

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

9-87-775

Н. Ю. Казаринов, В. И. Казача

**ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНОГО РАЗБРОСА
ОСЕЙ КАТУШЕК ВЕДУЩЕГО
МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЛУЭК-20
НА ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕЦ**

1987

Случайный разброс осей катушек, создающих магнитное поле, как в ЛУЭК-20, так и в других системах КУТИ-20, приводит к возникновению азимутально-несимметричных возмущений ведущего магнитного поля B_z . Такие возмущения возбуждают дипольные колебания электронно-ионного кольца, что может привести к разделению компонент и срыву процесса ускорения. В данной работе анализируется процесс возбуждения радиальных и аксиальных дипольных колебаний электронно-ионного кольца, связанных со случайным разбросом осей катушек ведущего магнитного поля в ЛУЭК-20 относительно оси системы и оцениваются амплитуды этих колебаний в зависимости от параметров колец и магнитной системы ускорителя.

1. Уравнения радиальных колебаний частиц в линейном по отклонениям координат от равновесных значений и возмущениям поля приближении в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{d^2 x_e}{dt^2} + \omega_0^2 (1-n) \cdot x_e + Q_{ei}^2 \cdot \omega_0^2 (x_e - \bar{x}_i) = \omega_0^2 \cdot r_0 \left(\frac{\Delta p}{p} - \frac{\tilde{B}_z}{B_{z_0}} \right) - \frac{e}{c} \frac{\dot{z}_0 \tilde{B}_\theta}{m \gamma},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot Q_{ie}^2 \cdot (x_i - \bar{x}_e) = 0, \quad //1/$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{e}{c} \cdot \frac{\dot{z}_0 \cdot \tilde{B}_r}{p}.$$

Здесь \dot{z}_0 - аксиальная скорость кольца как целого; знаком "..." обозначены возмущения магнитного поля; ω_0 - частота обращения электронов в кольце, r_0 - радиус кольца; e и m - заряд и масса электрона; $n = -\frac{r_0}{B_{z_0}} \cdot \frac{\partial B_{z_0}}{\partial r_0}$ - показатель спада магнитного поля;

Q_{ei} и Q_{ie} - частоты колебаний электронов в поле ионов и ионов в поле электронов, отнесенные к частоте обращения;

Δp - отклонение импульса электронов от равновесного значения p ; $x_{e,i} = r - r_0$ - отклонение радиуса электронов и ионов от равновесного радиуса кольца r_0 ; $\bar{x}_{e,i}$ - координаты локальных центров масс электронов и ионов, определяемые соотношениями:

$$\bar{x}_{e,i} = \frac{1}{N_{e,i}} \int x \cdot f_{e,i}(x, \dot{x}, \Delta p) dx \cdot d\dot{x} \cdot d(\Delta p). \quad /2/$$

Здесь $N_{e,i}$ - число частиц на единицу длины кольца, $f_{e,i}$ - функции распределения частиц каждого сорта.

Усредним /1/ с функциями распределения частиц. При этом координаты локальных центров масс электронов и ионов будут удовлетворять уравнениям /1/ с заменой $x_{e,i}$ на их средние значения /2/ и производной по времени на

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad /3/$$

Максимальная относительная скорость движения кольца как целого

$\beta_{z \max} = \frac{\dot{z}_0 \max}{c} = 0,2$. Это позволяет пренебречь влиянием компонентов поля $\tilde{B}_{r,\theta}$ и связью продольного и поперечного движения. В результате для изменения координат локальных центров масс получаем стандартные уравнения /1/:

$$\frac{d^2 \bar{x}_e}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot (1-n) \cdot \bar{x}_e + Q_{ei}^2 \cdot \omega_0^2 \cdot (\bar{x}_e - \bar{x}_i) = -\omega_0^2 \cdot r_0 \cdot \frac{\tilde{B}_z}{B_{z_0}}, \quad /4/$$

$$\frac{d^2 \bar{x}_i}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot Q_{ie}^2 \cdot (\bar{x}_i - \bar{x}_e) = 0.$$

Будем искать решение системы /4/ в виде:

$$\bar{x}_e = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 (\omega_{jm}^2 - Q_{ie}^2) \cdot a_{jm}(t) \cdot e^{i(m\theta - \omega_0 \omega_{jm} t)} \quad /5/$$

$$\bar{x}_i = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 Q_{ie}^2 \cdot a_{jm}(t) \cdot e^{i(m\theta - \omega_0 \omega_{jm} t)},$$

