

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**9-86-503**

**Н.Ю.Казаринов, В.А.Михайлов**

**ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ  
МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА ПУЧКА  
ИЗ СИНХРОТРОНА**

**1986**

Для возбуждения радиальных бетатронных колебаний частиц, поступающих в отклоняющую систему, используется, как правило, резонанс третьего порядка  $3Q_x = m$ . Ниже приведен расчет резонансных условий и получены основные закономерности, позволяющие оценить эффективность и сделать выбор рабочих параметров системы вывода.

### 1. Расчет резонансных условий

При частоте бетатронных колебаний  $Q_x \approx m/3$  горизонтальное отклонение и угол частицы с импульсом  $p + \Delta p$  ( $\Delta p/p \ll 1$ ) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x &= (2I\beta_x)^{1/2} \cos(m\theta/3 + \chi_x + \Phi) + \Psi'(\Delta p/p); \\ x' &= -R(2I\beta_x)^{1/2} [d_x \cos(m\theta/3 + \chi_x + \Phi) + \sin(m\theta/3 + \chi_x + \Phi)] + \Psi'(\Delta p/p); \end{aligned} \quad (1)$$

здесь штрих - производная по азимуту  $\theta$ ;  $\beta_x$  и  $d_x$  - параметры Твисса,  $R$  - средний радиус ускорителя;  $\chi_x = \int_0^\theta d\theta/\beta_x - Q_x\theta$  - аргумент функции Флоке;  $\Psi$  - дисперсионная функция,  $m$  - номер резонансной гармоники секступольного возмущения.

В первом приближении метода усреднения медленно меняющиеся функции  $I(\theta)$  и  $\Phi(\theta)$  удовлетворяют уравнениям (см., например, <sup>1/1</sup>)

$$\begin{aligned} I' &= 3(2I)^{3/2} b_2 \sin(3\Phi - \gamma_2) + 3(2I)^{5/2} \sin(3\Phi - \gamma_4); \\ \Phi' &= \Delta Q + 4\alpha_3(2I) + 3(2I)^{1/2} b_2 \cos(3\Phi - \gamma_2) + 5(2I)^{3/2} \cos(3\Phi - \gamma_4). \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (2) входят следующие параметры. Линейный сдвиг частоты бетатронных колебаний равен

$$\Delta Q = Q_x - \frac{m}{3} + (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\Delta p}{p}. \quad (3)$$

Хроматические aberrации рассчитываются по формулам:

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j R}{4\pi B\rho} \int_0^{2\pi} \beta_x \psi^{j-1} \frac{\partial B_z}{\partial x^j} d\theta, \quad (4)$$

где  $B\rho$  - магнитная жесткость;  $B_z$  - вертикальная компонента магнитного поля;  $j = 1, 2$ . Коэффициент  $\alpha_3$  характеризует влияние октупольной нелинейности:

$$\alpha_3 = \frac{R}{128\pi B\rho} \int_0^{2\pi} \beta_x^2 \frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3} d\theta. \quad (5)$$

Амплитуды и фазы  $m$ -ых гармоник секступольного и декапольного возмущений определяются как

$$b_2 e^{i\gamma_2} = \frac{R}{48\pi B\rho} \int_0^{2\pi} \beta_x^{3/2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} e^{-i(m\theta + 3\gamma_x)} d\theta; \quad (6)$$

$$b_4 e^{i\gamma_4} = \frac{R}{768\pi B\rho} \int_0^{2\pi} \beta_x^{5/2} \frac{\partial^4 B_z}{\partial x^4} e^{-i(m\theta + 3\gamma_x)} d\theta. \quad (7)$$

Рассмотрим процесс медленного вывода частиц, ограничиваясь нелинейностями до второго порядка включительно ( $\alpha_3 = 0$ ;  $b_4 = 0$ ). Для получения основных соотношений целесообразно сделать следующую замену канонических переменных:

$$\begin{aligned} u &= -(2I)^{1/2} \sin(\Phi - \gamma_2/3); \\ v &= -(2I)^{1/2} \cos(\Phi - \gamma_2/3). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (I.2) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} u' &= \Delta Q v + 3b_2(u^2 - v^2); \\ v' &= -\Delta Q u - 6b_2 uv. \end{aligned} \quad (9)$$

