СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

9 - 8663

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков,
И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗНОСТНОГО РЕЗОНАНСА $2\nu_z - \nu_x = 1$ НА ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

1975

9 - 8663

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков,
И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗНОСТНОГО РЕЗОНАНСА $2\nu_z - \nu_x = 1$ НА ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

I. Основу теории бетатронных колебаний в циклических ускорителях составляет исследование систем нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Основной задачей теории является исследование устойчивости движения.

В последние годы большое внимание уделяется изучению нелинейных явлений, расчет которых часто представляет большие трудности, поскольку не существует достаточно общей теории нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами. Наличие нелинейных членов в уравнении приводит к появлению дополнительных "нелинейных" резонансов, которые будут наблюдаться при выполнении условия

$k_x \nu_x + k_z \nu_z + q = 0$, k_x, k_z, q – целые числа, где $(|k_x| + |k_z|)$ – порядок резонанса, ν_x и ν_z – частота бетатронных колебаний по степеням x и z.

Если посмотреть на диаграмму устойчивости любого конкретного ускорителя, то трудно выбрать рабочую точку вдали от резонансов, поскольку при достаточно больших k_x, k_z и q всегда найдется резонансная линия, проходящая вблизи этой точки.

В связи с этим становится актуальной задача исследования влияния различных нелинейных резонансов на движения частиц в циклических ускорителях. Этим вопросам посвящено большое количество работ /4-7/, достаточно полный список литературы можно найти в /I-3/.

В данной работе исследуется разностный резонанс третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$, который проходит достаточно близко от рабочей точки синхрофазотрона ОИЯИ. Исследование проводится методом Крылова-Боголюбова. Полученные в первом приближении уравнения непосредственно не интегрируются , поэтому исследование их мы проводим в специально выбранной фазовой плоскости. Путем преобразования исходной системы дифференциальных уравнений и используя первый интеграл, задачу удалось свести к системе второго порядка. Последнее позволило эффективно применить метод двумерной фазовой плоскости.

2. При изучении движения заряженных частиц в циклических ускорителях векторное уравнение (уравнение Ньютона-Лоренца) удобно записывать в цилиндрической системе координат /2/:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 = e(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta); \\ &\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = e(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z); \\ &\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = e(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r), \end{aligned} \tag{I}$$

где m и e - масса и заряд частицы, E_r , E_θ , E_z и B_r , B_θ, B_z -, соответственно, компоненты напряженности электрического и магнитного полей $\dot{r} = \frac{d}{dt}r$, $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$ и $\dot{z} = \frac{d}{dt}z$.

Ограничимся рассмотрением движения в отсутствие электрического поля, когда $E_r = 0$, $E_\theta = 0$, $E_z = 0$. Тогда $m = const$. Введя новую переменную $x = r - R_0$ (отклонение от идеальной орбиты) и исключив далее время как независимую переменную системы (I), можно перейти к системе нелинейных уравнений.

$$\begin{aligned} x'' + \nu_x^2 x &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i F_{ix}, \\ z'' + \nu_z^2 z &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i F_{iz}, \end{aligned} \tag{2}$$

где F_{ix} , F_{iz} - полиномы от x , x', z , z' , $\varepsilon = \frac{1}{R_0}$ - малый параметр, штрих означает дифференцирование по θ . Эта система в принципе позволяет исследовать любые нелинейные колебания в циклических ускорителях.

В данной работе система (2) исследуется методом Крылова-Боголюбова в первом приближении в окрестности резонанса $2\nu_z - \nu_x = 1 + \delta$, где $\delta \ll 1$.

