сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9-87-438

В.А.Михайлов, С.И.Ценов

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛОСЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СУММОВЫХ РЕЗОНАНСОВ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема нелинейных резонансов бетатронного движения занимает одно из центральных мест в теории циклических ускорителей. Известно, что нелинейные суммовые резонансы могут привести к одновременному неограниченному нарастанию амплитуд бетатронных колебаний, а разностные приводят к тому, что одна из амплитуд (горизонтальная или вертикальная) может стать заведомо больше другой.

Нелинейная резонансная система с M степенями свободы описывается гамильтонианом

$$H(\vec{I}, \vec{a}, \theta) = H_0(\vec{I}) + H_1(\vec{I}, \vec{a}, \theta), \tag{1.1}$$

где $\vec{I} = (I_1, ..., I_M)$, $\vec{a} = (a_1, ..., a_M)$ — переменные действие и угол соответственно, а θ — азимут (независимая угловая переменная по кольцу ускорителя), играющая роль времени. В (1.1) второй член в правой части есть периодическая функция от $\vec{a}$ и θ. Если ее представить в виде ряда Фурье по этим переменным, то получаются резонансные члены разных порядков. В этом ряду может присутствовать только один член; тогда говорят, что имеется изолированный резонанс. Во многих случаях на практике достаточно рассматривать изолированные нелинейные резонансы, так как предполагается, что в разложении H_1 в ряд Фурье все остальные члены много меньше резонансного, или описывают быстрые колебания и не вносят вклад в динамику резонанса.

Запишем резонансное условие в виде:

$$2p_1\nu_1 \pm 2p_2\nu_2 = m + \epsilon,$$

где ϵ — резонансная расстройка, $p_i = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ $(i = 1,2)$, m — гармоника возмущения магнитного поля, а ν_1 и ν_2 — частоты бетатронных колебаний в горизонтальной и вертикальной плоскости соответственно. Знак "+", как известно, соответствует суммовым резонансам, а знак " – " — разностным.

В работах [1-6] отправной точкой являются инварианты $A_1^{\pm}$ и $A_2^{\pm}$ (см. 2.8), из которых получается основная характеристика резонанса — ширина резонансной полосы. В своих работах [8-10] Онума указывает на некоторые недостатки в определенном в [5] понятии "ширина резонансной полосы" и предлагает способ устранения их на примере резонансов вида $n_1\nu_1 + n_2\nu_2 = m + \epsilon$ $(n_1 + n_2 \geq 3$ и n_1(или $n_2) = 1)$, не приводя конечного результата в виде, удобном для оценок.

В данной работе предпринята попытка определения ширины полосы изолированных, суммовых резонансов третьего и четвертого порядков методом эффективных потенциалов. В приложениях получены решения в эллиптических функциях для указанных резонансов и приведена схема расчета резонансов более высоких порядков.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно (см., например, /5/), для изолированного нелинейного резонанса порядка $N^* = 2p_1 + 2p_2$ гамильтониан можно представить в виде:

$$H_0(I_1, I_2) = \nu_1 I_1 + \nu_2 I_2 + H_s(I_1, I_2), \tag{2.1а}$$

$$H_1(I_1, I_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta) = F(I_1, I_2)\cos\phi(\alpha_1, \alpha_2, \theta), \tag{2.1б}$$

где

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = 2p_1\alpha_1 \pm 2p_2\alpha_2 - m\theta + \delta_F, \tag{2.2}$$

$H_s(I_1, I_2)$ — стабилизирующая резонанс часть гамильтониана, $F(I_1, I_2)$ — амплитуда, δ_F — фаза ведущего члена, а знаки "+" или "-" в (2.2) соответствуют суммовым или разностным резонансам.

