СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

9 - 8

В.И.Данилов, Э.А.Полферов

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ФЕРРОМАГНИТНЫЙ ОБРАЗЕЦ, ПОМЕЩЕННЫЙ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

9 - 8408

В.И.Данилов, Э.А.Полферов

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ФЕРРОМАГНИТНЫЙ ОБРАЗЕЦ, ПОМЕЩЕННЫЙ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

На ферромагнитное тело объемом dv, помещенное в магнитное поле, действует элементарная сила

$$d\vec{F} = \nabla[\vec{M}\cdot\vec{H}]\,dv, \qquad /1/$$

где $\vec{M}$ - магнитный момент единичного объема, $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля внутри dv, ∇ - оператор набла.

Раскрывая выражение /1/ в предположении, что намагниченность $\vec{M}$ постоянна и равна предельному значению, достигаемому при насыщении, а токи проводимости внутри объема dv отсутствуют, получаем

$$d\vec{F} = (\vec{M}\nabla)\vec{H}dv = (M_x\frac{\partial}{\partial x} + M_y\frac{\partial}{\partial y} + M_z\frac{\partial}{\partial z})\vec{H}\,dv. \qquad /2/$$

При условии, что намагничивание рассматриваемых образцов производится в основном только по вертикальному направлению z, т.е. когда с достаточной точностью $M_x = M_y = 0$, а $M_z = M = 21000/4\pi$, имеем

$$d\vec{F} = M\frac{\partial\vec{H}}{\partial z}dv. \qquad /3/$$

Отсюда получаем компоненты силы dF:

$$dF_x = M\frac{\partial H_x}{\partial z}dv,\ dF_y = M\frac{\partial H_y}{\partial z}dv,\ dF_z = M\frac{\partial H_z}{\partial z}dv, \qquad /4/$$

или с учетом соотношения $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$:

$$dF_x = M\frac{\partial H_z}{\partial x}dv,\ dF_y = M\frac{\partial H_z}{\partial y}dv,\ dF_z = \frac{\partial H_z}{\partial z}dv. \qquad /5/$$

Отсюда компонента силы F_s может быть определена следующим образом:

$$F_s = \iiint\limits_V M \frac{\partial H_z}{\partial s} dv, \qquad /6/$$

где индекс s принимает значения x, y, z соответственно.

В общем случае компоненты сил можно определить только численным интегрированием.

Однако во многих практических случаях важно оценивать силы, действующие между плоскопараллельными ферромагнитными пластинами.

Для этого частного случая выражение вертикальной составляющей от плоскопараллельной пластины имеет вид /2/

$$H_z = M \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+1} \operatorname{arctg} \frac{y+a_i}{z+h_i} \frac{x+\ell_i}{\sqrt{(x+\ell_i)^2+(y+a_i)^2+(z+h_i)^2}}. \qquad /7/$$

Размеры бруска вдоль осей x, y, z равны $2\ell, 2a, 2h$ соответственно. Величины a_i, ℓ_i, h_i определяются как

$$a = -a_1 = -a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = -a_7 = -a_8,$$

$$\ell = -\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = -\ell_4 = -\ell_5 = \ell_6 = \ell_7 = -\ell_8,$$

$$h = -h_1 = -h_2 = -h_3 = -h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = h_8.$$

Компоненты сил, возникающие при взаимодействии двух прямоугольных шимм, помещенных в однородное внешнее магнитное поле в системе координат, показанной на рис. 1, определяются из /6/ при учете /7/ следующим образом:

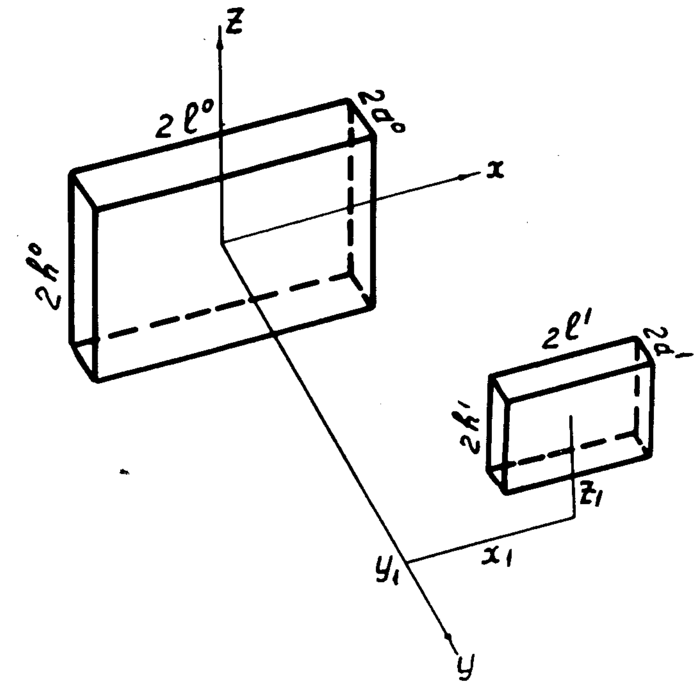

Рис. 1. Взаимное расположение двух брусков в декартовой системе координат X, Y, Z.