Как следует из общей теории /8/, в первом приближении система (2) заменяется на

$$\begin{aligned} x'' + \nu_x^2 x &= \varepsilon F_{1x}, \\ z'' + \nu_z^2 z &= \varepsilon F_{1z}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\nu_x^2 = (1 - n_0)$, $\nu_z^2 = n_0$,

$$F_{1x} = \left[-1 + \frac{3}{2}n_0 - \frac{1}{2}n_0^2 + \frac{1}{2}R_0 n_1\right]x^2 + \left[\frac{1}{2}n_0^2 - \frac{1}{2}R_0 n_1\right]z^2 + \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(z')^2,$$

$$F_{1z} = \left[n_0^2 - n_0 - R_1 n_1\right]xz,$$

n_0 и n_1 - связаны с показателем магнитного поля

$$n(\theta, x) = n_0(\theta) + n_1(\theta)x + \frac{1}{2}\eta(\theta)x^2 + \cdots .$$

В общем случае $n_i(\theta)$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ - периодическая функция по θ. Для синхрофазотрона ОИЯИ обычно предполагают, что $n_0 = const$,

$$n_1(\theta) = n_{10} + \sum_{\beta=1}^{\infty} n_{1\beta}\sin\beta\theta .$$

Так как $2\nu_z - \nu_x = 1+\delta$, $\delta \ll 1$, то можно положить

$$(\nu_z)^2 = \left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)^2 + \varepsilon\cdot\Delta ,$$

где $\varepsilon\cdot\Delta$ представляет собой расстройку. После этого система (3) примет вид:

$$x'' + \nu_x^2 x = \varepsilon F_{1x} ,$$
$$z'' + \left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)^2 z = \varepsilon\left(F_{1z} - \Delta\cdot z\right). \qquad (4)$$

Сделаем в (4) замену переменных:

$$x = a_x \sin(\nu_x\theta + \psi_x), \qquad z = a_z \sin\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + \psi_z\right],$$
$$x' = \nu_x a_x \cos(\nu_x\theta + \psi_x), \qquad z' = \frac{1+\nu_x}{2} a_z \cos\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + \psi_z\right]. \qquad (5)$$

В новых переменных имеем:

$$a_x' = \frac{\varepsilon}{\nu_x}\tilde F_{1x}\cos(\nu_x\theta + \psi_x),$$
$$\psi_x' = -\frac{\varepsilon}{\nu_x a_x}\tilde F_{1x}\sin(\nu_x\theta + \psi_x),$$
$$a_z' = \frac{2\varepsilon}{1+\nu_x}\tilde F_{1z}\cos\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + \psi_z\right], \qquad (6)$$
$$\psi_z' = -\frac{2\varepsilon}{(1+\nu_x)a_z}\tilde F_{1z}\sin\left[\left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)\theta + \psi_z\right],$$

где $\tilde F_{1x}$ и $\tilde F_{1z}$ – получаются, соответственно, из F_{1x} и $(F_{1z} - \Delta z)$ – если в них x, x', z, z' заменить по формулам (5).

Дифференциальные уравнения, приведенные к виду (6), называют уравнениями в стандартной форме. Усредним систему (6) по методу Крылова-Боголюбова /8/. Усреднение ведется по θ. После усреднения имеем:

$$a_x' = \frac{\varepsilon}{\nu_x}\alpha\, a_z^2 \sin(\psi_x - 2\psi_z),$$
$$\psi_x' = \frac{\varepsilon}{\nu_x}\alpha\,\frac{a_z^2}{a_x}\cos(\psi_x - 2\psi_z),$$
$$a_z' = -\frac{4\varepsilon}{\nu_x+1}\alpha\, a_x a_z \sin(\psi_x - 2\psi_z), \qquad (7)$$
$$\psi_z' = \frac{2\varepsilon}{1+\nu_x}\left[\frac{\Delta}{2} + 2\alpha\, a_x\cos(\psi_x - 2\psi_z)\right],$$

где $\alpha = \frac{R_0}{16} n_{11}$.