При помощи производящей функции

$$F_2(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta) = (\alpha_1 + \epsilon_1\theta - \nu_1\theta)\tilde{I}_1 + (\alpha_2 \pm \epsilon_2\theta - \nu_2\theta)\tilde{I}_2$$

представим (2.1) в виде:

$$\tilde{H}_0(I_1, I_2) = \epsilon_1 I_1 \pm \epsilon_2 I_2 + H_s(I_1, I_2), \tag{2.3а}$$

$$\tilde{H}_1(I_1, I_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = F(I_1, I_2)\cos\tilde{\phi}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2), \tag{2.3б}$$

где $\epsilon_i = \dfrac{\epsilon}{4p_i}$ $(i = 1,2)$ и $\tilde{\phi}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = 2p_1\tilde{\alpha}_1 \pm 2p_2\tilde{\alpha}_2 + \delta_F$. В целях упрощения в дальнейшем знак "тильда" над новыми переменными будем опускать. Запишем уравнения Гамильтона для системы (2.3):

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{d\alpha_1}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \epsilon_1 + \frac{\partial H_s}{\partial I_1} + \frac{\partial F}{\partial I_1}\cos\phi, \tag{2.4а}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{d\alpha_2}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \pm\epsilon_2 + \frac{\partial H_s}{\partial I_2} + \frac{\partial F}{\partial I_2}\cos\phi, \tag{2.4б}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{dI_1}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = 2p_1 F(I_1, I_2)\sin\phi, \tag{2.4в}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{dI_2}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = \pm 2p_2 F(I_1, I_2)\sin\phi. \tag{2.4г}$$

Из (2.4в,г) сразу получается хорошо известный инвариант /5/:

$$\frac{I_1}{p_1} \mp \frac{I_2}{p_2} = C_\pm = \mathrm{const}. \tag{2.5}$$

Выражая $\cos\phi$ из (1.1) с учетом (2.3) и подставляя полученное выражение в (2.4а,б), найдем:

$$\dot{\alpha}_1 = \epsilon_1 + \frac{\partial H_s}{\partial I_1} + G_1(A_1^\pm - 2\epsilon_1 I_1 - H_s), \tag{2.6а}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \pm\epsilon_2 + \frac{\partial H_s}{\partial I_2} + G_2(A_2^\pm \mp 2\epsilon_2 I_2 - H_s), \tag{2.6б}$$

где

$$G_i(I_1, I_2) = \frac{1}{F(I_1, I_2)}\frac{\partial F}{\partial I_i}, \quad i = 1,2, \tag{2.7}$$

$$A_1^\pm = H + \frac{\epsilon C_\pm}{4}, \quad A_2^\pm = H - \frac{\epsilon C_\pm}{4}. \tag{2.8}$$

Дифференцируя уравнения (2.4в) и (2.4г) и используя все уравнения (2.4) и (2.3) для выражения $\cos\phi$, получим уравнения второго порядка для действий I_1 и I_2:

$$\ddot{I}_1 + 2p_1(H_s + 2\epsilon_1 I_1 - A_1^\pm)\left(\epsilon + 2p_1\frac{\partial H_s}{\partial I_1} \pm 2p_2\frac{\partial H_s}{\partial I_2}\right) = 2p_1 F\left(2p_1\frac{\partial F}{\partial I_1} \pm 2p_2\frac{\partial F}{\partial I_2}\right), \tag{2.9}$$

$$\ddot{I}_2 \pm 2p_2(H_s \pm 2\epsilon_2 I_2 - A_2^\pm)\left(\epsilon + 2p_1\frac{\partial H_s}{\partial I_1} \pm 2p_2\frac{\partial H_s}{\partial I_2}\right) = \pm 2p_2 F\left(2p_1\frac{\partial F}{\partial I_1} \pm 2p_2\frac{\partial F}{\partial I_2}\right). \tag{2.10}$$

Рассмотрим теперь частный случай резонанса без стабилизации:

$$H_s(I_1, I_2) = 0; \quad F(I_1, I_2) = D(2I_1)^{p_1}(2I_2)^{p_2}. \tag{2.11}$$

Уравнения (2.9) и (2.10) приобретают вид:

$$\ddot{I}_1 + \epsilon^2 I_1 = 2p_1 \epsilon A_1^{\pm} + 2p_1 D^2 (2I_1)^{2p_1-1}(2I_2)^{2p_2-1}[(2p_1)^2(2I_2) \pm (2p_2)^2(2I_1)], \tag{2.12}$$

$$\ddot{I}_2 + \epsilon^2 I_2 = 2p_2 \epsilon A_2^{\pm} \pm 2p_2 D^2 (2I_1)^{2p_1-1}(2I_2)^{2p_2-1}[(2p_1)^2(2I_2) \pm (2p_2)^2(2I_1)]. \tag{2.13}$$

