

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9-85-235

В.О.Нефедьев, Б.Г.Шинов

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
В СЛУЧАЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1985

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа содержит характеристику пакета программ CELL для решения краевых задач Дирихле и Неймана методом конечных элементов для уравнения Гельмгольца в аксиально-симметричном случае и на плоскости. Базой для создания CELL послужила аналогичная программа AXISYMM-SCALAR-HELMHOLTZ-FINTELA^{1/}. В программе CELL используется аппроксимация области треугольными элементами, а искомой функции — полными полиномами до 4-го порядка включительно. Приводится краткое описание метода, а также результаты численных расчетов собственных частот полого трубчатого резонатора и электростатических полей пластин корректора КУТИ ОИЯИ.

1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Пусть на некотором открытом связном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ заданы функции $p(\vec{x}) \in C^1$ и $g(\vec{x}) \in C^0$. Требуется найти $\phi(\vec{x}) \in \bar{\Omega}$:

$$\operatorname{div}(p(\vec{x}) \operatorname{grad} \phi(\vec{x})) = k^2 \phi(\vec{x}) - g(\vec{x}), \quad (1.1)$$

$$\phi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \partial\Omega_1, \quad \psi(\vec{x}) \in C^0; \quad \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_2, \quad (1.2)$$

где $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, \vec{n} — нормаль к $\partial\Omega$.

Решение данной задачи эквивалентно проблеме минимизации функционала Эйлера

$$F(\phi) = - \iiint_{\Omega} [\phi \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \phi) - k^2 \phi^2 + 2\phi g] d\tau, \quad (1.3)$$

где $d\tau$ — элемент объема.

Ограничиваясь далее рассмотрением только двумерного или аксиально-симметричного случаев (1.1), положим, что $\bar{\Omega}$ разбито на подмножества e_1, e_2, \dots, e_p , называемые элементами:

$$1) \operatorname{mes}(e_i \cap e_j) \begin{cases} = 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases} \quad 2) \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^p e_i,$$

$$3) \forall e_i, p(\vec{x}) = p_i = \operatorname{const}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Тогда функционал (1.3) принимает вид

$$F(\phi) = \sum_{i=1}^p F_i(\phi), \quad (1.4)$$

$$F_i(\phi) = \iint_{e_i} \left\{ p_i \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] + k^2 \phi^2 - 2\phi g \right\} + p_i \int_{\partial e_i} \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\vec{\sigma},$$

где $d\vec{\sigma}$ — элемент границы, а $\int_{\partial e_i} \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\vec{\sigma} = 0$ при имеющихся граничных условиях.

Пусть e_i , $i = 1, \dots, p$ имеют вид треугольников в (x_1, x_2) (рис. 1). Равенство (1.4) будет выполняться приближенно для произвольной достаточно гладкой $\partial\Omega$, но

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p F_i(\phi) = F(\phi) \quad (\text{diam } e_i \rightarrow 0)^{1/2}.$$

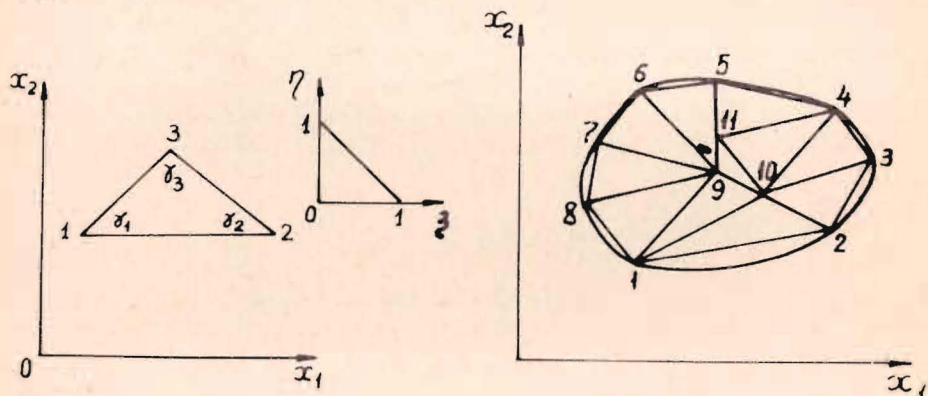


Рис. 1.