Исследование систем типа (7) ведется обычно методом фазового пространства. В данном случае это будет 4-мерное пространство и даже после преодоления больших технических трудностей (например, определения характера особых точек) картина будет малонаглядной. Покажем, как можно исследовать систему (7) на некоторой фазовой плоскости. Для этого умножим последнее из уравнений (7) на -2 и сложим со вторым. Положим еще $\psi_x - 2\psi_z = \Phi$. Вместо (7) получим:

$$a_x' = \frac{\varepsilon}{\nu_x}\alpha\, a_z^2 \sin\Phi ,$$
$$a_z' = -\frac{\varepsilon}{1+\nu_x}4\alpha\, a_x a_z \sin\Phi , \qquad (8)$$
$$\Phi' = \varepsilon\left[-\frac{2\Delta}{1+\nu_x} + \alpha\left(\frac{1}{\nu_x}\frac{a_z^2}{a_x} - \frac{8}{1+\nu_x}a_x\right)\cos\Phi\right].$$

Если к системе (8) присоединить второе или четвертое уравнение системы (7), то они будут эквивалентны.

Из первых двух уравнений системы (8) получаем:

$$4\nu_x a_x^2 + (1+\nu_x)a_z^2 = const = H. \qquad (9)$$

Это первый интеграл для системы (8). Используя его, понизим порядок системы (8) на единицу.

Получаем:

$$a_x' = \frac{\varepsilon}{\nu_x}\alpha\left(\frac{H-4\nu_x a_x^2}{1+\nu_x}\right)\sin\Phi,$$
$$\Phi' = \varepsilon\left[-\frac{2\Delta}{1+\nu_x}+\alpha\left(\frac{H-12\nu_x a_x^2}{\nu_x(1+\nu_x)a_x}\right)\cos\Phi\right]. \qquad (10)$$

Введя в (10) новые переменные:

$$V = a_x \sin\Phi,$$
$$U = a_x \cos\Phi, \qquad (11)$$

получим:

$$V' = \frac{\varepsilon}{1+\nu_x}\left[\alpha\frac{H}{\nu_x}-2\Delta U-4\alpha(V^2+3U^2)\right],$$
$$U' = \frac{\varepsilon}{1+\nu_x}\left[2\Delta V+8\alpha V U\right]. \qquad (12)$$

Итак, мы свели исследование системы (7) к исследованию системы (12). При этом, как видно из способа преобразования, а точнее из (8), (9), (10) и (11) следует, что знание "картины" для системы (12) на фазовой плоскости (V , U) позволяет воссоздать картину в целом и для системы (7).

3. Займемся исследованием системы (12) на фазовой плоскости (V , U).

Из (9) следует, что $a_x^2 \le \frac{H}{4\nu_x}$. Отсюда и из (11) получаем, что

$$V^2 + U^2 \le \frac{H}{4\nu_x}. \qquad (13)$$

Значит, мы можем ограничиться исследованием системы (12) на той части плоскости (V , U), где выполняется (13).

Особыми точками системы (12) будут:

$$A_1 \quad \left(V_1=0,\ U_1=-\frac{\Delta}{12\alpha}+\sqrt{\left(\frac{\Delta}{12\alpha}\right)^2+\frac{H}{12\nu_x}}\right),$$
$$A_2 \quad \left(V_1=0,\ U_2=-\frac{\Delta}{12\alpha}-\sqrt{\left(\frac{\Delta}{12\alpha}\right)^2+\frac{H}{12\nu_x}}\right),$$
$$B_1 \quad \left(V_2=\sqrt{\frac{H}{4\nu_x}-\left(\frac{\Delta}{4\alpha}\right)^2},\ U_3=-\frac{\Delta}{4\alpha}\right), \qquad (14)$$
$$B_2 \quad \left(V_3=-\sqrt{\frac{H}{4\nu_x}-\left(\frac{\Delta}{4\alpha}\right)^2},\ U_3=-\frac{\Delta}{4\alpha}\right).$$

Непосредственная проверка показывает , что окружность

$$V^2+U^2=\frac{H}{4\nu_x}, \qquad (15)$$

а также прямая

$$U = -\frac{\Delta}{4\alpha} \qquad (16)$$

являются траекториями для (12) или решениями для

$$\frac{dU}{dV} = \frac{2\Delta V + 8\alpha V U}{\alpha\frac{H}{\nu_x}-2\Delta U-4\alpha\left[V^2+3U^2\right]}. \qquad (17)$$