Известно, что при  $\Delta Q \neq 0$  фазовая плоскость  $(u, v)$  разбивается на две области: устойчивую - внутри правильного треугольника и неустойчивую - вне его. Координаты вершин треугольника (особых точек типа "седло") равны

$$u_{1,2} = \frac{\Delta Q}{2\sqrt{3}b_2}; \quad v_{1,2} = \frac{\Delta Q}{6b_2}; \quad u_3 = 0; \quad v_3 = \frac{\Delta Q}{3b_2}. \quad (10)$$

При смещении частоты бетатронных колебаний к линии резонанса  $3Q_x = m$  площадь треугольника уменьшается и при равенстве ее эмиттансу  $\epsilon_x$  циркулирующего пучка начинается вывод частиц с данным импульсом. Значение сдвига частоты  $\Delta Q$ , соответствующее этому моменту, равно

$$\Delta Q_H = 2(\sqrt{3}\epsilon_x)^{1/2} b_2. \quad (II)$$

Дальнейшее адиабатическое уменьшение  $\Delta Q$  приводит к последовательному вытеснению частиц из области устойчивости и росту их амплитуд вплоть до попадания частиц в зазор выводного устройства. С хорошей степенью точности можно предположить  $^{1/3}$ , что окончание вывода имеет место при  $\Delta Q_K \approx 0$ .

Зависимость сдвига частоты от импульса (3) приводит к тому, что начало и конец вывода частиц с разными импульсами происходит при различных значениях  $Q_x$ , т.е. одновременно. Полный диапазон изменения частоты  $\Delta Q_B$  бетатронных колебаний за время вывода частиц в интервале импульсов  $|\Delta p/p| \leq (\Delta p/p)_{max}$  и необходимые для этого величины градиентов в квадрупольных линзах составляют

$$\Delta Q_B = \Delta Q_H + 2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{max} |\alpha_1 + \alpha_2| = \frac{R}{4\pi B\rho} \left| \int_0^{2\pi} \beta_x G d\theta \right|. \quad (12)$$

Мгновенный импульсный разброс выведенного пучка в соответствии с (3) и (II) определяется из неравенств:

$$\max \left\{ \begin{aligned} &(\Delta Q_H - Q_x + m/3)/(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &-(\Delta p/p)_{max} \end{aligned} \right\} \leq \frac{\Delta p}{p} \leq \min \left\{ \begin{aligned} &-(Q_x - m/3)/(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &(\Delta p/p)_{max} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

На рис. I показаны изменения фазового портрета (а) и импульсного разброса (б) пучка в процессе вывода.

Т.к. в дальнейшем нас будут интересовать частицы, попавшие в зазор выводного устройства, септум которого расположен на расстоянии  $u_c$  от орбиты частиц с импульсом  $p + \Delta p$ , проинтегрируем уравнения (9) вдоль прямой  $v = -\Delta Q/6b_2$  (рис. I). Прирост отклонения за три оборота от точки  $u = u_c$ , лежащей на этой прямой, равен

$$\Delta u_c = \frac{(u_c^2 - u_1^2)[\exp(36\pi b_2 u_1) - 1]}{u_c + u_1 - (u_c - u_1)\exp(36\pi b_2 u_1)}. \quad (14)$$