Вводя новую независимую переменную $w = \epsilon\theta/\delta_2$, где

$$\delta_i = \epsilon(2D)^{-1}(2I_{i0})^{1-p_1-p_2} \quad (i = 1,2) \tag{2.14}$$

безразмерные параметры, $I_{i0} = I_i(\theta = 0)$, $(i = 1,2)$, и безразмерные амплитуды $\mathcal{J}_i = I_i I_{i0}^{-1}$ $(i = 1,2)$, выражение (2.6) можно записать в виде:

$$\dot{\alpha}_1 = \nu_{1R} = \epsilon_1 - \epsilon/2 + \Delta\nu_1^{\pm}/\mathcal{J}_1, \tag{2.15а}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \nu_{2R} = \pm\epsilon_2 \mp \epsilon/2 + \Delta\nu_2^{\pm}/\mathcal{J}_2. \tag{2.15б}$$

Величины $\Delta\nu_i^{\pm}$, имеющие смысл нелинейного сдвига частот в резонансе, даются выражениями:

$$\Delta\nu_1^{\pm} = p_1 A_1^{\pm}/I_{10} = \epsilon\tilde{\Delta\nu}_1^{\pm} = \epsilon(1/2 + p_1\delta^{p_2}\delta_1^{-1}\cos\phi_0), \tag{2.16а}$$

$$\Delta\nu_2^{\pm} = p_2 A_2^{\pm}/I_{20} = \epsilon\tilde{\Delta\nu}_2^{\pm} = \epsilon(\pm 1/2 + p_2\delta_2^{-1}\delta^{-p_1}\cos\phi_0), \tag{2.16б}$$

где δ — отношение между начальными амплитудами

$$\delta = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2-1}} = \frac{I_{20}}{I_{10}}, \tag{2.17}$$

а $\phi_0 = 2p_1\alpha_{10} \pm 2p_2\alpha_{20} + \delta_F$ — начальная фаза $(\alpha_{i0} = \alpha_i(\theta = 0),\ i = 1,2)$. Тогда уравнения (2.12) и (2.13) можно представить как

$$\mathcal{J}_1'' + \delta_2^2\mathcal{J}_1 = 2\delta_2^2\tilde{\Delta\nu}_1^{\pm} + p_1\left(\frac{\mathcal{J}_1}{\delta}\right)^{2p_1-1}\mathcal{J}_2^{2p_2-1}[(2p_1)^2\mathcal{J}_2\delta \pm (2p_2)^2\mathcal{J}_1], \tag{2.18}$$

$$\mathcal{J}_2'' + \delta_2^2\mathcal{J}_2 = \pm 2\delta_2^2\tilde{\Delta\nu}_2^{\pm} \pm p\left(\frac{\mathcal{J}_1}{\delta}\right)^{2p_1-1}\mathcal{J}_2^{2p_2-1}\left[(2p_1)^2\mathcal{J}_2 \pm (2p_2)\frac{\mathcal{J}_1}{\delta}\right], \tag{2.19}$$

где штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной w. Инварианты (2.5) приобретают вид:

$$\frac{\mathcal{J}_1}{p_1} \mp \frac{\delta}{p_2}\mathcal{J}_2 = \frac{\delta}{p_1}\delta_{p_1p_2}^{\pm}, \tag{2.20}$$

$$\delta_{p_1p_2}^{\pm} = \frac{1}{\delta} \mp \frac{p_1}{p_2}. \tag{2.21}$$

При помощи (2.20) переменные в уравнениях (2.18) и (2.19) разделяются, и в принципе могут быть решены. Это осуществляется сравнительно простым способом для случаев резонансов третьего и четвертого порядка; результаты представлены в приложении 1. Для случаев резонансов высшего порядка процедура решения уравнений (2.18) и (2.19) дана в приложении 2.