где частоты ω_{jm} удовлетворяют дисперсионному уравнению когерентных поперечных колебаний /1/:

$$D(\omega) = \{(\omega - m)^2 - \nu_r^2 - Q_{ei}^2\} (\omega^2 - Q_{ie}^2) - Q_{ei}^2 \cdot Q_{ie}^2 = 0; \quad /6/$$

здесь $\nu_r^2 = 1 - n$. Подставляя /5/ в /4/, получим систему для определения скоростей изменения амплитуд a_{jm} :

$$\sum_{j=1}^4 \omega_{jm}^2 \cdot a_{jm} \cdot e^{-i\omega_0 \omega_{jm} t} = F_{\ell m} \quad (\ell = 1, 2, 3, 4), \quad /7/$$

где $F_{1m, 2m, 3m} = 0$; $F_{4m} = -i\omega_0 r_0 \frac{\tilde{B}_{zm}(r_0, z)}{B_{z_0}}$; \tilde{B}_{zm} - амплитуда

m -той азимутальной гармоники возмущения поля. Разрешая систему /7/ относительно \dot{a}_{jm} , получим:

$$\dot{a}_{jm} = \frac{F_{4m}}{D'(\omega_{jm})} \cdot e^{i\omega_0 \omega_{jm} t}. \quad /8/$$

Здесь D' означает производную уравнения /6/ по частоте. При решении учтено, что определитель системы /7/ и его соответствующие миноры являются определителями Вандермонда 4-го и 3-го порядков.

Как уже отмечалось выше, наибольшую опасность представляют колебания поляризации $p_r = \bar{x}_e - \bar{x}_i$, которая, согласно /5/, представляется в виде:

$$p_r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 \omega_{jm}^2 \cdot a_{jm}(t) \cdot e^{i(m\theta - \omega_0 \omega_{jm} t)}. \quad /9/$$

Поскольку решения /6/ удовлетворяют соотношению $\omega_{jm} = -\omega_{j(-m)}$, то для устойчивых ($\text{Im } \omega_{jm} = 0$) колебаний поляризации их действительные амплитуды a_{pjm} связаны с модулями комплексных амплитуд $|a_{jm}|$ следующим образом:

$$a_{pjm} = 2 \cdot \omega_{jm}^2 \cdot |a_{jm}|. \quad /10/$$

Разрешая /8/ и переходя к интегрированию по z , получим выражение для изменения амплитуд вынужденных дипольных колебаний:

$$a_{jm} = \frac{-i r_0}{\omega_{jm} \cdot D'(\omega_{jm})} \cdot \int_0^z k(z') \cdot \frac{\tilde{B}_{zm}(r_0, z')}{B_{z_0}} \cdot e^{i(k(z'') dz'')} \cdot dz'. \quad /11/$$

Здесь $k(z) = \frac{\omega_0 \cdot \omega_{jm}}{\beta_z(z) \cdot c}$. Далее используя стандартные предположе-

ния о том, что длина ускорения много больше длины корреляции и скорость электронно-ионного кольца несущественно меняется на длине корреляции, найдем уравнение для изменения усредненного по реализациям квадрата модуля амплитуды $\langle |a_{jm}|^2 \rangle$:

$$\frac{d\langle |a_{jm}|^2 \rangle}{dz} = \frac{2 \cdot r_0^2}{\omega_{jm}^2 \cdot |D'(\omega_{jm})|^2} \cdot k^2(z) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\langle \tilde{B}_{zm}(z) \cdot \tilde{B}_{zm}(z-v) \rangle}{B_{z_0}^2} \cos(kv) dv. \quad /12/$$

Для системы токовых витков с линейной азимутальной плотностью тока $I_\theta(z')$, каждый из которых смещен случайным образом от оси ускорителя на величину $\Delta(z')$, аксиальная индукция магнитного поля записывается в виде /3/:

$$B_z(z, \theta, r_0) = \frac{2R}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(z-z')} \cdot |k| \cdot I_\theta(z') \cdot K_1(|k|R) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \times \\ \times I_m(|k|r_0) \cdot I_m^*|k| \cdot \Delta(z') \cdot e^{im(\theta-a)} \cdot dk \cdot dz'. \quad /13/$$

