

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



A-695

17/III-75
9 - 8496

1001/2-75

В.Н.Аносов, Ю.Н.Денисов,
В.П.Дмитриевский, В.В.Кольга

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
И КОРРЕКЦИИ ФАЗЫ СГУСТКА
В ИЗОХРОННОМ ЦИКЛОТРОНЕ

1974

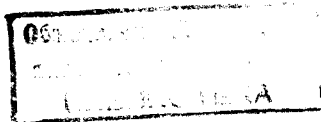
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

9 - 8496

В.Н.Аносов, Ю.Н.Денисов,
В.П.Дмитриевский, В.В.Кольга

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
И КОРРЕКЦИИ ФАЗЫ СГУСТКА
В ИЗОХРОННОМ ЦИКЛОТРОНЕ

Направлено в ЖТФ



В настоящее время для решения ряда проблем в экспериментальной ядерной физике научно-исследовательские центры многих стран используют изохронные циклотроны с регулируемой энергией. Изохронный циклотрон может обеспечить ускорение широкого спектра ионов

до энергий порядка $W \approx (150 \div 200) \frac{Z^2}{A} \text{ МэВ}$ с плав-

ным регулированием энергии в широком диапазоне при достаточно хорошем качестве ускоренного пучка. Современные действующие и проектируемые изохронные циклотроны обеспечивают также весьма малый энергетический разброс в пучке, который в лучших установках составляет

$\frac{\Delta W}{W} = (0,5 \div 2,0) \cdot 10^{-3}$. Однако для устойчивой реализации

таких параметров пучка необходимы определенные режимы работы изохронного циклотрона. Оптимальным режимом будет являться такой, при котором с помощью системы управления с использованием ЭВМ проводится необходимая автоматическая коррекция параметров в процессе работы ускорителя. Одной из основных функций системы управления является обеспечение в процессе работы максимально возможной для данного ускорителя моноэнергетичности ускоренного пучка. Эта задача решается применением системы автоматической стабилизации фазы пролета сгустка частиц через ускоряющий промежуток^{1/}. Величина отклонения фазы пролета от заданной при определенных условиях однозначно определяет моноэнергетичность пучка на выходе циклотрона.

В настоящей работе рассмотрены общие аналитические зависимости, определяющие фазу пролета и энергию ускоренного пучка в изохронном циклотроне. Методом статистических испытаний на ЭВМ проведено математическое моделирование процесса автоматической стабилизации фазы пролета и получены энергетические распределения ускоренного пучка.

*Аналитическая теория фазовых процессов
в изохронных циклотронах*

Период обращения заряженной частицы в магнитном поле с пространственной вариацией можно представить в виде

$$T = \frac{2\pi \bar{r} (1 + \sigma)}{\beta c}, \quad /1/$$

где \bar{r} - средний радиус равновесной орбиты, σ - коэффициент, учитывающий удлинение орбиты из-за отличия ее формы от окружности.

Если представить магнитное поле в плоскости симметрии в форме

$$H_z(r, \theta) = H(r) \cdot \{1 + \epsilon \cdot \sin [a(\theta) - N\theta]\}, \quad /2/$$

то для частицы с постоянным импульсом p будет иметь место соотношение /2/

$$pc = eH(\bar{r}) \cdot \bar{r} \cdot \lambda, \quad /3/$$

где /3/

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{2N^2} \cdot (1,5 + n + \frac{r}{\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dr})}.$$

Коэффициент удлинения орбиты в этом случае определяется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4} \cdot \frac{\epsilon^2 N^2}{\lambda^2 \cdot (N^2 - 1 - n)^2}, \quad /4/$$

где N - число спиралей, $n = \frac{\bar{r}}{H} \cdot \frac{dH}{dr}$.

Условие поддержания изохронного режима соответствует $T = T_0$ на всех радиусах, где $T_0 = \frac{2\pi r_\infty}{c}$. При этом из /1/ и /3/ можно найти

$$h_s(\bar{r}) = \frac{H_s(\bar{r})}{H_0} = \frac{(1 + \sigma)}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\bar{r}(1 + \sigma)}{r_\infty} \right]^2}}, \quad /5/$$

где H_0 - магнитное поле в центре ускорителя, $r_\infty = \frac{E_0}{eH_0}$.

В случае малой глубины вариации ϵ средний радиус орбиты r близок к радиусу круговой орбиты в азимутально-симметричном поле R . Поэтому $\lambda = 1$, $pc = eH(R) \cdot R$, а формула /1/ принимает вид:

$$T = \frac{2\pi R \cdot (1 + \sigma_R)}{\beta c}, \quad /6/$$

тогда

$$h_s = \frac{(1 + \sigma_R)}{\sqrt{1 - \left[\frac{R \cdot (1 + \sigma_R)}{r_\infty} \right]^2}}, \quad /7/$$

где

$$\sigma_R = - \frac{\epsilon^2}{2(N^2 - 1 - n)(1 + n)} \cdot \left[2 - \frac{N^2}{2(N^2 - 1 - n)} + n + \frac{r}{\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dr} \right] + \frac{\epsilon^2 N^2}{4(N^2 - 1 - n)^2}$$

и учитывает как сжатие среднего радиуса орбиты, так и удлинение орбиты из-за волнообразной формы.

