сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9-85-848

С.Н.Андрианов*, А.Д.Дымников*, Г.М.Осетинский

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЭМИТТАНСАХ ПАРАКСИАЛЬНОГО ПУЧКА НА РАЗМЕРЫ КРОССОВЕРА В ПРОТОННОМ КВАДРУПОЛЬНОМ МИКРОЗОНДЕ

* Научно-исследовательский институт математики и процессов управления Ленинградского государственного университета

1985

Настоящая работа посвящена влиянию объемного заряда на размеры пучка в протонном микрозонде, оптимизация которого в нелинейном приближении для квадрупольного объектива рассматривалась в [1] и для квадрупольно-октупольного - во [2].

Как пример, рассматривается протонный микрозонд с квадруплетом вращения в качестве объектива и с двумя круглыми диафрагмами /радиуса R_1, R_2/, имеющий следующие параметры /обозначения см.в [1] /: $L = 0{,}2$м, $s = 0{,}024$м, $\lambda = 0{,}005$м, $a = 3{,}5$ м, $g = 0{,}3$м, $\ell = 3{,}35$м, $R_1 = 20$ мкм, $R_2 = 0{,}0022$ м. $\kappa_1 = 0{,}6313$, $\kappa_2 = 1{,}0229$.

Таблица 1

$R_2(10^{-4}$м) / $\rho_m(10^{-8}$ м)	1	22	50	100	200
линейный случай	3,95	3,95	3,96	3,97	3,98
нелинейный случай	3,95	4,25	7,55	32,75	234,4

В табл.1 приведены результаты расчета в линейном и нелинейном приближении /без учета собственного заряда/ размера пучка на мишени ρ_m в зависимости от радиуса второй диафрагмы /или от эмиттанса пучка $\epsilon_x = \epsilon_y = R_1 R_2/\ell$ /.

Уравнения движения. Для того, чтобы ясны были все обозначения, допущения и приближения, рассматриваемые в настоящей работе, кратко изложим вывод уравнений движения множества частиц Q с учетом собственного поля пучка.

Пусть имеется движущееся множество точек |Q| в 4-пространстве-времени z, где $z_4 = ct$. Для простоты считаем, что точка M, являющаяся началом подвижного репера e, принадлежит множеству |Q|. На составляющих репера $\vec{e}_j$ [3] /$j = 1 \div 4$/, где

$$e = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix} \right\| , \quad e\tilde{e} = G = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| , \quad dQ = \tilde{e}\, dz , \qquad /1/$$

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

построим локальную систему координат /x/, которые обозначают относительное положение точек из множества {Q} по отношению к точке M. Координаты точки M пометим индексом m. Очевидно, что $x_m = 0$.

Тогда для перемещения точки Q получим:

$$dQ = dM + d(\tilde{e}x) = \tilde{e}\,dZ_m + d(\tilde{e}x)\,. \qquad /2/$$

Выберем систему отсчета Z_m таким образом, чтобы выполнялось

$$Z_{m_1} = Z_{m_2} = \mathrm{const} = 0. \qquad /3/$$

Обозначая штрихом производную по продольной координате Z_{m_3}, введем следующие обозначения:

$$dS = \sqrt{dQ\,dQ} = \sqrt{d\tilde{Z}\,Q\,dZ}, \qquad dS_m = \sqrt{dZ_{m_4}^2 - dZ_{m_3}^2}, \qquad /4/$$

$$\frac{dZ}{dS} = U(Z), \quad \frac{dZ_m}{dS_m} = U_m, \quad U_{m_1} = U_{m_2} = 0, \quad U_{m_3} = p = \gamma\beta, \; U_{m_4} = \gamma, \qquad /5/$$

$$Z'_m = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ Z_{m_4} \end{Vmatrix}, \qquad Z'_{m_4} = \frac{\gamma}{P}. \qquad /6/$$

В рассматриваемом случае будем считать, что $de = 0$. Тогда уравнения движения в вакууме для произвольной точки Q запишутся в виде:

$$\left(\frac{Z'}{S'}\right)' = P(B,E)\,Z', \quad P(B,E) = \begin{Vmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{Vmatrix} \qquad /7/$$

$$S' = \sqrt{\tilde{Z}'\,Q\,Z'}, \qquad Z' = x' + Z'_m, \qquad /8/$$

$$E(M^{-1}) = \frac{q^*}{m_0^* c^{*2}}E^*, \qquad B(M^{-1}) = \frac{q^*}{m_0^* c^*}B^*, \qquad /9/$$

$$u_i = \frac{p^*}{m_0^* c^*}, \quad i = 1,2,3, \quad u_4 = \frac{m^*}{m_0^*}. \qquad /10/$$

Здесь размерные величины в системе СИ помечены звездочкой.

