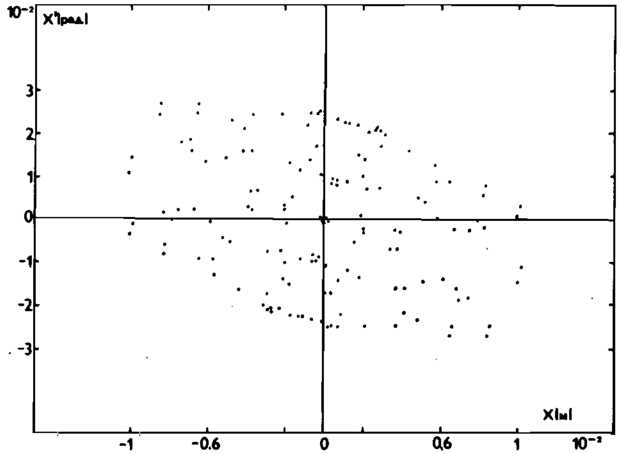

Рис.3.Фазовый портрет пучка в плоскости X,X' на конце линзы без учета аберрации.

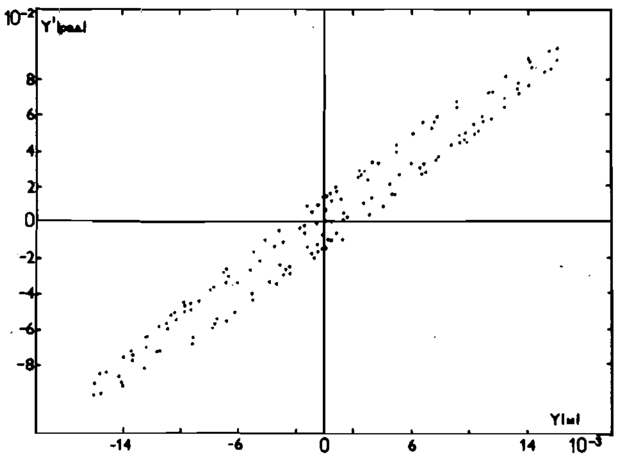

Рис.4.Фазовый портрет пучка в плоскости $У,У'$ посредине линзы с учетом аберрации третьего порядка.

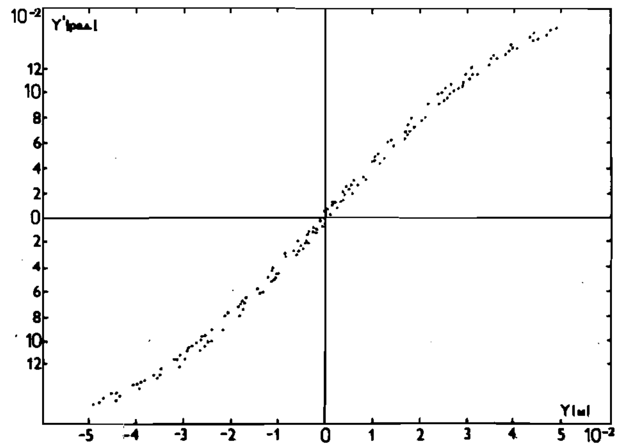

Рис.5.Фазовый портрет пучка в плоскости $У,У'$ на конце линзы с учетом аберрации третьего порядка.

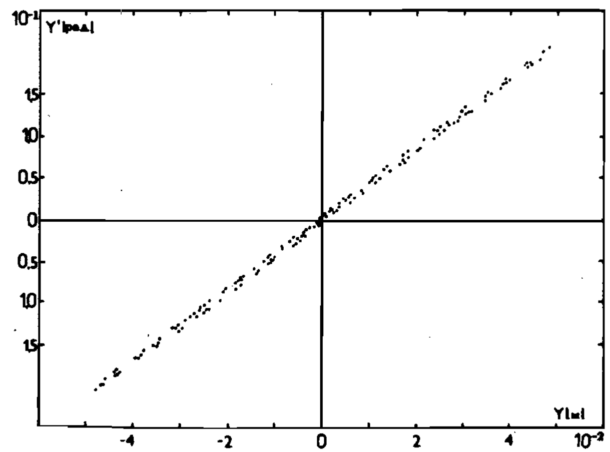

Рис.6.Фазовый портрет пучка в плоскости $У,У'$ на конце линзы без учета аберраций.