Сдвиг фазы, вызываемый неточным выполнением закона /5/, а также отклонением частоты ускоряющего

напряжения от заданной величины, можно описать выражением

$$\frac{d\phi}{dt} = q(\omega_s - \omega) + \Delta\omega_0 \quad /8/$$

Здесь q - кратность ускоряющего напряжения, ω - частота, определяемая из выражений /1/ и /3/, $\Delta\omega_0$ - отклонение частоты генератора от $q\omega_s$, $\omega_s = \frac{c}{r_\infty}$. Под-

ставляя вместо $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dr} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dE}{dt}$, определяя $\frac{dE}{dr}$ из выражения /3/ и полагая $\frac{dE}{dt} = \frac{eV_0}{2\pi} \omega \cdot \cos\phi$, можно най-

ти уравнение, определяющее связь между отклонением магнитного поля, отклонением частоты ускоряющего напряжения и вызываемым этими факторами сдвигом фазы:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{h}{r} \cdot \left\{ \frac{r_\infty^2 e V_0}{2\pi q E_0} \cdot \frac{\frac{d\phi}{dr} \cdot \cos\phi(\bar{r})}{(1+\sigma) h \bar{r} \lambda \left[1 - \frac{h\lambda}{(1+\sigma)\sqrt{1 + \left[\frac{\bar{r}h\lambda}{r_\infty} \right]^2} + \frac{r_\infty \Delta\omega_0}{c q} \right]} - \frac{\bar{r}}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dr} - 1 \right\} \quad /9/$$

Здесь eV_0 - максимальный набор энергии за оборот.

Решение этого дифференциального уравнения позволяет по известному сдвигу фазы вдоль радиуса восстановить реальное магнитное поле ускорителя $h(r)$.

Из /9/ можно найти формулу для определения фазового сдвига вдоль радиуса в зависимости от реального магнитного поля:

$$\begin{aligned} [\sin(\phi_H + \Delta\phi_H) - \sin\phi_H] &= \frac{2\pi q E_0}{r_\infty e V_0} \cdot \frac{\bar{r}_i}{\bar{r}_H} (1+\sigma) h \lambda \times \\ &\times \left[1 - \frac{h\lambda}{(1+\sigma)\sqrt{1 + \left[\frac{rh\lambda}{r_\infty} \right]^2} + \frac{r_\infty \Delta\omega_0}{c q}} \right] \times \\ &\times \left[1 + \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{r}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dr} \right] r dr. \end{aligned} \quad /10/$$

При численном решении уравнения /9/ возникает ряд трудностей, связанных с наличием полюса в правой части данного уравнения при $h = h_s$ и $\Delta\omega_0 = 0$, а также с наличием численной неустойчивости решения в зоне радиусов, где $\frac{d\phi}{dr} > 0$.

Для упрощения численного решения $h(r)$ раскладывается в ряд около синхронного поля h_s . Сохраняя только линейный член ряда $h = h_s + \Delta h$, из /9/ получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta h)}{dr} &= -\frac{h_s}{r} \cdot \left[\frac{r_\infty^2 e V_0}{2\pi q E_0} \cdot \frac{\frac{d\phi}{dr} \cdot \cos\phi \cdot \gamma_s h_s}{(1+\sigma)^2 \cdot \left[\Delta h - \gamma_s^2 h_s \cdot \frac{\Delta\omega_0 r_\infty}{c q} \right]} \right] + \\ &+ (1+n_{s0}) \cdot \left[1 + \frac{\bar{r}}{1+\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dr} \right], \end{aligned} \quad /11/$$

где

$$n_{s0} = \gamma_s^2 - 1, \quad h_s = \frac{1+\sigma}{\lambda} \cdot \gamma_s, \quad \gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{(1+\sigma)r}{r_\infty} \right]^2}}$$

Процесс численного решения этого уравнения устойчив, если выполнено условие $d\phi/dr < 0$, что легко достигается при решении уравнения /11/.

В случае незначительной величины градиентов $\frac{d(\Delta h)}{dr} \ll \frac{(1+n_{s0})h_s}{\bar{r}}$, что почти всегда выполняется при практических величинах $\Delta h(r)$, уравнение /11/ переходит в формулу

$$\left(\Delta h - \gamma_s^2 \cdot h_s \cdot \frac{r_\infty \Delta\omega_0}{c q} \right) = -\frac{r^2 e V_0}{2\pi q E_0} \cdot \frac{\frac{d\phi}{dr} \cdot \cos\phi(\bar{r}) \cdot h_s}{\gamma_s \cdot (1+\sigma)^2 \cdot \left[1 + \frac{\bar{r}}{1+\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dr} \right] \bar{r}} \quad /12/$$

Уравнение /11/ необходимо использовать при расчете движения фазы в краевом поле, где градиент $\frac{d(\Delta h)}{dr}$ может достигать значительных величин.

Из /12/ можно получить выражение для приближенного определения фазового сдвига при известных отклонениях поля от изохронного закона:

$$\begin{aligned} |\sin(\phi_H + \Delta\phi_H) - \sin\phi_H| = & - \frac{2\pi q E_0}{r_\infty^2 e V_0} \cdot \int_{\bar{r}_H}^{\bar{r}_i} \frac{\gamma_s \cdot (1+\sigma)^2}{h_s} \times \\ & \times \left[1 + \frac{r}{1+\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dr} \right] \cdot (\Delta h - \gamma_s^2 h_s \cdot \frac{r_\infty \Delta\omega_0}{c q}) r \cdot dr. \end{aligned} \quad /13/$$

Кинетическая энергия центра тяжести сгустка может быть найдена как

$$W = e V_0 \cdot \sum_{m=0}^N \cos\phi(\bar{r}_m), \quad /14/$$

где \bar{r}_m - средний радиус орбиты m -го оборота, W - кинетическая энергия частицы, прошедшей N оборотов, ϕ - значение фазы центра тяжести сгустка на m -ом обороте.

Для использования этой формулы необходимо знать величину среднего радиуса \bar{r}_m каждого оборота:

$$\bar{r}_m = \frac{r_\infty}{(1+\sigma) \cdot (\frac{W_s}{E_0})} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{2W}{E_0} + \left(\frac{W}{E_0}\right)^2} + \frac{e V_0 \cdot \frac{d\phi}{dr} \cdot \cos\phi}{2\pi q E_0 (1+\sigma) \cdot \left[1 + \frac{\bar{r}}{1+\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dr}\right]} \right\}. \quad /15/$$

Изменением фазы сгустка за один оборот во всех практически интересных случаях можно пренебречь. Поэтому, подставляя в /15/ значения энергии W и фазы ϕ предыдущего оборота, можно найти положение радиуса следующего оборота. Вычислив соответствующее этому

радиусу значение $\cos\phi$, можно из /14/ получить энергию центра тяжести сгустка на последующем обороте.