Рис. 2.

К каждому треугольнику e_i с вершинами (r_j^i, z_j^i) , $j = 1, 2, 3$, $i = 1, \dots, p$ применим линейное преобразование вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= (r_2^i - r_1^i) \xi + (r_3^i - r_2^i) \eta + r_1^i, \\ x_2 &= (z_2^i - z_1^i) \xi + (z_3^i - z_2^i) \eta + z_1^i, \end{aligned} \quad (1.5)$$

отображающее произвольный e_i в треугольник \bar{e} на плоскости (ξ, η) (рис. 2). После замены координат приближенные сеточные значения $\phi(\xi, \eta)$ на \bar{e} можно найти интерполяцией ортогональными полиномами $\alpha_j^{m_i}(\xi, \eta)$ порядка m_i ($m \geq 1$)

$$\phi(\xi, \eta) \rightarrow \bar{\phi}^i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n_i} \bar{\phi}_j^i \alpha_j^{m_i}(\xi, \eta), \quad n_i = \frac{1}{2} (m_i + 1)(m_i + 2), \quad (1.6)$$

$$\alpha_j^{m_i}(\xi_k, \eta_k) = \delta_{jk}.$$

2

где $(\xi_k, \eta_k) \in \bar{e}$, $k = 1, \dots, n_i$ — образ некоторого выделенного множества точек в e_i (для $m_i = 1, 2, 3$ и 4 см., рис. 3). По теореме об интерполяции, $\bar{\phi}_j^i$ значения $\bar{\phi}^i(\xi, \eta)$ в точках (ξ_j^i, η_j^i) .

Выполняя подстановку (1.5) и (1.6) в (1.4), получим

$$\begin{aligned} F_i(\phi^i) &= \bar{\phi}_i^T [S_i] \bar{\phi}_i + \\ &+ k^2 \bar{\phi}_i^T [T_i] \bar{\phi}_i - 2\bar{g}_i^T [T_i] \bar{\phi}_i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\bar{\phi}_i^T$ — вектор-столбец $\bar{\phi}_j^i$, $j = 1, \dots, n_i$, \bar{g}_i^T — вектор-столбец g_j^i значений функции $g(\xi, \eta)$ в точках (ξ_j^i, η_j^i) ; матрицы $[S_i]$ и $[T_i]$ размерности (n_i) имеют вид

$$\begin{aligned} [S_i] &= \sum_{e=1}^3 r_e^i \sum_{j=1}^3 \text{ctg } \gamma_j [Q_{ej}]^{m_i} p_i a_i, \\ [T_i] &= \sum_{e=1}^3 r_e^i [R_e]^{m_i} a_i, \end{aligned}$$

в случае аксиальной симметрии Ω ; и

$$[S_i] = \sum_{j=1}^3 \text{ctg } \gamma_j [Q_{3j}]^{m_i} p_i a_i, \quad [T_i] = [R_3]^{m_i} a_i,$$

для плоскостного случая, где $a_i^{-1} = \frac{\partial(r, z)}{\partial(\xi, \eta)}$.

Две из девяти $[Q_{ej}]^{m_i}$ матриц и одна из трех $[R_e]^{m_i}$ матриц линейно независимы, причем значения элементов этих симметричных матриц являются функциями только порядка интерполяционных полиномов, и не зависят от линейных размеров и координат вершин треугольников. Это позволяет производить вычисление элементов $[S_i]$ и $[T_i]$ матриц простым суммированием, используя уже известные значения элементов $[Q_{ej}]^{m_i}$ и $[R_e]^{m_i}$ матриц для соответствующих m_i .