Как видно из (14), V_2 и V_3 - координаты точек B_1 и B_2 имеют вид:

$$V_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{H}{4\nu_x}-\left(\frac{\Delta}{4\alpha}\right)^2}.$$

Для определенности рассмотрим положительную расстройку Δ , тогда $\frac{\Delta}{4\alpha} \geqslant 0$. Дальнейшие исследования разобъем на 3 случая:

I. $\frac{H}{4\nu_x} > \left(\frac{\Delta}{4\alpha}\right)^2$,

II. $\frac{H}{4\nu_x} < \left(\frac{\Delta}{4\alpha}\right)^2$,

III. $\frac{H}{4\nu_x} = \left(\frac{\Delta}{4\alpha}\right)^2$.

Рассмотрим I случай. Из теоремы Ляпунова /8/ следует, что особые точки B_1 и B_2 – сёдла. Непосредственная проверка показывает, что они лежат на пересечении окружности (I5) и прямой (I6), которые являются сепаратриссами для B_1 и B_2 . Кроме того, A_1 и A_2 лежат внутри круга, ограничиваемого окружностью (I5), по разные стороны от прямой (I6). Характеристические показатели (корни) для A_1 и A_2 будут чисто мнимыми и, следовательно, A_1 и A_2 – особые точки типа центр или фокус. Ниже будет показано, что проблема центр-фокус в нашем случае разрешима и что A_1 и A_2 – центры. Для системы (I2) получаем на фазовой плоскости (V , U) следующую картину (см.рис.I):

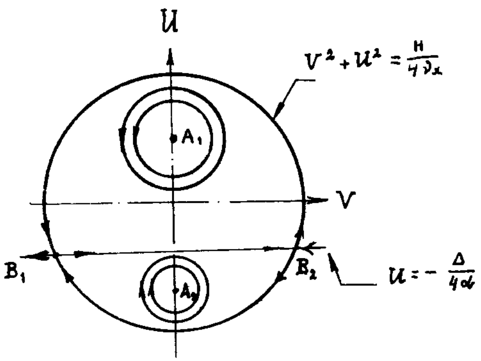

Рис.I.

Рассмотрим II случай. Как видно из (I4), точки B_1 и B_2 вообще не существуют. Кривые (I5) и (I6) не пересекаются и точка A_2 лежит вне круга, ограничиваемого окружностью (I5), а A_1 – внутри него. Точка A_1 будет (как и в I-м случае) типа центр или фокус. Ниже будет показано, что A_1 – центр. Фазовая плоскость (V , U) имеет вид (см.рис.2).

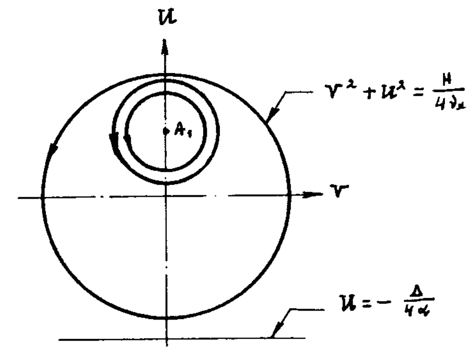

Рис.2.

Рассмотрим III случай. Точки B_1 , B_2 и A_2 совпадают, прямая (I6) касается окружности (I5) и точка $B_1=B_2=A_2$ – сложная особая точка. Можно показать опять, что точка A_1 – центр. Этот случай не характерен для системы (I2), так как он осуществляется с нулевой вероятностью. Фазовая плоскость (V , U) имеет вид (см.рис.3):

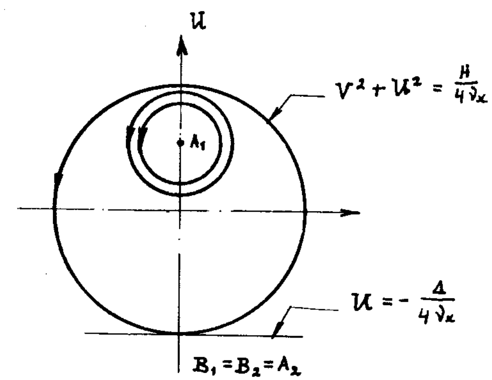

Рис.3.