Вектор-потенциал пучка A. Будем считать, что наблюдатель в локальной системе координат (x) регистрирует все частицы, пролетающие мимо него в один и тот же момент времени $x_4 = 0$. В этом случае для описания собственного поля пучка используем 4-вектор-потенциал A, определяемый выражением:

$$A = \int_{\{\bar{x}^*\}} \frac{j(z(x))\,d\{\bar{x}^*\}}{\sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + (x_3 - x_3^*)^2}}, \qquad /11/$$

$$j_1 = S_1, \quad j_2 = S_2, \quad j_3 = \frac{p}{\gamma}\rho + S_3, \quad j_4 = \rho, \qquad /12/$$

$$S_j = \frac{\rho}{\gamma}\int_{\{\bar{x}'\}} x'_j\, f(\bar{x}, \bar{x}')\, d\{\bar{x}'\}, \qquad /13/$$

$$d\{\bar{x}^*\} = dx_1^*\, dx_2^*\, dx_3^*. \qquad /14/$$

Здесь $f(\bar{x}, \bar{x}')$ - функция распределения фазовой плотности, множество $\{\bar{x}^*\}$ - множество точек внутри эллипсоида

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \le 1, \qquad /15/$$

где ρ - плотность частиц. Черта над вектором означает, что вектор трехмерный.

Будем считать, что пучок в пространстве (x'_1, x'_2, x'_3) имеет вид центрального эллипсоида, так что величины S_i равны нулю.

Разлагая A в ряд в окрестности точки M, в первом приближении получим:

$$A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = j_{m_3}\cdot J_0, \quad A_4 = j_{m_4}\cdot J_0, \qquad /16/$$

где

$$j_{m_3} = \frac{p}{\gamma}\rho_m, \quad j_{m_4} = \rho_m, \qquad /17/$$

$$J_0 = \frac{1}{2}(M_0 - M_1 x_1^2 - M_2 x_2^2 - M_3 x_3^2). \qquad /18/$$

Величины M_0, M_1, M_2, M_3 выражаются через неполные эллиптические интегралы I и II рода /4/:

$$M_0 = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - c^2}}F(\phi_1, k) = a^2 M_1 + b^2 M_2 + c^2 M_3, \qquad /19/$$

$$M_1 = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - c^2}\,(a^2 - b^2)}[F(\phi_1, k) - E(\phi_1, k)], \qquad /20/$$

$$M_2 = \frac{abc}{\sqrt{a^2-c^2}(a^2-b^2)} F(\phi_1, k) + \frac{abc\sqrt{a^2-c^2}}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} E(\phi_1, k) - \frac{c^2}{b^2-c^2}, \qquad /21/$$

$$M_3 = -\frac{abc}{\sqrt{a^2-c^2}\,(b^2-c^2)} E(\phi_1, k) + \frac{b^2}{b^2-c^2}, \qquad /22/$$

$$\phi_1 = \arccos\frac{c}{a}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}. \qquad /23/$$

При $c \gg b \geq a$ /сильно вытянутый элипсоид/ можно пользоваться приближенными выражениями:

$$M_1 \approx \frac{b}{b+a} - \frac{ab}{2c^2}\ln\frac{4c}{b+a} + ab\frac{b+3a}{4c^2(b+a)}, \qquad /24/$$

$$M_2 \approx \frac{a}{b+a} - \frac{ab}{2c^2}\ln\frac{4c}{b+a} + ab\frac{b+3a}{4c^2(b+a)}, \qquad /25/$$

$$M_3 \approx \frac{ab}{c^2}\left(\ln\frac{4c}{b+a} - 1\right). \qquad /26/$$

Магнитная индукция и напряженность электрического собственного поля пучка. Для векторов $\vec{B}$ и E собственного поля получим в первом приближении:

$$B_1 = -j_{m_3} M_2 x_2, \quad E_1 = \rho_m M_1 x_1,$$
$$B_2 = j_{m_3} M_1 x_1, \quad E_2 = \rho_m M_2 x_2, \qquad /27/$$
$$B_3 = 0, \quad E_3 = \rho_m M_3 x_3.$$