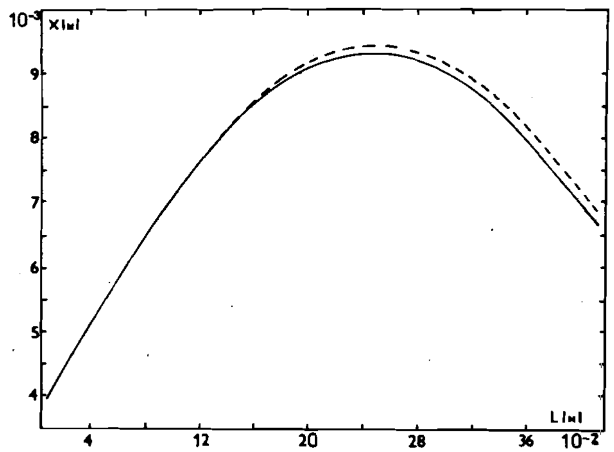

Рис.7.X – координата частицы по длине линзы:
- - - -расчет по програмже *HPCG* ,
——— -расчет по програмже *QUADRUPOL*.

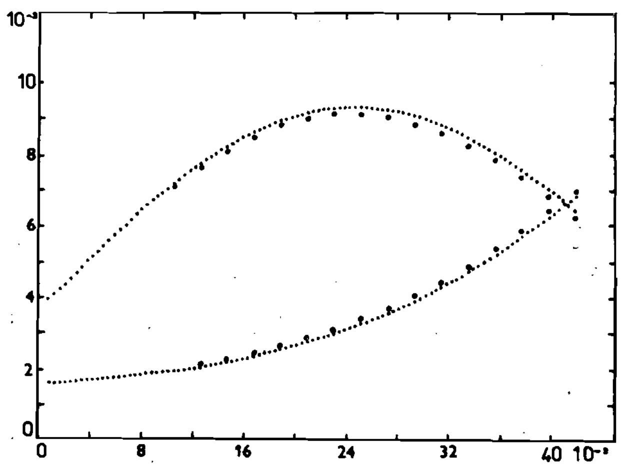

Рис.8.X- и У-координаты частицы по длине линзы:
. . . . -расчет по програмже *QUADRUPOL*, число шагов =I00,
• • • -расчет по програмже *QUADRUPOL*, число шагов =20.

тельная ошибка $\mathcal{E}$ в программе HPCG была задана: $\mathcal{E}$ =10^{-5},а время счета обеих программ было примерно одинаково и составляло 35 ÷ 40 с для расчета траектории одной частицы.

Из рис.7 видна разница в ходе траектории частицы,рассчитанной по программе HPCG и QUADRUPOL.Для локализации ошибки,следствием чего является эта разница в траектории,было сделано следующее.

С помощью программы QUADRUPOL была рассчитана траектория частицы для линейных уравнений (4)при заданных начальных условиях (x_0,x_0') и (y_0,y_0').Так как точное решение этой системы линейных уравнений известно,то мы получаем траекторию частицы без ошибки,вызванной приближенностью метода.Та же система уравнений решается численным методом с одинаковыми начальными условиями и идентичным определением градиента по карте поля с помощью программы HPCG .Сравнение полученных траекторий показывает,что 90 % разницы между траекториями на рис.7 вызвана ошибкой численного метода.Для уменьшения этой ошибки приходится уменьшать задаваемую относительную ошибку предикторно-корректорного метода,что в свою очередь увеличивает количество шагов по длине линзы,а это приводит к значительному нарастанию времени счета. В то же время уменьшение количества шагов в 5 раз(со I00 до 20)в программе QUADRUPOL приводит,как видно из рис.8,к ошибке значительно меньшей,чем при численном интегрировании уравнений движений с помощью программы HPCG,а это в свою очередь уменьшает времени счета программой QUADRUPOL в 4,5 раза.

Все расчеты велись на персональном компьютере "Правец – I6" с сопроцессором,и все приведенные выше времена счета относятся к этому компьютеру.

В заключение авторы хотят выразить благодарность В.Н.Мельникову и С.И.Козлову за предоставление данных магнитных измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дымников А.Д.- сб. В сб.: Программирование и методы решения физических задач. ОИЯИ, Дубна, 1978, с.300.
2. Андрианов С.Н.,Дымников А.Д.,Осетинский Г.М.- Б1-9-12851, ОИЯИ, Дубна,1979.
3. Иванов Э.Л.,Перельштейн Э.А. Б1,9-88-271,ОИЯИ,Дубна,1988.
4. Ralston,Runge Kutta Methods with Minimum Error Bounds,MTAG,Vol. 16,ISS.80,1962,P.431-437.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 апреля 1988 года.