3. ШИРИНА РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛОС РЕЗОНАНСОВ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Запишем уравнения (2.4) и (2.13) в виде:

$$\mathcal{J}_1' = 2p_1\delta\mathcal{F}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)\sin\phi, \tag{3.1а}$$

$$\mathcal{J}_2' = \pm 2p_2\mathcal{F}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)\sin\phi, \tag{3.1б}$$

$$\mathcal{J}_2'' = -\delta_2^2\mathcal{J}_2 \pm 2\delta_2^2\tilde{\Delta\nu}_2^{\pm} \pm 2p_2\mathcal{F}\left(2p_1\delta\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathcal{J}_1} \pm 2p_2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathcal{J}_2}\right), \tag{3.1в}$$

где введено обозначение

$$\mathcal{F}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) = \left(\frac{\mathcal{J}_1}{\delta}\right)^{p_1}\mathcal{J}_2^{p_2}. \tag{3.2}$$

Систему уравнений (3.1) можно получить из эффективного гамильтониана

$$\mathcal{H}_e = \frac{p_0^2}{2} - \frac{(2p_2)^2}{2}\mathcal{F}^2(\mathcal{J}_2) + \frac{\delta_2^2\mathcal{J}_2^2}{2} \mp 2\delta_2^2\tilde{\Delta\nu}_2^{\pm}\mathcal{J}_2; \quad p_0 = \mathcal{J}_2' = \frac{\partial\mathcal{H}_e}{\partial p_0}. \tag{3.3}$$

В (3.3) $\mathcal{J}_1$ выражено через $\mathcal{J}_2$ с учетом (2.20). Из начальных условий легко получить следующее выражение:

$$\mathcal{H}_e = -2\delta_2^2(\tilde{\Delta\nu}_2^{\pm})^2 \le 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим сначала резонанс $\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$. При помощи преобразования

$$\mathcal{I}_2 = \frac{x}{3} + \frac{\delta_2^2 - 4\delta_{12}^+}{6} \tag{3.5}$$

гамильтониан (3.3) приобретает вид:

$$H_e = 9\mathcal{H}_e = \frac{p^2}{2} + V(x,a); \quad p = x' = \frac{\partial H_e}{\partial p}, \tag{3.6}$$

где потенциальная функция $V(x, a)$ есть:

$$V(x,a) = -\frac{x^3}{3} - ax; \quad a = 6\delta_2^2 \Delta\tilde{\nu}_2^+ - \frac{(\delta_2^2 - 4\delta_{12}^+)^2}{4}. \tag{3.7}$$

Известно, что потенциальная функция (3.7) представляет собой катастрофу складки /14/. Уравнение сепаратрисы в пространстве параметров есть $a = 0$. Система (3.6) структурно устойчива при $a < 0$ и неустойчива при $a > 0$. Условие $a < 0$, очевидно, является необходимым (физически это означает образование потенциальной ямы, в которой происходит финитное движение), но недостаточным условием устойчивости системы в целом. Так как в соответствии с (3.4) полная энергия $H_e \le 0$, достаточным условием является:

$$V(\sqrt{a}, a) > 0, \tag{3.8}$$

что с учетом (3.7) дает:

$$a > \frac{(\delta_2^2 - 4\delta_{12}^+)^2}{16}. \tag{3.9}$$

Органичиваясь только четвертой и второй степенями δ_2 в (3.9) и (2.14) $\delta_2 > 1$, получим:

$$|\epsilon| > 4\sqrt{2}\,D(2I_{10} + 7I_{20})^{1/2}. \tag{3.10}$$

Период колебаний финитного движения, определяемого (3.8), дается выражением:

$$T = \frac{\delta_2}{\epsilon}\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{2}[H_e - V(\xi,a)]^{1/2}} = \frac{\delta_2}{\epsilon}\left(\frac{6}{x_2 - x_0}\right)^{1/2} K(k), \tag{3.11}$$

где

$$x_0 = 3 + \frac{4\delta_{12}^+ - \delta_2^2}{2}, \tag{3.12а}$$

$$x_{1,2} = -\frac{x_0}{2} \mp \frac{1}{2}(-12a - 3x_0^2)^{1/2}, \tag{3.12б}$$

$$k = \left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right)^{1/2}. \tag{3.12в}$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода /13/. Амплитуда биений равна:

$$\mathrm{Amp}(\mathcal{I}_2) = \frac{x_1 - x_0}{6} = -\frac{x_0}{4} - \frac{1}{12}(-12a - 3x_0^2)^{1/2}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим резонанс четвертого порядка $\nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon$. Преобразование

$$\mathcal{I}_2 = \frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{3\delta_{13}^+}{4} \tag{3.14}$$