Применение метода статистических испытаний для оценки допусков на некоторые параметры изохронных циклотронов

Рассматривается применение метода статистических испытаний для определения на этапе проектирования циклотрона следующих величин при заданном разбросе энергии на конечном радиусе ускорения:

1. Необходимой точности шиммирования среднего поля.
 2. Числа корректирующих катушек.
- Существо предлагаемой методики состоит в следующем.

Ввиду того, что на этапе проектирования ускорителя неизвестно распределение отклонений реального поля от изохронного, предлагается гауссовское распределение этих отклонений, основанием для чего может служить вероятностная зависимость отклонений поля от большого числа различных параметров. Учитывая, что минимальное расстояние между соседними по r нулевыми значениями отклонений поля от изохронного, как правило, больше, чем половина зазора между полюсами магнитной системы, для имитации одной случайной зависимости $\Delta h(r)$ распределенные по нормальному закону случайные числа с некоторым значением $\sigma_{\Delta h}$ наносятся вдоль радиуса с интервалами, равными половине величины зазора магнитной системы.

Полученное таким образом распределение $\Delta h(r)$ обрабатывается по формулам /13/, /14/, /15/ для получения выходной энергии ускоренного пучка, а также зависимости $\phi(r)$, соответствующей полученному распределению $\Delta h(r)$. Затем имитируется новая случайная зависимость $\Delta h(r)$, рассчитывается соответствующее ей значение выходной энергии пучка и фазы вдоль радиуса и т.д.

После обработки достаточного числа зависимостей $\Delta h(r)$ получается гистограмма $N_i = f\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_{r=r_k}$, кото-

рая является функцией плотности распределения выходной энергии при выбранной величине $\sigma_{\Delta H}$, и гистограмма $N_i' = f(\Delta \phi)_{r_0 < r < r_k}$. Вышеизложенным способом можно получить зависимости

$$N_i = f\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_{r = r_k} \quad \text{и}$$

$$N_i' = f(\Delta \phi)_{r_0 < r < r_k} \quad \text{при различных значениях } \sigma_{\Delta H}^i \text{ и}$$

составить табличную зависимость между какой-либо вероятностной характеристикой разброса энергии либо фазы от величины $\sigma_{\Delta H}^i$. Пользуясь этой таблицей, по заданному разбросу энергии на выходе ускорителя либо по разбросу фазы пролета во всем диапазоне радиусов ускорения можно находить требуемое для его обеспечения среднеквадратическое значение отклонений магнитного поля от изохронного. Ниже дана зависимость $(\Delta W_{1/2})_{r = r_k}$ от $\sigma_{\Delta H}$, рассчитанная для ускорителя У-120М^{7/4}, где $(\Delta W_{1/2})_{r = r_k}$ - ширина гистограммы $N_i = f(\Delta W)_{r = r_k}$, вычисленная на ее полувысоте. Для построения одной гистограммы $N_i = f(\Delta W)_{r = r_k}$ использовалось ≈ 1000 имитирующих зависимостей $\Delta H(r)$. На рис. 1, 2, 3 приведены гистограммы для различных значений $\sigma_{\Delta H}$.

$\sigma_{\Delta H}$	/Э/	1	2	3
$\Delta W_{1/2}$	/кэВ/	12	45	70

Таким образом решается первая из перечисленных выше задач.

Число катушек, необходимое для сведения некоторой исходной зависимости $\Delta H^{\text{исх}}(r)$ к зависимости, при которой разброс энергии на выходе либо разброс фазы вдоль радиуса не превышает заданной величины, подбирается следующим образом. Исходные зависимости $\Delta H^{\text{исх}}(r)$ имитируются точно таким же способом, как при решении первой задачи, однако в этом случае $\sigma_{\Delta H}^{\text{исх}} \gg \sigma_{\Delta H}^i$. Полученные зависимости $\Delta H^{\text{исх}}(r)$ корректируются с помощью некоторого произвольного числа токовых катушек, например, методом наименьших квадратов, а затем вычисляются по формулам /13/, /14/, /15/ значения энергии на выходе ускорителя и разброс фаз вдоль радиуса $\Delta \phi(r)$, со-