Складывая в соответствии с (1.4) все выражения вида (1.7), получим

$$F(\vec{\phi}) = \vec{\phi}^T [S] \vec{\phi} + k^2 \vec{\phi}^T [T] \vec{\phi} - 2\vec{g}^T [T] \vec{\phi},$$

где $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$, $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)$ — вектор-столбцы значений $\bar{\phi}(\bar{x}_j)$ и $g(\bar{x}_j)$ в различных точках \bar{x}_j , $j = 1, \dots, N$, $j \in \{J\}$ по всей области $\bar{\Omega}$, а элементы обобщенных $[S]$ и $[T]$ матриц размерности

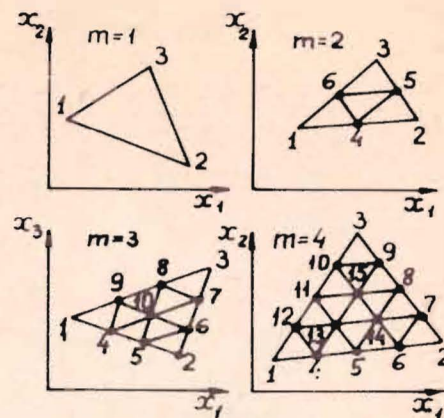


Рис. 3.

(N) имеют вид:

$$[S]^{KL} = \sum_{e_i} [S_i]^{ke}, \quad [T]^{KL} = \sum_{e_i} [T_i]^{ke}.$$

Суммирование ведется по тем $e_i, i = 1, \dots, p$, которым принадлежат одновременно точки \vec{x}_K и \vec{x}_L (их номера в системе нумерации элемента $e_i: k$ и e).

Минимизация $F(\vec{\phi})$ по набору параметров $\phi_j, j = 1, \dots, N$ приводит к линейной системе

$$[S] \vec{\phi} + k^2 [T] \vec{\phi} = [T] \vec{g}. \quad (1.8)$$

Выполняя общую нумерацию точек в $\Omega: \{J\}, j = 1, \dots, N$, вектор $\vec{\phi}$ представляют в виде $\vec{\phi} = \{\vec{\phi}^1, \vec{\phi}^2\}$, где $\vec{\phi}^1$ содержит искомые приближенные значения $\vec{\phi}(\vec{x})$ в точках $j = 1, \dots, N_1$, а $\vec{\phi}^2$ — известные из граничного условия Дирихле в точках $j = N_1 + 1, \dots, N$. В соответствии с этим $[S]$ и $[T]$ матрицы разбиваются на блоки $[S]_{mn}$ и $[T]_{mn}$ ($\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}$) = 1, 2, а (1.8) преобразуется:

а) $g = 0$. Решение однородного уравнения Гельмгольца сводится к обобщенной задаче на собственные значения

$$[S]_{11} \vec{\phi}^1 + k^2 [T]_{11} \vec{\phi}^1 = 0; \quad (1.9)$$

б) $k = 0$. Решение уравнения Пуассона сводится к системе линейных уравнений

$$[S]_{11} \vec{\phi}^1 = \vec{f}^1, \quad (1.10)$$

где $\vec{f}^1 = -[S]_{12} \vec{\phi}^2 + [T]_{11} \vec{g}^1 + [T]_{12} \vec{g}^2$. Матрицы $[S]_{11}$ и $[T]_{11}$ размерности (N_1) — симметричные и положительно определенные.

Некоторые оценки точности метода^{/3/}:

$$а) |\bar{\lambda}_i - \lambda_i| \sim Ch^{2m} \lambda_i^{m+1}, \quad \|\bar{\phi}_i - \phi_i\| \leq C [h^{m+1} + h^{2m}] \lambda_i^{m+1},$$

где $\lambda_i = k_i^2$ — собственные значения, $i = 1, 2, \dots, p$, ϕ_i — собственные векторы (1.1)-(1.2), а $\bar{\lambda}_i$ и $\bar{\phi}_i$ — соответствующие им, полученные в ходе численного эксперимента; $h = \max_{e_j} [\text{diam } e_j]$, $j = 1, \dots, p$;

m — порядок полинома;

$$б) \|\phi^S - \bar{\phi}^S\| \leq Ch^{m+1-S} \|\phi\|,$$

где S — порядок производной, $S = 0, \dots, m$.