приводит (2.19) к виду:

$$x'' = x^3 + a_1 x + b_1, \tag{3.15}$$

где

$$a_1 = -\left(\delta_2^2 + \frac{81\delta_{13}^+}{8}\right); \quad b_1 = \sqrt{6}\left(\frac{81(\delta_{13}^+)^3}{16} + \frac{3\delta_2^2\delta_{13}^+}{4} + 2\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+\right). \tag{3.16}$$

Уравнение (3.15) может быть получено из потенциальной функции:

$$V(x, a_1, b_1) = -\frac{x^4}{4} - \frac{a_1}{2}x^2 - b_1 x. \tag{3.17}$$

Известно, что (3.17) представляет собой катастрофу сборки /14/. Уравнение сепаратрисы в пространстве управляющих параметров a_1, b_1 записывается в виде:

$$\Delta(a_1, b_1) = \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = 0 . \tag{3.18}$$

Условие структурной устойчивости (3.17) есть $\Delta < 0$. Тогда существуют две возможности:

а) $\delta_{13}^+ > 0$. Ограничиваясь четвертой и шестой степенями δ_2, из условия:

$$V(x_{01}, a_1, b_1) > 0 , \tag{3.19}$$

получим:

$$|\epsilon| > \frac{\sqrt{3}\,D}{2}(639 I_{10}^2 + 5622\, I_{20} I_{10} + 4967\, I_{20}^2)^{1/2} , \tag{3.10}$$

где x_{10} максимальный корень уравнения $x^3 + a_1 x + b_1 = 0$.

б) $\delta_{13}^+ = 0$. В этом случае имеем:

$$\delta_2^2 > [18\Delta\tilde{\nu}_2^+]^2 \tag{3.21}$$

или приближенно

$$|\epsilon| > 36 D I_{20} . \tag{3.20}$$

Так как рассмотрение резонанса $2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$ полностью аналогично только что проведенному, выпишем только конечный результат.

При $\delta_{22}^+ > 0$ имеем

$$|\epsilon| = 2D(119 I_{10}^2 + 770 I_{10} I_{20} + 839 I_{20}^2)^{1/2} , \tag{3.22}$$

а в случае $\delta_{22}^+ = 0$.

$$\delta_2^2 > 3[12\Delta\tilde{\nu}_2^+]^2 \tag{3.23}$$

или

$$|\epsilon| > 24\sqrt{3}\, D I_{20} . \tag{3.22}$$

В случае разностных резонансов легко показать, что всегда существует потенциальная яма, определяющая финитное движение. Это обусловлено специфической формой потенциала $V(x)$ для разностного резонанса.

Приведенный в данной работе метод исследования нелинейных резонансов связи, на наш взгляд, имеет следующие преимущества. Во-первых, непосредственно получаются явные выражения для I_1 и I_2, описывающие движение при произвольном ϵ. Во-вторых, при помощи элементарной теории катастроф непосредственно получаются области

в пространстве параметров резонанса (управляющих параметров), в которых движение устойчиво. Эти области и определяют ширину резонансной полосы.

Авторы выражают благодарность Н.Ю.Казаринову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Здесь мы приведем точные решения уравнений (2.18) и (2.19) для случаев суммовых резонансов третьего и четвертого порядка.

1. Резонанс $\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$. Уравнения (2.18) и (2.19) запишем в виде:

$$\mathcal{J}_1'' + \omega_1 \mathcal{J}_1 - \frac{6}{\delta}\mathcal{J}_1^2 - 2\delta\delta_{12}^{+2} - 2\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_1^+ = 0 , \tag{П1.1а}$$

$$\mathcal{J}_2'' + \omega_2 \mathcal{J}_2 - 3\mathcal{J}_2^2 - 2\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ = 0 , \tag{П1.1б}$$

$$\omega_1 = \delta_2^2 + 8\delta_{12}^+ , \quad \omega_2 = \delta_2^2 - 4\delta_{12}^+ . \tag{П1.1в}$$