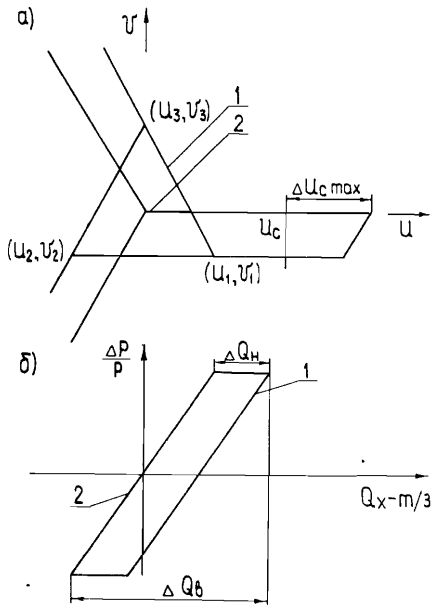


Рис. 1. Изменение фазового портрета (а) и импульсного разброса (б) пучка в процессе медленного вывода (прямые (1) соответствуют началу вывода частиц с данным импульсом, (2) - концу).

Минимальное значение  $\Delta u_c$  соответствует  $\Delta Q = \Delta Q_n$ , а максимальное -  $\Delta Q \rightarrow 0$ :

$$\Delta u_c = 18\pi\beta_2 u_c^2 / (1 - 18\pi\beta_2 u_c). \quad (15)$$

Переход от переменных  $u, v$  к координатам частицы  $x$  и  $x'$  осуществляется с помощью преобразований (1) и (8):

$$\begin{aligned} x &= \beta_x^{1/2} (u \sin \tau - v \cos \tau) + \Psi(\Delta p/p), \\ x' &= R\beta_x^{-1/2} [u(\cos \tau - d_x \sin \tau) + v(\sin \tau + d_x \cos \tau)] + \Psi'(\Delta p/p), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tau = m\theta/3 + \gamma_x + \gamma_2/3$ .

На входе в выводное устройство ( $\theta_c = 0$ ) расстояние от септума до равновесной орбиты  $x_c$ ; глубина заброса  $\Delta x_c$  и фаза  $\tau_c$ , соответственно, равны:

$$\begin{aligned} x_c &= \beta_c^{1/2} (u_c \sin \tau_c - v_c \cos \tau_c) + \Psi_c(\Delta p/p), \\ \Delta x_c &= \beta_c^{1/2} \Delta u_c \sin \tau_c, \\ \tau_c &= \gamma_c + \gamma_2/3. \end{aligned} \quad (17)$$

Из анализа выражений (14, 15 и 17) следует, что при  $x_c > 0$  глубина заброса в процессе вывода изменяется от минимального в начале ( $\Delta Q = \Delta Q_n$ ;  $\Delta p/p = (\Delta p/p)_{max}$ ) до максимального в конце ( $\Delta Q = 0$ ;  $\Delta p/p = -(\Delta p/p)_{max}$ ). При заданном положении септума  $x_c$  и глубине заброса  $\Delta x_{max}$  амплитуда секступольного возмущения рассчитывается по формуле

$$b_2 = \frac{\Delta x_{max} \beta_c^{1/2} \sin \tau_c}{18\pi [x_c + \Psi_c(\Delta p/p)_{max}] [x_c + \Psi_c(\Delta p/p)_{max} + \Delta x_{max}]} \quad (18)$$

Глубина заброса для любого другого момента вывода ( $\Delta Q \neq 0$ ) равна

$$\Delta x_c = \frac{(r_c^2 - r_1^2) [\exp(6\pi\sqrt{3}\Delta Q) - 1]}{r_c + r_1 - (r_c - r_1) \exp(6\pi\sqrt{3}\Delta Q)}, \quad (19)$$

где  $r_c = x_c - \beta_c^{1/2} \Delta Q \cos \tau_c / 6\beta_2 - \Psi_c(\Delta p/p)$ ,  
 $r_1 = \beta_c^{1/2} \Delta Q \sin \tau_c / 2\sqrt{3}\beta_2$ .

Углы частиц на входе в выводное устройство на расстоянии  $x_c$  от равновесной орбиты определяются из выражения

$$x'_c = \frac{R}{\beta_c \sin \tau_c} [r_c(\cos \tau_c - d_c \sin \tau_c) - \frac{\sqrt{3}}{3} r_1(\sin \tau_c + d_c \cos \tau_c)] + \Psi'_c \frac{\Delta p}{p}. \quad (20)$$

Их граничные значения в зависимости от величины входящих в (20) параметров соответствуют началу или концу вывода частиц с крайними значениями импульсов  $\Delta p/p = \pm (\Delta p/p)_{max}$ .