Здесь R - радиус витка, a - азимут центра витка. Как видно из /13/, амплитуда m -й азимутальной гармоники поля пропорциональна Δ^m . Поэтому наибольшую опасность представляет первая гармоника, которую и будем рассматривать в дальнейшем, опуская индекс m во всех последующих выражениях. Подставляя /13/ в /12/, проводя интегрирование /с использованием /10//, получаем следующее выражение для роста амплитуды радиальных дипольных колебаний поляризации для каждой из частот ω_j :

$$\Delta p_{rj}(z) = \frac{2\omega_j^2}{D'(\omega_j)} \cdot \frac{\Delta}{L} \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot r_0 \cdot B_{z_0} (1+\xi) \cdot k_0 \cdot R}{E_{z_0} \cdot (1-f) \cdot k(z)R}} \cdot \int x \sin^2 \frac{xL}{2R} \cdot K_1^2(x) I_1^2(x \frac{r_0}{R}) dx \quad /14/ \\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь λ - период структуры магнитного поля, L - аксиальный размер катушек, E_{z_0} - напряженность ускоряющего электрического поля, ξ - фактор загрузки, f - коэффициент нейтрализации, Δ - величина среднеквадратичного разброса осей катушек, k_0 - начальное значение волнового числа, $I_1(x)$ и $K_1(x)$ - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно.

Проводя аналогичные вычисления, получим выражение для изменения амплитуды аксиальных дипольных колебаний поляризации:

$$\Delta p_{zj}(z) = \frac{2 \cdot \tilde{\omega}_j \cdot \Delta}{D'(\tilde{\omega}_j) \cdot L} \left[\frac{\lambda \cdot r_0 \cdot B_{z_0} (1+\xi) \cdot k_0 \cdot R}{E_{z_0} (1-f)} \cdot \int_{k(z)R} x \sin^2 \frac{xL}{2R} \cdot K_1^2(x) I_1^2(x \frac{r_0}{R}) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{I_0(x \frac{r_0}{R})}{I_1(x \frac{r_0}{R})} - \frac{1}{(\frac{x r_0}{R})} \right]^2 dx \right]^{1/2}, \quad /15/$$

где частоты $\tilde{\omega}_j$ удовлетворяют дисперсионному уравнению /6/ с заменой ν_r^2 на $\nu_z^2 = n$.

2. Для численных оценок возьмем параметры магнитной структуры ЛУЭК-20 и электронно-ионных колец, приведенные в /4/:

$$a = 0,2 \text{ см}; r_0 = 4 \text{ см}; R = 9,1 \text{ см}; \lambda = 2,5 \text{ см}; Q_{ei}^2 = 0,3; \\ Q_{ie}^2 = 6,3 \cdot 10^{-3}, n = 0. \quad /16/$$

Тогда рассчитанные согласно /6/ значения частот радиальных колебаний ω_j :

$$\omega_1 = 0,034; \omega_2 = 0,174; \omega_3 = 2,14 \text{ и } \omega_4 = 0. \quad /17/$$

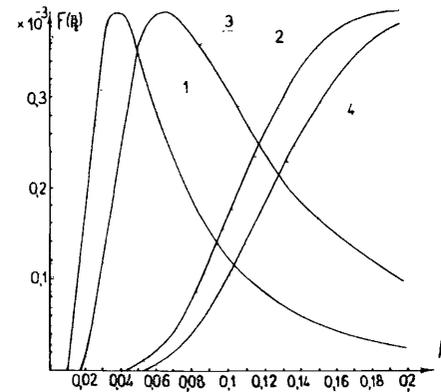


Рис. 1.

Рост амплитуды колебаний поляризации при $\omega_4 = 0$ равен нулю. Амплитуда вынужденных колебаний на частоте ω_3 практически равна нулю, поскольку спектральная плотность шума на данной частоте пренебрежимо мала.