Параксиальные уравнения движения. Параксиальные уравнения движения в фазовом пространстве (r), в котором в процессе движения сохраняется фазовый объем пучка, где

$r_i = x_i$, $i = 1,2,3$, $r_4 = p/p_0 x'_1$, $r_5 = p/p_0 \cdot x'_2$, $r_6 = \gamma^2 p/\gamma_0^2 p_0 \cdot x'_3$, /28/

с учетом пространственного заряда имеют вид:

$$r'_k = \sum_{s=1}^{6} A_{ks} r_s, \quad k = 4, 5, 6, \qquad /29/$$

где

$$A_{4j} = \left(-\frac{1}{p}\nabla_j(x) B_2 + \frac{\gamma}{p^2}\nabla_j(x) E_1 + \delta(j,1)\frac{j_{m_3} M_1}{p^3}\right)\frac{p}{p_0},$$

$$A_{5j} = \left(\frac{1}{p}\nabla_j(x) B_1 + \frac{\gamma}{p^2}\nabla_j(x) E_2 + \delta(j,2)\frac{j_{m_3} M_2}{p^3}\right)\frac{p}{p_0}, \qquad /30/$$

$$A_{6j} = \left(\frac{1}{p^2\gamma}\nabla_j(x) E_3 + \delta(j,3)\frac{j_{m_3} M_3}{p^3}\right)\frac{\gamma^2 p}{\gamma_0^2 p_0}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$A_{45} = -A_{54} = \frac{1}{p} B_{m_3}, \quad A_{46} = -\frac{\gamma_0^2}{\gamma p^2} E_{m_1},$$

$$A_{56} = -\frac{\gamma_0^2}{\gamma p^2} E_{m_2}, \quad A_{64} = \frac{\gamma}{p^2\gamma_0^2} E_{m_1}, \quad A_{65} = \frac{\gamma}{p^2\gamma_0^2} E_{m_2}. \qquad /31/$$

Здесь $\nabla_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}$, B и E - внешние поля, $\delta(j, k)$ - символ Кронекера, значения производных берутся в точке $x = 0$. При этом выполняются уравнения Максвелла для внешнего поля и равенства:

$$B_{m_2} = \frac{\gamma}{p} E_{m_1}, \quad B_{m_1} = -\frac{\gamma}{p} E_{m_2}. \qquad /32/$$

Случай бесконечно длинного сгустка. Для бесконечно длинного сгустка /$c \to \infty$, $a = x_{1m}$, $b = x_{2m}$/ M_1, M_2, M_3 и j_{m_3} записываются в виде:

$$M_1 = \frac{x_{2m}}{x_{1m} + x_{2m}}, \quad M_2 = \frac{x_{1m}}{x_{1m} + x_{2m}}, \quad M_3 = 0, \qquad /33/$$

$$j_{m_3} = \frac{I_m}{\pi x_{2m} x_{2m}}, \quad I_m = \frac{I^*_m}{I^*_0},$$

где I_m^* - ток в амперах на оси пучка,

$$I_0^*[A] = \frac{m_0^* c^*}{\mu_0^* q^*} = \frac{\epsilon_0^* m_0^* c^{*3}}{q^*} . \qquad /34/$$

Для движения частиц в бесконечно длинном пучке в квадрупольном магнитном поле получим следующие параксиальные уравнения:

$$x'' + [k - \frac{1}{p^3} \frac{I_m}{\pi r_x(r_x + r_y)}] x = 0 ,$$

$$/35/$$

$$y'' - [k + \frac{1}{p^3} \frac{I_m}{\pi r_y(r_x + r_y)}] y = 0 ,$$

где $x = x_1$, $y = x_2$, $r_x = x_{1m}$, $r_y = x_{2m}$,

$$k = \frac{1}{p} \nabla_1(x) B_2 = \frac{1}{p} \nabla_2(x) B_1 . \qquad /36/$$

Определение максимальных размеров пучка на мишени. Для получения радиуса пучка на мишени ρ_m необходимо определить максимальные размеры пучка на мишени $r_x^m = r_x(L_m)$ и $r_y^m = r_y(L_m)$, где L_m - длина микрозонда.