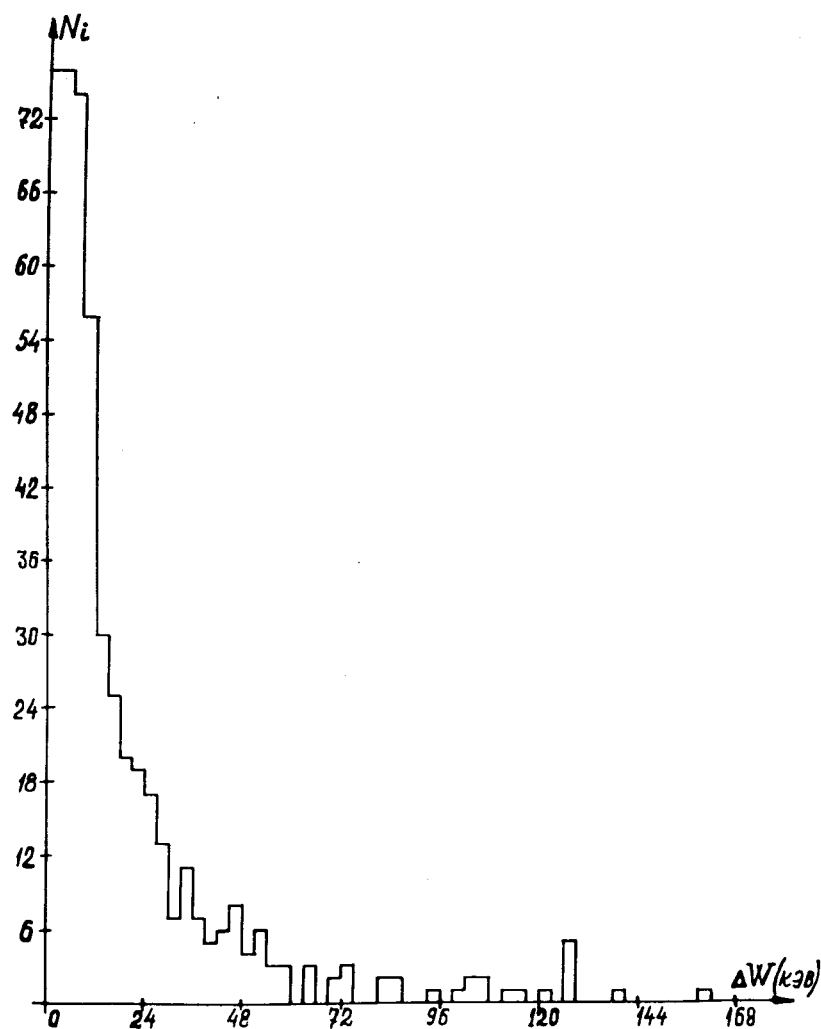


Рис. 1. Функция плотности вероятности для энергии пучка на конечном радиусе ускорителя при $\sigma_{\Delta H} = 1,0$ Э.

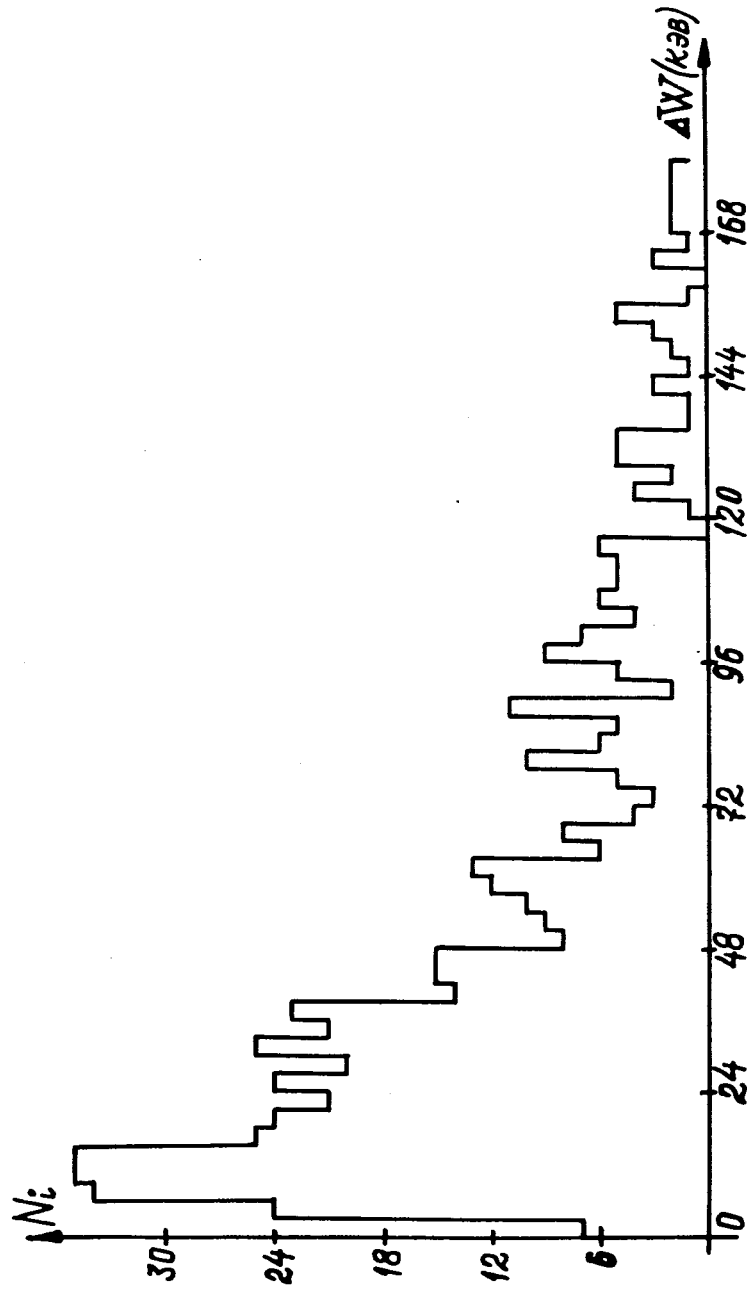


Рис. 2. Функция плотности вероятности для энергии пучка на конечном радиусе ускорителя при $\sigma_{\Delta H} = 2,0$ Э.