На рис. 1 представлены рассчитанные зависимости спектров Фурье $F(\beta_z)$ корреляционной функции шумов /для радиальных колебаний/:

$$F(\beta_z) = x(\beta_z) \sin^2 \left[\frac{x(\beta_z) \cdot L}{2R} \right] \cdot K_1^2[x(\beta_z)] \cdot I_1^2 \left[x(\beta_z) \frac{r_0}{R} \right], \quad /18/$$

в диапазоне $0 \leq \beta_z \leq 0,2$. Кривая /1/ рассчитана для ω_1 , кривая /2/ - для ω_2 . Как видно из рис. 1, рост амплитуды радиальных дипольных колебаний носит "резонансный" характер, т.е. проис-

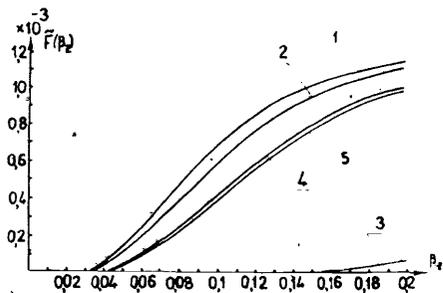


Рис. 2.

ходит в ограниченном интервале скоростей кольца аналогично рассматривавшемуся в ^{4/} резонансу колебаний поляризации на азимутально-симметричных периодических возмущениях ведущего магнитного поля.

Для минимальной частоты ω_1 , связанной с возбуждением колебаний ионов, "резонансные" значения скорости $\beta_z \approx 0,04 \pm 0,02$;

они представляют наибольшую опасность для ускорения колец на начальном этапе /ускорение в спадающем магнитном поле солениоидов/. Для частоты ω_2 /колебания электронов/ "резонансный" интервал скоростей $\beta_z \approx 0,19 \pm 0,05$; их раскачка происходит, в основном, при ускорении кольца в ЛУЭК-20. Оценки с использованием ^{14/} показывают, что для 1-й очереди ЛУЭК-20 ^{5/} $0,066 \leq \beta_z \leq 0,12$ величины амплитуд возбуждаемых радиальных дипольных колебаний равны

$$\Delta p_{r1} \approx 0,36 \cdot \Delta \text{ и } \Delta p_{r2} \approx 1,66 \cdot \Delta.$$

Рассчитанные значения частот аксиальных колебаний $\tilde{\omega}_j$ равны:

$$\tilde{\omega}_1 = 0,092; \tilde{\omega}_2 = 0,1; \tilde{\omega}_3 = 0,44; \tilde{\omega}_4 = 1,55. \quad /19/$$

Так же, как и для радиальных колебаний, амплитуда вынужденных колебаний на максимальной частоте $\tilde{\omega}_4$ практически равна нулю. На рис. 2 показаны рассчитанные зависимости спектров Фурье $F(\beta_z)$ корреляционной функции шумов для аксиальных колебаний:

$$\bar{F}(\beta_z) = F(\beta_z) \cdot \left[\frac{I_0(x \frac{r_0}{R})}{I_1(x \frac{r_0}{R})} - \frac{1}{(x \frac{r_0}{R})} \right]^2. \quad /20/$$

Кривая 1 рассчитана для $\tilde{\omega}_1$, 2 - для $\tilde{\omega}_2$ и 3 - для $\tilde{\omega}_3$. Как видно из рис. 2, "резонансные" значения скоростей для частот $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ в рассматриваемом интервале β_z еще не достигнуты. Оценки с использованием ^{15/} показывают, что для 1-й очереди ЛУЭК-20 величины амплитуд возбуждаемых аксиальных колебаний равны

$$\Delta p_{z1} \approx 1,24 \cdot \Delta; \Delta p_{z2} \approx 1,39 \cdot \Delta \text{ и } \Delta p_{z3} \approx 0,69 \cdot \Delta.$$

3. Полученные результаты показывают, что на величину среднеквадратичного случайного разброса осей катушек в ЛУЭК-20 Δ накладывается очень жесткое ограничение, поскольку предельное увеличение поляризации $\approx 0,2 \text{ мм}^2$. Для определения максимально возможной величины Δ были исследованы зависимости коэффициентов пропорциональности $\kappa_{r,z}$ между приростом амплитуд колебаний поляризации $\Delta p_{r,z,j}$ и Δ , задаваемых соотношениями ^{14,15/}, от параметров электронно-ионных колец и системы формирования магнитного поля ускорителя. На рис. 3 показаны рассчитанные значения κ_r и κ_z как функции радиуса кольца r_0 при условии, что фактор загрузки ξ постоянен ($N_i / \gamma = \text{const}$). Это соответствует неизменному набору энергии частиц. На рис. 3а эти зависи-

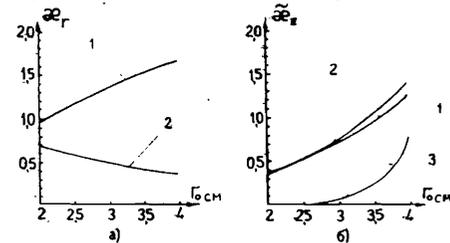


Рис. 3.