Для решения этой задачи интервал $[0, L_m]$ разбивается на достаточно малые подынтервалы $[z_m^j, z_m^{j+1}]$, на каждом из которых коэффициенты уравнений /35/ можно считать постоянными. Рассматривая пучок эллиптического сечения, можно ввести матрицы огибающих /см., напр. [3]/ σ^x, σ^y где $\sigma_{11}^x = r_x^2$, $\sigma_{11}^y = r_y^2$. Рассмотрим некоторый частичный интервал длиной $h_j = z_m^{j+1} - z_m^j$ $(h_j << L_m)$, где z_m^j - узловые точки разбиения интервала $[0, L_m]$. Предполагая величины r_x, r_y, входящие в уравнения /35/, на интервале $[z_m^j, z_m^{j+1}]$ постоянными, для σ матриц запишем

$$\sigma(j+1) = R(j+1|j)\,\sigma(j)\,\tilde{R}(j+1|j) , \qquad /37/$$

где $R(j+1|j)$ - матрицант уравнений /35/ на участке $[z_m^j, z_m^{j+1}]$. $\sigma(j)$ - матрица огибающих в точке z_m^j. Заметим, что, вообще говоря, $R(j+1|j)$ зависит от значений r_x, r_y, а тем самым и от значений σ матрицы в соответствующих плоскостях. Поэтому для определения решения уравнений /35/ на интервале $[z_m^j, z_m^{j+1}]$ предлагается следующий метод последовательных приближений. Для вычисления матрицанта $R(j+1|j)$ необходимо знание σ матрицы в точке z_m^j. В качестве такой σ матрицы на k-м шаге приближения можно выбрать матрицу, вычисляемую по формуле

$$\sigma^k(j) = a\sigma^{k-1}(j) + (1-a)R(j+1|j, \sigma^{k-1}(j))\,\sigma(j)\,\tilde{R}(j+1|j, \sigma^{k-1}(j)) , \qquad /38/$$

где $k = 1,2,3,\ldots$, $\sigma^0(j) = \sigma(j)$, $0<a<1$. Можно показать, что предлагаемый метод сходится. Из условий сходимости можно получить значения величины h_j для каждого интервала $[z_m^j, z_m^{j+1}]$, обеспечивающего заданную точность при некотором значении k /шаге итерации/, характеристиках пучка и внешнего поля.

Для решения этой задачи был составлен пакет программ DENS. Результаты счета на ЭВМ для указанной выше системы приведены в табл.2, где указаны значения величин тока в пучке, приводящих к указанным увеличениям размеров пучка /в единицах ρ_m^ℓ, где ρ_m^ℓ - размеры пучка в случае линейных уравнений движения/, при различных значениях радиуса второй диафрагмы R_2 /значения тока даны в мкА/.

Таблица 2

ρ_m/ρ_m^ℓ $R_2(10^{-4}$ м)	1,05	1,10	1,50	2,00	3,00
1	1	1	2,5	3,5	5,0
22	8	13	21	54	69
50	19	30	70	101	225
100	40	60	140	200	324
200	96	128	270	385	640

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов С.Н., Дымников А.Д., Осетинский Г.М. ОИЯИ, Р9-12873, Дубна, 1979; ПТЭ. № 1, 1982, с.39.
2. Андрианов С.Н., Дымников А.Д., Осетинский Г.М. ОИЯИ, Б-1-9-84-209, Дубна, 1984.
3. Дымников А.Д. ОИЯИ, Б-1-10427, Дубна, 1977.
4. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. Атомиздат, М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 ноября 1985 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Андрианов С.Н., Дымников А.Д., Осетинский Г.М. 9-85-848
Влияние объемного заряда при различных эмиттансах параксиального пучка на размеры кроссовера в протонном квадрупольном микрозонде

Исследуется влияние собственного поля пучка на эволюцию его в микрозонде. Для этого параксиальные уравнения движения в системе из квадрупольных линз записываются с учетом объемного заряда. Приведены результаты расчета изменения размеров выходного кроссовера в зависимости от величины тока в пучке. Показано, при каких токах следует учитывать влияние пространственного заряда.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Andrianov S.N., Dymnikov A.D., Osetinskij G.M. 9-85-848
The Influence of Space Charge for Different Emittances of Para-Axial Beam on Cross-Over Dimensions on a Target in Proton Qaudrupole Microprobe

The influence of space-charge distribution of the beam on its evolution in microprobe optics is investigated. For this purpose the para-axial equations of motion, including charge exchange effects, has been studied for the system consisting of the quadrupole lenses. The dependence of final cross-over on beam current is discussed in detail.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985