Приведенная оценка не учитывает погрешности аппроксимации границы области Ω , которая вблизи $\partial\Omega$ ухудшает ее до $\|\phi - \bar{\phi}\| \sim O(h^{3/2})$.

2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПАКЕТА ПРОГРАММ CELL

В пакет программ CELL входят следующие модули:

- 1) ПИЕСЕ, обрабатывающий входные данные и редуцирующий (1.1)-(1.2) к виду (1.9) или (1.10).
- 2) Программы линейной алгебры для решения (1.9) или (1.10).
- 3) Сервисные программы.

Конечным результатом работы ПИЕСЕ является формирование $[S]_{11}$ и $[T]_{11}$ матриц в случае а), или вектора \vec{f}^1 и $[S]_{11}$ матрицы в случае б). Для этого при каждом фиксированном $K: K = 1, \dots, N_1$ организуется просмотр всех элементов $e_i, i = 1, \dots, p$ и расчет значений элементов $[S]_{11}^{KL}$ и $[T]_{11}^{KL}$, $L = K, \dots, N_1$, которые построчно записываются в устройство внешней памяти ЭВМ.

Методы, применяемые для решения (1.9) или (1.10), должны учитывать симметричность, положительную определенность, а часто — разреженность обобщенных матриц. В существующем в настоящее время варианте CELL решение системы линейных уравнений (1.10) осуществляется методом точечной верхней релаксации^{/4/}. Критерий точности этого алгоритма, с учетом погрешности самого метода конечных элементов, может быть не слишком высоким. Процесс решения обобщенной задачи на собственные значения основан на прямых методах линейной алгебры^{/5/}.

Раскладывая $[T] = [L^T][L]$ методом Холецкого, а затем вычисляя $[A] = [L^T]^{-1}[S][L]^{-1}$, редуцируем (1.9) к виду $[A]\vec{V} = -k^2\vec{V}$.

Преобразованием Хаусхолдера симметричную матрицу $[A]$ можно привести к трехдиагональной форме, и прогонкой многочлена Штурма найти собственные значения и собственные векторы матрицы $[A]$. Учитывая далее, что $\vec{V}_i = [L]\phi_i$, легко вычислить и собственные векторы ϕ_i исходной системы. Необходимо отметить, что в связи с погрешностью самого метода конечных элементов, физический смысл имеют только первые несколько волновых векторов. Описанный алгоритм требует резервирования $\frac{3}{2} N_1(N_1 + 1)$ слов в оперативной памяти ЭВМ.

В число сервисных программ пакета включены программы: вычисление коэффициентов полиномов, интерполирующих сеточную функцию $\bar{\phi}(\vec{x})$ в каждом треугольном элементе; вычисление $\bar{\phi}(\vec{x})$, $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_2}$ в точках произвольно заданной регулярной сетки.

3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

1. Расчет собственных частот полого трубчатого резонатора. Резонатор имеет вид цилиндра длиной $L = 10$ и радиусом $R = 1$. Граничные условия: на цилиндрической поверхности $\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{R=0} = 0$.

и $\phi|_{z=\pm 5} = 0$ на торцах. Данная задача допускает аналитическое решение, которое может быть найдено методом разделения переменных в однородном уравнении Гельмгольца:

$$k_{nm} = \sqrt{\left[\frac{\pi}{10}(2n+1)\right]^2 + \mu_m^2}, \quad \phi_{nm} = J_0(\mu_m r) \cos\left[\frac{\pi}{10}(2n+1)z\right], \quad \left(\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right) = 0, 1, \dots$$

где μ_m — нули функции Бесселя $J_1(\mu) = 0$. Сравнение расчетных и теоретических k_{nm} для $m=0$ представлено в таблице:

	1	2	3
k теоретическое	0,3141593	0,942478	1,570797
k расчетное	0,314046	0,942443	1,57173
δ %	0,036	0,0037	0,06

Триангуляция выполнялась 4 элементами 4-го порядка.

2. Расчет электростатических полей пластин корректора КУТИ (ОИЯИ).