Решение уравнения (П1.1б) в силу (2.24) есть

$$\mathcal{J}_2(w) = 2[\wp(w - w_0) + \frac{\omega_2}{12}] , \tag{П1.2}$$

а инварианты функции Вейерштрасса g_2 и g_3 имеют вид:

$$g_2 = \frac{\omega_2^2}{12} - 2\delta_2^2\tilde{\Delta}\nu_2^+ , \quad g_3 = \frac{\omega_2^3}{216} - \frac{\omega_2\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+}{6} - \frac{\eta_1}{4} , \tag{П1.3а}$$

$$\eta_1 = \omega_2 - 2 - 4\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ . \tag{П1.3б}$$

И, кроме того, w_0 — такая величина w, при которой $\mathcal{J}_2(0) = 1$. Из (П1.2) и (2.20) получаем

$$\mathcal{J}_1(w) = \delta[\wp(w - w_0) + \frac{\omega_2}{12} + \delta_{12}^+] . \tag{П1.4}$$

2. Резонанс $\nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon$. Уравнение (2.19) имеет вид

$$\mathcal{J}_2'' + \delta_2^2\mathcal{J}_2 - 6\mathcal{J}_2^3 - \frac{27\delta_{13}^+}{2}\mathcal{J}_2^2 - 2\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ = 0 . \tag{П1.5}$$

Введем

$$f_1(\mathcal{J}_2) = 3\mathcal{J}_2^4 + 9\delta_{13}^+\mathcal{J}_2^3 - \delta_2^2\mathcal{J}_2^2 + 4\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+\mathcal{J}_2 + \eta_2 , \tag{П1.6}$$

где

$$\eta_2 = \delta_2^2 - 9\delta_{13}^+ - 3 - 4\delta_2^2 \Delta\tilde{\nu}_2^+ . \tag{П1.7}$$

Пусть λ — простой корень уравнения $f_1(z) = 0$ (т.е. $f_1'(\lambda) \neq 0$). Тогда решение уравнения (П1.5) получаем в виде

$$\mathcal{J}_2(w) = \lambda + 6 f_1'(\lambda)\,[24 \wp(w - w_0) - f_1''(\lambda)]^{-1} . \tag{П1.8}$$

Инварианты функции Вейерштрасса суть

$$g_2 = 3\eta_2 - \frac{18\delta_2^2\delta_{13}^+\Delta\tilde{\nu}_2^+}{2} + \frac{\delta_2^4}{12}, \quad g_3 = \begin{vmatrix} 3 & \frac{9\delta_{13}^+}{4} & -\frac{\delta_2^2}{6} \\ \frac{9\delta_{13}^+}{4} & -\frac{\delta_2^2}{6} & \delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ \\ -\frac{\delta_2^2}{6} & \delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ & \eta_2 \end{vmatrix} \tag{П1.9}$$

Для амплитуды $\mathcal{J}_1(w)$ получаем:

$$\mathcal{J}_1(w) = \delta\{\delta_{13}^+ + \frac{1}{3}[\lambda + 6 f_1'(\lambda)[24\wp(w - w_0) - f_1''(\lambda)]^{-1}]\} . \tag{П1.10}$$

3. Резонанс $2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$. Уравнение (2.19) будет иметь вид:

$$\mathcal{J}_2'' + \omega\mathcal{J}_2 - 8\mathcal{J}_2^3 - 12\delta_{22}^+\mathcal{J}_2^2 - 2\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ = 0 , \tag{П1.11}$$

где

$$\omega = \delta_2^2 - 4\delta_{22}^{+2} . \tag{П1.12}$$

По аналогии с (П1.6) введем функцию

$$f_2(\mathcal{J}_2) = 4\mathcal{J}_2^4 + 8\delta_{22}^+\mathcal{J}_2^3 - \omega\mathcal{J}_2^2 + 4\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ + \eta_3 , \tag{П1.13}$$

где

$$\eta_3 = \omega - 8\delta_{22}^+ - 4 - 4\delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ . \tag{П1.14}$$