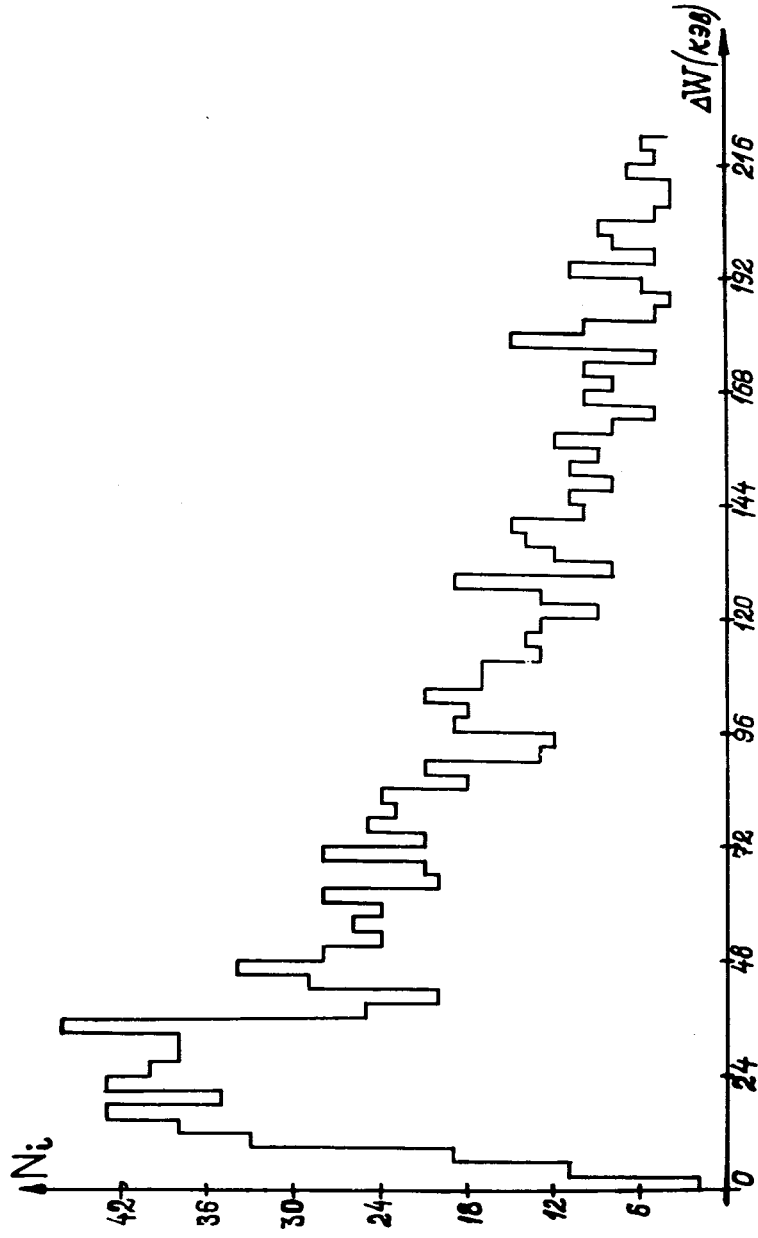


Рис. 3. Функция плотности вероятности для энергии пучка на конечном радиусе ускорителя при $\sigma_{\Delta H} = 3,0$ Э.

ответствующие оставшимся после коррекции величинам $\Delta H^{\text{скор.}}(r)$. Эффективность отработки $\Delta H^{\text{исх.}}(r)$ и соответствующих им $\Delta \phi^{\text{исх.}}(r)$ с помощью метода наименьших квадратов показана на гистограммах рис. 4, 5, 6, 7. Гистограммы рассчитаны для проекта моноэнергетического циклотрона^{5/}.

Перебирая затем последовательно вначале число катушек, а далее $\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}$, можно составить трехмерную таблицу $(\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}, N_{\text{кат.}}, \Delta W)$. Задаваясь при проектировании ускорителя либо величиной $(\frac{\Delta W}{W})_{r=r_k}$, либо $|\Delta \phi|_{\text{max}}$, из

полученной таблицы можно, руководствуясь каким-либо вероятностным критерием, выбрать определенную пару значений $\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}$ и $N_{\text{кат.}}$.

Экспериментальное моделирование подбора числа катушек по описанной выше методике было проведено на этапе проектирования моноэнергетического циклотрона. Ниже приводится таблица $(\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}, N_{\text{кат.}})$, составленная с учетом условия получения разброса энергии на конечном радиусе ускорения, равного ≈ 30 кэВ. Под разбросом энергии понимается ширина гистограммы $N_i = f(\Delta W)_{r=r_k}$ на полувысоте.

Экспериментальное моделирование подбора числа катушек по описанной выше методике было проведено на этапе проектирования моноэнергетического циклотрона. Ниже приводится таблица $(\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}, N_{\text{кат.}})$, составленная с учетом условия получения разброса энергии на конечном радиусе ускорения, равного ≈ 30 кэВ. Под разбросом энергии понимается ширина гистограммы $N_i = f(\Delta W)_{r=r_k}$ на полувысоте.

$\frac{\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}}{N_{\text{кат.}}}$ /Э/	1,0	1,5	2,0
	8	11	14

С помощью метода статистических испытаний может также решаться задача определения допуска на точность стабилизации основной обмотки циклотрона. Алгоритм действий в этом случае выглядит следующим образом. После того, как в результате решения первой и второй задач, описанных выше, найдено значение $\sigma_{\Delta H}^{\text{скор.}} = \sigma_{\Delta H}^1$

и соответствующее $(\frac{\Delta W}{W})_{r=r_k}^{\text{задан.}}$, имитируя наложение

нестабильности поля основной обмотки на оставшееся нескорректированным поле ускорителя, складываем одну из случайных кривых $\Delta H^{\text{скор.}}(r)$ с постоянной вдоль радиуса $\Delta H^{\text{дрейфа}}(r)$, величина которой подчиняется нормальному