мости даны для радиальных колебаний /частота ω_1 - кривая 2, ω_2 - 1/. Графики на рис. 3б построены для аксиальных колебаний /частота $\tilde{\omega}_1$ - кривая 1, $\tilde{\omega}_2$ - 2, $\tilde{\omega}_3$ - 3/. Таким образом, при уменьшении радиуса кольца максимальное значение радиальной поляризации Δp_r ($\Delta p_r = \Delta p_{r1} + \Delta p_{r2}$) изменяется незначительно /рис. 3а/. Это связано с уменьшением спектральной плотности шума в диапазоне изменения частоты ω_2 и ее увеличением в диапазоне изменения частоты ω_1 , что иллюстрируется графиками на рис. 1. Здесь изображены рассчитанные при указанных условиях зависимости $F(\beta_z)$ для $r_0 = 2 \text{ см}$: кривая 3 соответствует частоте ω_1 и 4 - ω_2 .

Максимальное значение аксиальной поляризации Δp_z , ($\Delta p_z = \Delta p_{z1} + \Delta p_{z2} + \Delta p_{z3}$) уменьшается более существенно /рис. 3б/, поскольку спектральная плотность шума уменьшается для всех частот аксиальных колебаний. Это видно из рис. 2, где даны графики $\bar{F}(\beta_z)$ для случая $r_0 = 2 \text{ см}$ /кривая 4 - $\tilde{\omega}_1$ 5 - $\tilde{\omega}_2$ /.

Увеличение среднего радиуса катушек, формирующих ведущее магнитное поле, приводит к уменьшению амплитуд вынужденных когерентных колебаний обратно пропорционально квадрату радиуса ($\kappa_{r,z} \sim 1/R^2$).

На рис. 4 показаны рассчитанные зависимости коэффициентов κ_r от фактора загрузки ξ для частот ω_2 /кривая 1/ и ω_1 /кривая 2/, а на рис. 5 - зависимости коэффициентов κ_z от ξ для частот $\tilde{\omega}_{1,2,3}$ /кривые 1, 2, 3/ при $r_0 = 4 \text{ см}$. Отметим, что максимальное значение ξ определяется достижением границы области устойчивости аксиальных дипольных колебаний. Как видно из графиков, увеличение ξ дает положительный эффект для возбуждаемых

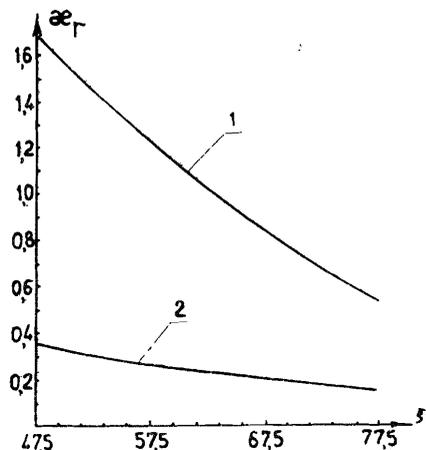


Рис. 4.

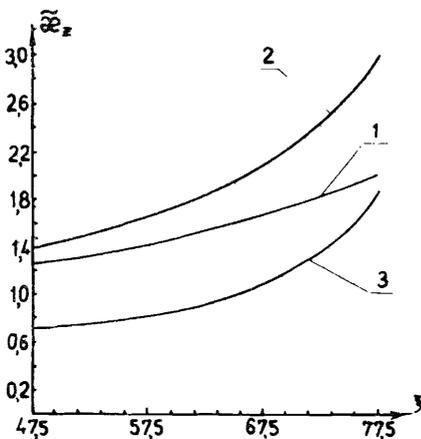


Рис. 5.

радиальных дипольных колебаний, но одновременно отрицательный для аксиальных. При уменьшении радиуса кольца r_0 диапазон изменения ξ резко уменьшается, так как при этом быстрее достигается граница области устойчивости аксиальных дипольных колебаний.