4. Покажем, что A_1 и A_2-особые точки типа центр.

Если уравнение имеет вид:

$$\frac{dU}{dV} = -\frac{V + aV^2 + (2b+\alpha)VU + cU^2}{U + bV^2 + (2c+\beta)VU + gU^2}, \qquad (18)$$

то (см./9-II/) при выполнении по крайней мере одного из шести условий на a,в,c,α,β,g особая точка (0,0) для уравнений (18) будет центром. Теперь покажем, что уравнение (17) можно привести к виду (18).

Положим:
$$U = \tilde{U} + U_i$$
$$V = \tilde{V} \quad ,$$

где U_i - это U - координата точек A_1 и A_2. Тогда (17) перепишем так:

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{V}} = -\frac{\Delta + 4\alpha U_i}{\Delta + 12\alpha U_i} \cdot \frac{\tilde{V} + \frac{4\alpha}{\Delta + 4\alpha U_i}\tilde{V}\tilde{U}}{U + \frac{2\alpha}{\Delta + 12\alpha U_i}[\tilde{V}^2 + 3\tilde{U}^2]} . \qquad (19)$$

Для всех рассмотренных случаев (I,II,III) верно,что

$$\frac{\Delta + 4\alpha U_i}{\Delta + 12\alpha U_i} > 0 .$$

Поэтому можно положить:
$$P^2 = \frac{\Delta + 4\alpha U_i}{\Delta + 12\alpha U_i}$$
$$\hat{U} = PU$$

и
$$\hat{V} = \tilde{V} .$$

Тогда (19) примет вид:
$$\frac{d\hat{U}}{d\hat{V}} = -\frac{\hat{V} + \frac{4\alpha}{\Delta + 4\alpha U_i}\hat{V}\hat{U}}{\hat{U} + \frac{2\alpha}{\Delta + 12\alpha U_i}\frac{1}{P}[V^2 + 3P^2\hat{U}^2]} . \qquad (20)$$

Сравнивая (20) с (18), имеем

$$a = c = \beta = 0 .$$

Это последнее условие является достаточным условием /9-II/, чтобы A_1 и A_2 для уравнения (20) или (17) являлись особыми точками типа центр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из (9) следует, что амплитуды обоих видов колебаний a_x и a_z остаются в процессе движения ограниченными и резонанс не приводит к неустойчивости. Так как в (9) не входит явно расстройка Δ, то амплитуда остается конечной даже точно в резонансе. Кроме того, увеличение одной из амплитуд ведет к уменьшению другой, поэтому если, например, движение происходит по траекториям вокруг центра A_2 (см. рис.I), то можно подобрать такие параметры Δ, α, при которых всегда $a_x > a_z$. Если в начальный момент $z(\theta_0) = 0$ (т.е. $a_{z_0} = 0$), то движение все время остается в медианной плоскости, т.е. $z(\theta) = 0$. Если в начальный момент $x(\theta_0) = 0$, то $x(\theta) \not\equiv 0$, так как точка (0,0) не является особой для системы (12).

ЛИТЕРАТУРА

I. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М.,1962.

2. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, Москва, 1970.

3. Ускорители. Под редакцией Б.Н.Яблокова, Госатомиздат, М., 1962.

4. A.Schoch. CERN-Report, 57-21, Geneve, 1958.

5. R.Hagedorn, A.Schoch. CERN-Report, 57-14, GENEVE,1957.

6. M.Conte. JINR Preprint, E9-4925, Dubna, 1970; E9-6638, Dubna, 1972.

7. Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, В.А.Михайлов. 9-7498, Дубна,1973.

8. Н.Н.Боголюбов, Ю.А,Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. Изд-во Наука, 1974.

9. В.В.Немыцкий, В.В.Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, М., ГИТТЛ,1949.

10. М.Фроммер. УМН. вып.9, 1941.

11. Н.А.Сахарников. ПММ, 5, 669, 1948; 5, 513, 1950; 6, 651, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1975 г.