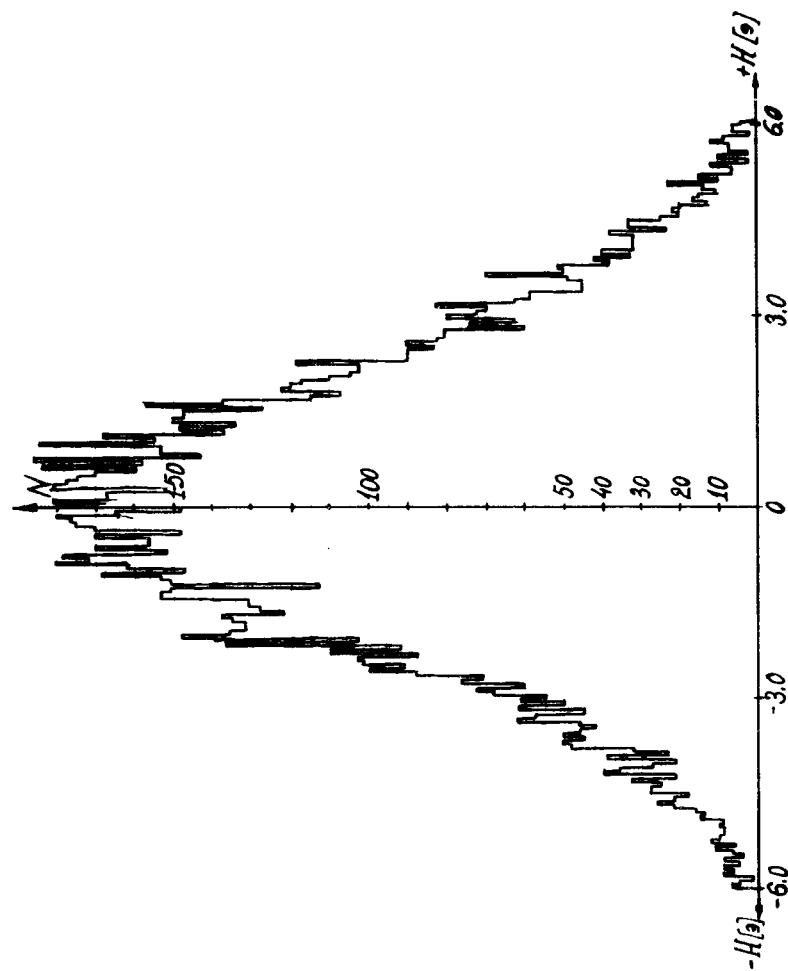


Рис. 4. Функция плотности вероятности для нескорректированных значений $\sigma_{\Delta H}^{\text{исх.}}$ отклонений поля от изохронного закона.

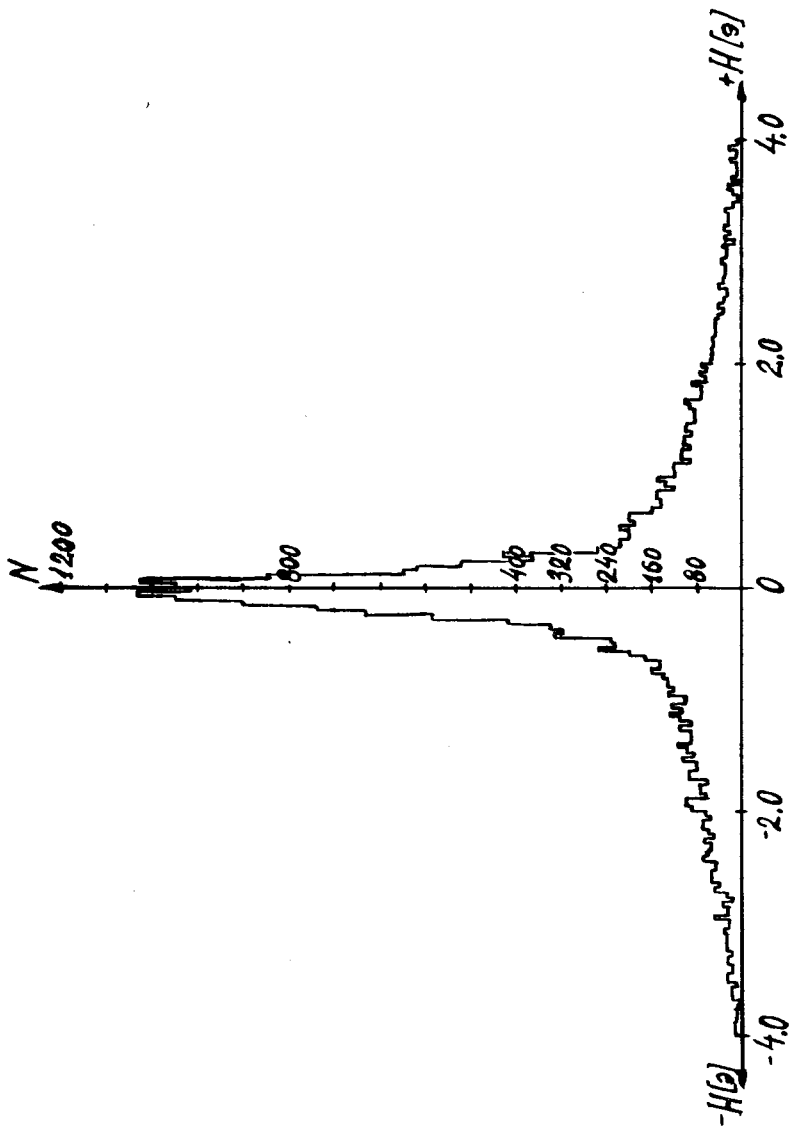


Рис. 5. Функция плотности вероятности для скорректированных с помощью метода наименьших квадратов значений $\sigma_{\Delta H}^{\text{сбор.}}$ отклонений поля от изохронного закона.