Пусть χ — снова простой корень уравнения $f_2(\mathcal{J}_2) = 0$. Тогда решение (П1.11) есть

$$\mathcal{J}_2(w) = \chi + 6 f_2'(\chi)\,[24\wp(w - w_0) - f_2''(\chi)]^{-1} . \tag{П1.15}$$

где инварианты функции Вейерштрасса

$$g_2 = 4\eta_3 - 8\delta_2^2\delta_{22}^+\Delta\tilde{\nu}_2^+ + \frac{\omega^2}{12}, \quad g_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2\delta_{22}^+ & -\frac{\omega}{6} \\ 2\delta_{22}^+ & -\frac{\omega}{6} & \delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ \\ -\frac{\omega}{6} & \delta_2^2\Delta\tilde{\nu}_2^+ & \eta_3 \end{vmatrix} \tag{П1.16}$$

Для амплитуды $\mathcal{J}_1(w)$ имеем

$$\mathcal{J}_1(w) = \delta[\delta_{22}^+ + \chi + 6 f_2'(\chi)\,[24\wp(w - w_0) - f_2''(\chi)]^{-1}] . \tag{П1.17}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим произвольный нелинейный резонанс вида $2p_1\nu_1 + 2p_2\nu_2 = m + \epsilon$ порядка $N^* = 2p_1 + 2p_2$. Очевидно, что каждое из уравнений (2.18) и (2.19) при помощи (2.20) можно записать в виде:

$$\mathcal{J}_i'' + \mathcal{P}_{N^*-1}^{(i)}(\mathcal{J}_i) = 0 , \quad i = 1,2 , \tag{П2.1}$$

где $\mathcal{P}_m^{(i)}(z_i)$ — полином степени m переменной z_i. Интегрируя (П2.1), имеем:

$$(\mathcal{J}_i')^2 + \mathcal{P}_{N^*}^{(i)}(\mathcal{J}_i) = 0 , \quad i = 1,2 . \tag{П2.2а}$$

В теории эллиптических функций существует следующая

Теорема [11]. Всякая эллиптическая функция $f(z)$ удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению

$$\mathcal{P}[f(z), f'(z)] = 0 , \tag{П2.2б}$$

где $\mathcal{P}(u, v)$ — многочлен относительно своих аргументов.

Из простых физических соображений можно предположить, что $\mathcal{J}_i(w)$ — эллиптические функции w. Это отражает тот факт, что движение квазипериодическое. В силу этого предположения и сравнения уравнений (П2.2а) и (П2.2б) мы видим, что $\mathcal{J}_i(w)$ действительно следует искать среди эллиптических функций. Отметим, что эллиптические функции — не единственное представление $\mathcal{J}_i(w)$, так как не каждое решение уравнения (П2.2б) является эллиптической функцией.

Всякая эллиптическая функция $\mathcal{J}_i(w)$ выражается в виде [12]:

$$\mathcal{J}_i(w) = R_{1i}[\wp(w)] + \wp'(w)\,R_{2i}[\wp(w)] , \tag{П2.3}$$

где $R_{1i}(u)$ и $R_{2i}(u)$ — рациональные функции своих аргументов, а $\wp(w)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса [13].

Коэффициенты, входящие в R_{1i} и R_{2i}, могут быть найдены следующим способом. Сначала находим $\mathcal{J}_i'(w)$ из (П2.3), используя следующее соотношение [13]:

$$[\wp'(w)]^2 = 4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3 , \qquad (П2.4а)$$

$$\wp''(w) = 6\wp^2(w) - \frac{g_2}{2} , \qquad (П2.4б)$$

где g_2 и g_3 — инварианты функции Вейерштрасса, потом полученные выражения для $\mathcal{J}_i(w)$ и $\mathcal{J}_i'(w)$ подставляются в (П2.2а) и сравниваются коэффициенты перед соответствующими степенями $\wp(w)$ и $\wp'(w)$. Уже для резонансов пятого порядка вычисления становятся довольно громоздкими. Их можно проводить на персональных компьютерах и получать всю необходимую информацию о решении (П2.3).

Отметим, что все сказанное выше остается в силе и для случая резонанса со стабилизирующими членами, так как $H_s(I_1, I_2)$ является суммой однородных многочленов по I_1 и I_2 степени не выше $N^*/2$ [5].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

В этом приложении исследуем одну важную характеристику нелинейного резонанса. В принятых здесь обозначениях роль времени исполняет азимут θ, так что "время" развития резонанса есть азимут, при котором амплитуда возрастает неограниченно для случая вырождения потенциала $V(x)$.