## 2. Эффективность медленного вывода

При корректной настройке медленного вывода его эффективность определяется потерями частиц на септуме первого выводного устройства, которые, в свою очередь, складываются из потерь на торце септума, внешней стороне, где электрическое или магнитное поле отсутствует, и внутренней - с напряженностью  $E_c$  или индукцией  $B_c$ .

Движение в однородном поле описывается уравнениями

$$y = \frac{\ell^2}{2\rho_c} + d_0 \ell + y_0, \quad d = \frac{\ell}{\rho_c} + d_0, \quad (21)$$

где  $y$  и  $d = dy/d\ell$  - горизонтальное отклонение и угол относительно внутренней стенки септума,  $\ell$  - его продольная ось,  $\rho_c$  - радиус кривизны траектории в электрическом или магнитном полях. Для разделения циркулирующего и выведенного пучков на входе в следующее септумное устройство угол поворота  $d_n$  в первом из них должен быть больше полного углового разброса пучка:

$$d_n = \ell_c / \rho_c > \Delta d, \quad (22)$$

где  $\ell_c$  - эффективная длина выводного устройства,

$$\Delta d = d_{max} - d_{min} = (dx/ds)_{c,max} - (dx/ds)_{c,min} \quad \text{в выражении (20).}$$

Условие (22) также означает, что для внутренней стороны септума граничными между отклоненной и потерянной частями пучка являются частицы, касающиеся его стенки. Связь между начальным отклонением и углом этих частиц получается приравнением нулю правых частей уравнений (21);  $y_0 = \rho_c d_0^2 / 2$ . Для внешней стороны септума граничными являются ионы с координатами на входе  $y_0 = \ell_c d_0$ .

Фазовый портрет септума на входе в первое выводное устройство в соответствии с указанными границами приведен на рис. 2. Откуда следует, что его эффективная толщина равна площади заштрихованной области, деленной на полный угловой разброс:

$$\delta_{эфф} = \delta_c + \frac{1}{2\Delta d} \left( \ell_c d_{max}^2 + \frac{\rho_c |d_{min}|^3}{3} \right), \quad (23)$$

Минимальное значение  $\delta_{эфф}$  получим варьированием  $d_{max}$  и  $d_{min}$  в формуле (23) при  $\Delta d = const$ :

$$d_{max} = d_n + \Delta d - \sqrt{d_n(d_n + 2\Delta d)}; \quad d_{min} = -(d_n - \Delta d). \quad (24)$$

С учетом (24) оптимальный угол наклона продольной оси септума к орбите на азимуте  $\theta_c$  равен

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)_{opt} = \left( \frac{dx}{ds} \right)_{c,max} - (d_n + \Delta d) + \sqrt{d_n(d_n + 2\Delta d)}. \quad (25)$$

Оценим теперь эффективность вывода, определяемую как отношение интенсивностей выведенного и циркулирующего пучков:

$$E = N_B / N = (N - \Delta N) / N = 1 - \Delta N / N, \quad (26)$$

где  $\Delta N$  - величина интенсивности, потерянной на септуме.

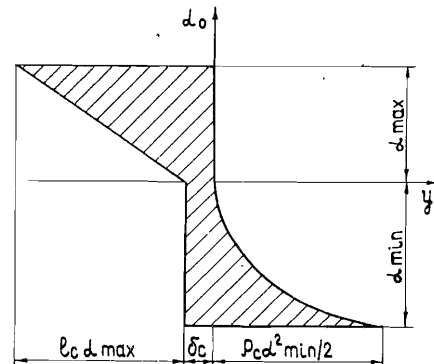


Рис. 2. Фазовый портрет септума выводного устройства.