Пластины расположены внутри адгезатора КУТИ и служат для коррекции траекторий частиц, инжектируемых в камеру. Расчеты производились для нескольких вариантов геометрии пластин ^{7/6/}, в данной работе представлен один из них (рис. 4). Аналитические оценки показали, что поле быстро спадает по абсолютной величине с ростом расстояния от корректора ($\phi_k = 1$), поэтому в дальнейшем использовалась только некоторая выделенная часть камеры, ограниченная поверхностью HE $\partial\phi/\partial\vec{n} = 0$ (рис. 4). В плоскости симметрии $\partial\phi/\partial\vec{n} = 0$, на поверхности EG: $\phi = 0$. Подобное упрощение исходной задачи исказило результат не более чем на 0,2%. На основании анализа графиков функции потенциала на плоскости $z=0$ для различных порядков полиномов и видов

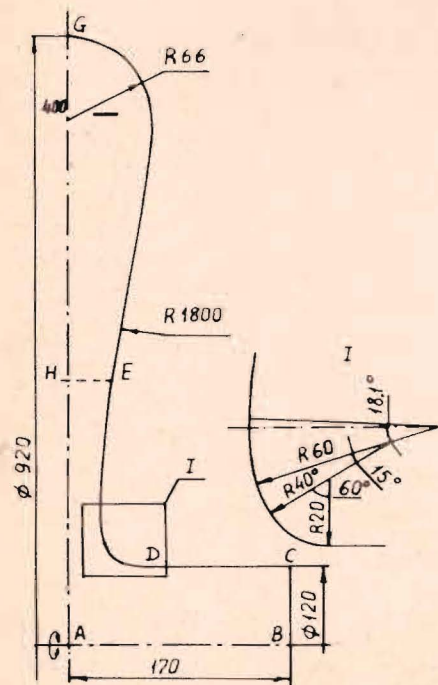


Рис. 4

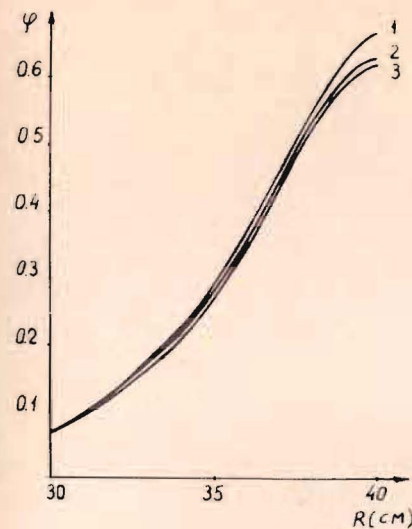


Рис. 5

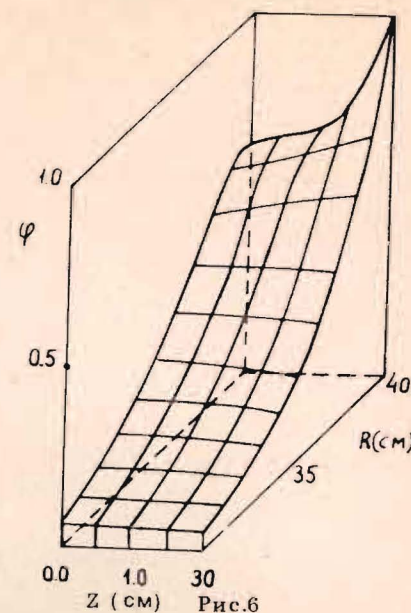


Рис. 6

аппроксимации области (рис. 5) можно утверждать, что ошибка метода не превысила 0,1%. На рис. 6 изображено распределение функции потенциала в области наиболее вероятного нахождения инжектируемых частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Konrad A., Silvester P. Computer Physics Comm., 1973, 5, p.437-455.
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. "Мир", М., 1976.
3. Стренг Г., Фикс Д. Теория метода конечных элементов. "Мир", М., 1977.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
5. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. ГИФМЛ, М., 1963.
6. Халлер Р., Красных А.К. ОИЯИ, 9-80-284, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1985 года.