Исходя из полученных зависимостей амплитуд когерентных колебаний, найдем максимальную величину среднеквадратичного разброса отклонений осей катушек Δ . Для оценок воспользуемся соотношением^{/6/}:

$$(p_{z_0} + \Delta p_z)^2 + \Delta p_r^2 = \left(\frac{1}{4} a_0^2\right), \quad /21/$$

где p_{z_0} - стационарное значение аксиальной поляризации кольца, возникающей при ускорении в электрическом поле, a_0 - размер малого сечения кольца. Вычисления по формуле /21/ дают величину $\Delta \approx 0,1$ мм для параметров электронно-ионных колец /16/.

Однако, учитывая возможную некогерентность колебаний электронов, связанную с большой нелинейностью сил, действующих на них со стороны накопленных ионов^{/7/}, можно предположить, так же как и в работе^{/2/}, что рассмотренные возмущения приведут к увеличению не поляризации, а размера малого сечения электронного кольца a , т.е.

$$a^2 = a_0^2 + \Delta p^2. \quad /22/$$

Рост размеров электронного кольца ограничен величиной $\Delta a \approx 0,5$ мм^{/2/}. Оценка, согласно /22/, дает допустимую величину среднеквадратичного разброса осей катушек ведущего магнитного поля в первой очереди ЛУЭК-20 $\Delta \approx 0,5$ мм.

Уменьшение радиуса кольца до $r_0 = 2$ см /при $\xi = \text{const}$ / приводит к ослаблению допуска в ~ 2 раза.

При увеличении среднего радиуса катушек R /без изменения параметров колец/ максимальное значение Δ увеличивается $\sim R^2$.

Увеличение фактора загрузки ξ /при сохранении остальных параметров колец и ускорителя/ положительного эффекта не дает.

При ускорении в магнитной структуре ЛУЭК-20 электронно-ионного кольца, центр которого смещен на величину δ относительно оси ускорителя, также возможно возбуждение дипольных колебаний. Эти колебания обусловлены периодической зависимостью амплитуд первой азимутальной гармоники компонентов индукции магнитного поля $\vec{B}_{r1}, \vec{B}_{z1}$ от аксиальной координаты z . Однако оценки показывают, что при увеличении δ до 5 мм амплитуда возбуждаемых дипольных колебаний все еще остается много меньше предельно допустимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979.
2. Казаринов Н.Ю., Казаха В.И., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, 9-85-176, Дубна, 1985.
3. Казаринов Н.Ю., Казаха В.И. ОИЯИ, 9-87-24, Дубна, 1987.
4. Казаринов Н.Ю., Казаха В.И. ОИЯИ, 9-83-148, Дубна, 1983.
5. Александров В.С. и др. ОИЯИ, 9-86-157, Дубна, 1986.
6. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, 9-12441, Дубна, 1979.
7. Laslett L.J., LBL, ERAN-218, Berkeley, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1987 года.

Казаринов Н.Ю., Казача В.И.

9-87-775

Влияние случайного разброса осей катушек
ведущего магнитного поля в ЛУЭК-20 на движение
электронно-ионных колец

Анализируется процесс возбуждения радиальных и аксиальных дипольных колебаний в электронно-ионных кольцах, связанных со случайным разбросом осей катушек ведущего магнитного поля в ЛУЭК-20 относительно оси системы и исследуются зависимости амплитуд этих колебаний от параметров колец и магнитной системы ускорителя. Показано, что среднеквадратичный разброс осей катушек в ЛУЭК-20 не должен превышать $\sim 0,5$ мм. При смещении центра кольца относительно оси ускорителя на величину до ~ 5 мм амплитуда возбуждаемых дипольных колебаний остается много меньше предельно допустимой.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Kazarinov N.Yu., Kazacha V.I.

9-87-775

On the Influence of Random Spread Axes,
of Leading Magnetic Field Coils on
Electron-Ion Ring Motion

The excitation process of the radial and axial dipole oscillations in the electron-ion rings connected with random spread of axes of the leading magnetic field coils in LUEK-20 relatively to the system axis is analysed and amplitude dependence of this oscillations on the rings and accelerator magnetic system parameters are investigated. It is shown that mean square spread of the coils axes in LUEK-20 should not exceed the value of ~ 0.5 mm. For ring centre displacement relatively to the accelerator axis by 5 mm the amplitude of the excited dipole oscillations is much less than the maximum permissible one.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987