Найдем величину потерь частиц в предположении, что после прохождения фронтом пучка точки  $u = u_c + \Delta u_c$  (рис. 1) в области вывода устанавливается квазистационарное распределение плотности пучка  $D$ , обратно пропорциональное  $u'$  при  $v' = 0$  (9):

$$D(u, \theta) = \frac{const}{u^2 - u_1^2(\theta)}; \quad u_c \leq u \leq u_c + \Delta u_c. \quad (27)$$

Поскольку  $u_1$  за три оборота меняется незначительно, мгновенные относительные потери будут равны

$$\frac{\delta N(\theta)}{N(\theta)} = \frac{\delta u}{u_c + \Delta u_c} \cdot \frac{1}{18\pi\beta_2 [u_c^2 - u_1^2(\theta)]}. \quad (28)$$

Здесь  $N(\theta) = \int_{u_c}^{u_c + \Delta u_c} D(u, \theta) du$  - число частиц в интервале

$[u_c; u_c + \Delta u_c]$ ;  $\delta u$  - протяженность области потерь на плоскости  $(u; v)$  при  $v = v_1$  ( $\delta u \ll \Delta u_c$ ). Полные потери ионов на септуме за все время вывода можно оценить, усредняя (28) по  $u_1$  и  $\Delta p/p$ :

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2(\Delta P/P)_{max} u_{1H}} \int_{-(\Delta P/P)_{max}}^{(\Delta P/P)_{max}} d\left(\frac{\Delta P}{P}\right) \int_0^{u_{1H}} \frac{\delta N}{N} du_1, \quad (29)$$

где  $u_{1H}$  определяется начальным значением  $\Delta Q_H$  (II).

С точностью до членов  $\sim (\Delta P/P)_{max}$  получим, учитывая (I.18), следующую формулу для оценки относительных потерь:

$$\frac{\Delta N}{N} = \sigma_{эфф} \left[ \frac{1}{\Delta x_{max}} \left( 1 + \frac{2\Psi_c(\Delta P)}{x_c(\Delta P/P)_{max}} \right) + \frac{1}{x_c} \left( 1 + \frac{\Psi_c(\Delta P)}{x_c(\Delta P/P)_{max}} \right) \right] \times \left[ 1 + \left( \frac{\beta_c \epsilon_x}{3\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{|\cos \bar{c}|}{x_c} \right]. \quad (30)$$

Полученные соотношения позволяют оценить основные параметры резонансной системы: величины нелинейностей в секступольных линзах (6 и 18), возбуждающих резонанс  $3Q_x = m$ , изменение градиентов в квадрупольных линзах, с помощью которого пересекается резонансная полоса (II и I2), характеристики выведенного пучка (I3, I9, I.20) и эффективность медленного вывода (23, 25, 26 и 30).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федотов Ю.С. Препринт ИФВЭ, 71-63, Серпухов, 1971.
2. Глобенко Ю.Г., Кошкарёв Д.Г. ПТЭ, № 2, 1967, с.14.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 июля 1986 года.

Казаринов Н.Ю., Михайлов В.А.

9-86-503

Оценка эффективности медленного вывода пучка  
из синхротрона

Произведен аналитический расчет медленного вывода с использованием нелинейного резонанса бетатронных колебаний  $3Q_x = m$ . Получены выражения для оценки амплитуды и фазы секступольного возмущения, диапазон изменения градиентов в квадрупольных линзах и показана их связь с параметрами циркулирующего и выведенного пучков. Приведены также формулы для расчета оптимального положения септумного устройства.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Kazarinov N.Yu., Mikhailov V.A.

9-86-503

Efficiency Evaluation of Slow Extraction from  
the Synchrotron

The analytical calculation of slow extraction using nonlinear betatron resonance  $3Q_x = m$  is presented. The expressions for evaluation of sextupole perturbation amplitude and phase, quadrupole gradient range are obtained, the connection with circulated and extracted beam parameters is shown. The formulae for calculating septum device optimal position are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986