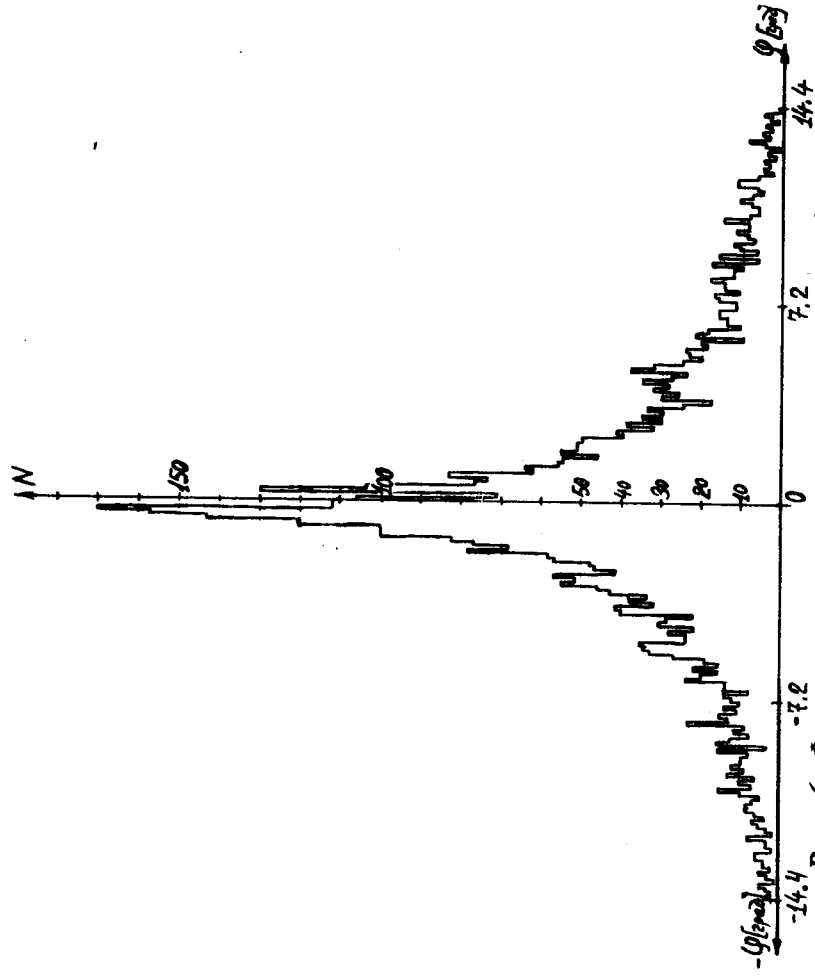


Рис. 6. Функция плотности вероятности для фазовой зависимости вдоль радиуса, соответствующей нескорректированному магнитному полю.

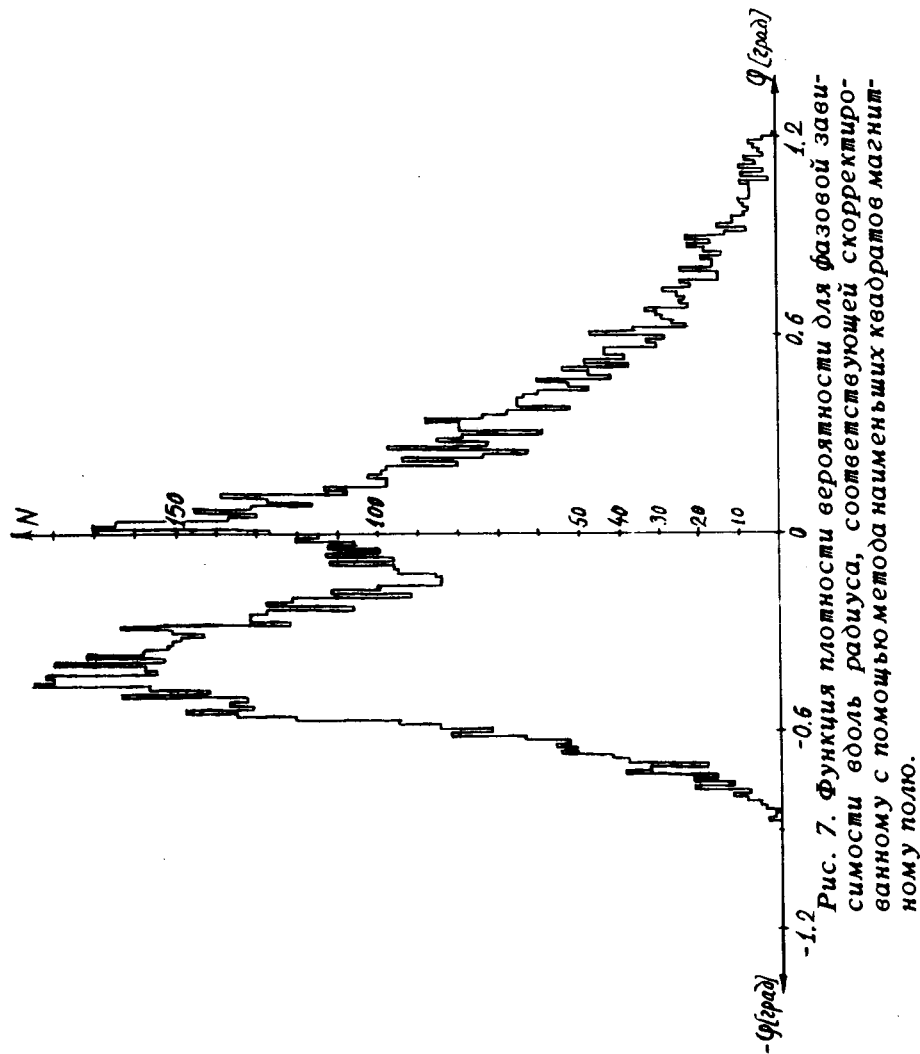


Рис. 7. Функция плотности вероятности для фазовой зависимости вдоль радиуса, соответствующей скорректированному с помощью метода наименьших квадратов магнитному полю.