Рассмотрим (3.6) при $a = 0$. Решение уравнения Гамильтона имеет вид

$$\theta = -\frac{\delta_2}{\epsilon\sqrt[4]{3}}\left(\frac{3}{2|x_0|}\right)^{1/2} [F(\phi, k) + F(1, k)], \qquad (П3.1)$$

где

$$\phi = \frac{x/|x_0| + 1 - \sqrt{3}}{x/|x_0| + 1 + \sqrt{3}} , \quad k = \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} , \qquad (П3.2)$$

а x_0 по-прежнему дается выражением (3.12а). Время развития резонанса есть

$$\theta_\infty = \lim_{x\to\infty}\theta(x) = \frac{\delta_2}{|\epsilon|\sqrt[4]{3}}\left(\frac{6}{|x_0|}\right)^{1/2} F(1, k) . \qquad (П3.3)$$

Здесь $F(\phi, k)$ означает неполный эллиптический интеграл первого рода. Решение соответствующих уравнений (3.15) при $\Delta(a_1, b_1) = 0$ для резонанса $\nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon$ и для резонанса $2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$ записывается в виде

$$\theta = \frac{\delta_2}{\epsilon|x_0|} F\left(\phi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) , \quad \phi = \arccos\frac{|x_0|}{x} , \qquad (П3.4)$$

где

$$x_0 = \sqrt{6}\left(1 + \frac{3\delta_{13}^+}{4}\right), \quad \text{для} \quad \nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon , \qquad (П3.5а)$$

$$x_0 = \sqrt{2}(2 + \delta_{22}^+) , \quad \text{для} \quad 2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon . \qquad (П3.5б)$$

Аналогично (П3.3) найдем

$$\theta_\infty = \frac{\delta_2}{\epsilon|x_0|} K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \qquad (П3.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sturrock P.A. – Annals of Physics, 1958, 3, p.113.*
2. *Schoch A. CERN 57-21, 1958.*
3. *Hagedorn R. CERN 57-1, 1957.*
4. *Hagedorn R., Schoch A. CERN 57-14, 1957.*
5. *Guignard G. CERN 78-11, 1978.*
6. *Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. М.: ГИФМЛ, 1962.*
7. *Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.*
8. *Ohnuma S. Fermilab TM-507, 1974.*
9. *Ohnuma S. Fermilab TM-910, 1974.*
10. *Ohnuma S. Fermilab FN-329, 1980.*
11. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. Ч. I-II. М.: Наука, 1963.*
12. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.*
13. *Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.*
14. *Thom R. Structural Stability and Morphogenesis, "Reading" Massachusets, 1975.*

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1987 года.

Михайлов В.А., Ценов С.И. 9-87-438

К определению полосы нелинейных суммовых резонансов бетатронных колебаний

Предпринята попытка определения полосы изолированных суммовых резонансов третьего и четвертого порядков. С помощью уравнений Гамильтона и инвариантов движения получены выражения для эффективных потенциалов, которые исследовались с применением метода элементарной теории катастроф. В качестве конечного результата приведены формулы, позволяющие оценить ширину полосы любого суммового резонанса третьего и четвертого порядков. С помощью эллиптических функций получены решения уравнений Гамильтона для указанных резонансов и дана оценка времени их развития, приведена схема расчета резонансов более высоких порядков.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Mikhailov V.A., Tsenov S.I. 9-87-438

On Calculation of the Nonlinear Sum Resonance Bandwidth of Betatron Oscillations

An attempt has been made to calculate the bandwidths of isolated sum resonances of the third and fourth order. From Hamilton's equations and invariants of motion expressions for the effective potential are derived which are examined by the methods of elementary cathastrophe theory. The final result is expressed by the formulae giving the opportunity to evaluate the bandwidth of all sum resonances of the third and fourth order. Solutions of Hamilton's equations are obtained in the form of elliptic functions for the resonances mentioned, an estimate for the development time for the resonance is given. and a scheme for calculation of the resonances of higher order is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987