распределению с $\sigma = \sigma_{\text{дрейфа}} \Delta N$. Суммарная кривая $\Delta N_{\Sigma} = \Delta N^{\text{скор.}}(r) + \Delta N^{\text{дрейфа}}(r)$ обрабатывается по формулам /13/, /14/, /15/, что, как и в случае решения первой задачи, позволяет найти вероятностную связь между разбросом энергии на выходе ускорителя либо разбросом фаз вдоль радиуса для выбранной случайной кривой из семейства кривых $\Delta N^{\text{скор.}}(r)$ и при величине дрейфа поля основной обмотки, соответствующей $\sigma_{\Delta N}^{\text{дрейфа}}$. Перебирая достаточно большое количество случайных кривых $\Delta N^{\text{скор.}}(r)$, для выбранного значения $\sigma_{\Delta N}^{\text{дрейфа}}$ строим усредненную функцию плотности распределения энергии на выходе ускорителя, либо усредненную функцию плотности для фазы пролета $N_i = f(\Delta\phi)_{r_0 < r < r_k}^{\text{ср.}}$. Такие усредненные функции плотности можно построить для различных значений $\sigma_{\Delta N}^{\text{дрейфа}}$ и подобрать такое его значение, которое обеспечит либо заданную величину $(\frac{\Delta W}{W})_{r=r_k}^{\text{ср.}}$, либо $|\Delta\phi|_{r_0 < r < r_k}^{\text{ср. max}}$.

В заключение отметим, что изложенная в данной работе методика позволяет с заданной степенью достоверности выбирать допуски на точность шиммирования и стабилизации среднего поля при проектировании изохронных циклотронов, исходя либо из допустимого разброса энергии на выходе ускорителя, либо из допустимого разброса фаз во всем диапазоне радиусов ускорения, в то время как методы отыскания допусков на точность шиммирования и стабилизации среднего поля, описываемые в работах /4,5/, оценивают лишь максимальные значения этих допусков, не учитывая вероятности появления максимальных ошибок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгоритм отыскания токов, корректирующих сдвиг фазы вдоль радиуса и энергетический разброс пучка

Коррекция отклонений реального среднего поля от изохронного закона, вызывающих фазовое движение частиц и энергетический разброс в пучке на конечных ра-

двух, может быть осуществлена системой концентрических обмоток, как правило, имеющих на изохронных циклотронах. Предлагаемый алгоритм позволяет находить значения токов в корректирующих катушках из условия минимизации функционала следующего вида:

$$F = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \sin \phi_i^{\exists} - \Delta \sin \phi_i^T)^2}{\sigma_i}, \quad /16/$$

$$\Delta \sin \phi_i^{\exists} = \sin \phi_i^{\exists} - \sin \phi_0^{\exists},$$

$$\Delta \sin \phi_i^T = \sin \phi_i^T - \sin \phi_0^T,$$

где ϕ_i^{\exists} - экспериментально измеряемые с ошибкой σ_i фазовые сдвиги в различных точках по радиусу r_i , ϕ_i^T - значения фазовых сдвигов в тех же точках r_i , вычисленные по формуле /13/. Из /13/ и /16/ видно, что функционал F содержит в качестве независимых переменных токи коррекции. Дифференцируя F по этим переменным и приравнявая полученные выражения к нулю, получим систему уравнений, решение которой позволит найти токи, обеспечивающие минимум функционала F . Система уравнений будет линейной, если принять допущение о слабой зависимости поля каждой обмотки от уровня намагничивания основной магнитной цепи ускорителя. В матричном виде линейная система уравнений запишется следующим образом:

$$[A_{ij}] \cdot [\Delta I_j] = [B_i], \quad /17/$$

$$\text{где } A_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{b^2}{H_0^2} \cdot \int_{r_0}^{r_k} G_i \, r \, dr \cdot \int_{r_0}^{r_k} G_j \, r \, dr,$$

$$B_i = \sum_{k=1}^N (\sin \phi_k^{\exists} - \sin \phi_0^{\exists}) \cdot \left(-\frac{b}{H_0} \cdot \int_{r_0}^{r_k} G_i \, r \, dr \right), \quad /18/$$

$$b = \frac{2\pi q E_0}{r_{\infty}^2 e V_0}.$$

Выражения для $G_{i,j}$ имеют вид: /6/

$$G_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_i}{R_j}\right)^2 + \left(\frac{h_j}{R_j}\right)^2}} \cdot \{F_0(a) + E_0(a) \times [1 - \left(\frac{r_i}{R_j}\right)^2 - \left(\frac{h_j}{R_j}\right)^2] \times \frac{1}{\left(1 - \frac{r_i}{R_j}\right)^2 + \left(\frac{h_j}{R_j}\right)^2}}\}. \quad /19/$$

$F_0(a)$ и $E_0(a)$ - эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

$$a = \sqrt{1 - \frac{4R_j r_i}{(R_j + r_i)^2 + h_j^2}}. \quad /20/$$

Система /17/ легко решается на малых ЭВМ типа М-6000, "Хьюлетт-Паккард-2116С" и т.п. /7/, что позволяет автоматизировать процесс коррекции фазовых сдвигов и, как следствие этого, минимизировать разброс энергии в выводимом пучке, обусловленный этим фактором.

Литература

1. R.A. de Forest. *Fifth Intern. Cyclotron Conference, Oxford, 1969, 141.*
2. А.А. Коломенский, А.А. Лебедев. *Теория циклических ускорителей. Физматгиз, Москва, 1962.*
3. V.P. Dmitrievsky, V.V. Kolga, N.I. Polunordvinova. *Proc. of the 8th Intern. Conf. on High Energy Accelerators, CERN, 1971, 578.*
4. Ю.Г. Аленицкий и др. *Препринт ОИЯИ, Р9-6241, Дубна, 1972.*
5. А.А. Глазов и др. *Препринт ОИЯИ, Р9-3932, Дубна, 1968.*
6. В.И. Данилов и др. *Препринт ОИЯИ, Р-702, Дубна, 1961.*
7. В.Н. Аносов и др. *Препринт ОИЯИ, Р9-7339, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 30 декабря 1974 года.