$$F_x = M^2 \sum_{i=1}^{8} \int_{x_1-\ell^1}^{x_1+\ell^1} \int_{y_1-a^1}^{y_1+a^1} \int_{z_1-h^1}^{z_1+h^1} \frac{(z+h_i^\circ)(x+\ell_i^\circ)\,dx\,dy\,dz}{[(y+a_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2]\sqrt{(x+\ell_i^\circ)^2+(y+a_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2}}; \qquad /8/$$

$$F_y = M^2 \sum_{i=1}^{8} \int_{x_1-\ell^1}^{x_1+\ell^1} \int_{y_1-a^1}^{y_1+a^1} \int_{z_1-h^1}^{z_1+h^1} \frac{(z+h_i^\circ)(y+a_i^\circ)\,dx\,dy\,dz}{[(x+\ell_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2]\sqrt{(x+\ell_i^\circ)^2+(y+a_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2}}; \qquad /9/$$

$$F_z = -M^2 \sum_{i=1}^{8} \int_{x_1-\ell^1}^{x_1+\ell^1} \int_{y_1-a^1}^{y_1+a^1} \int_{z_1-h^1}^{z_1+h^1} \frac{(x+\ell_i^\circ)(y+a_i^\circ)}{\sqrt{(x+\ell_i^\circ)^2+(y+a_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2}} \times$$
$$\times\left[\frac{1}{(y+a_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2} + \frac{1}{(x+\ell_i^\circ)^2+(z+h_i^\circ)^2}\right] dx\,dy\,dz. \qquad /10/$$

Введем обозначения:

$$X_{ik} = x_1 + \ell_i^\circ + \ell_k^1,$$
$$Y_{ik} = y_1 + a_i^\circ + a_k^1,$$
$$Z_{ik} = z_1 + h_i^\circ + h_k^1,$$
$$P_{ik} = \sqrt{X_{ik}^2 + Y_{ik}^2 + Z_{ik}^2}.$$

Здесь

$$\ell_i^\circ = \ell_i, \quad a_i^\circ = a_i, \quad h_i^\circ = h_i;$$
$$\ell^1 = \ell_1^1 = \ell_2^1 = -\ell_3^1 = -\ell_4^1 = \ell_5^1 = \ell_6^1 = -\ell_7^1 = -\ell_8^1;$$
$$a^1 = a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = a_4^1 = -a_5^1 = -a_6^1 = -a_7^1 = -a_8^1;$$
$$h^1 = h_1^1 = -h_2^1 = -h_3^1 = h_4^1 = -h_5^1 = h_6^1 = h_7^1 = -h_8^1.$$

Величины F_x, F_y, F_z в принятых обозначениях имеют вид

$$F_x = \frac{M^2}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k+1}\Big[Y_{ik}P_{ik} + (Z_{ik}^2 - X_{ik}^2)\,\mathrm{Arsh}\frac{Y_{ik}}{\sqrt{X_{ik}^2+Z_{ik}^2}} +$$
$$+ X_{ik}Y_{ik}\ln\frac{P_{ik}-X_{ik}}{P_{ik}+X_{ik}} + 2X_{ik}Z_{ik}\,\mathrm{arctg}\frac{X_{ik}Y_{ik}}{Z_{ik}P_{ik}}\Big], \qquad /11/$$

$$F_y = \frac{M^2}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k+1}\Big[X_{ik}P_{ik} + (Z_{ik}^2 - Y_{ik}^2)\,\mathrm{Arsh}\frac{X_{ik}}{\sqrt{Y_{ik}^2+Z_{ik}^2}} +$$
$$+ X_{ik}Y_{ik}\ln\frac{P_{ik}-Y_{ik}}{P_{ik}+Y_{ik}} + 2Y_{ik}Z_{ik}\,\mathrm{arctg}\frac{X_{ik}Y_{ik}}{Z_{ik}P_{ik}}\Big], \qquad /12/$$

$$F_z = M^2 \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} \left[X_{ik} Y_{ik} \operatorname{arctg} \frac{Z_{ik} P_{ik}}{X_{ik} Y_{ik}} + Z_{ik} P_{ik} + \frac{Z_{ik}}{2} \left(X_{ik} \ln \frac{P_{ik} - X_{ik}}{P_{ik} + X_{ik}} + Y_{ik} \ln \frac{P_{ik} - Y_{ik}}{P_{ik} + Y_{ik}} \right) \right]. \qquad /13/$$

Рассмотрим частный случай:

1. $a^{\circ} = a^1 = a, \quad \ell^{\circ} = \ell^1 = \ell, \quad h^{\circ} = h^1 = h$.

При этих соотношениях сила F_x для $x_1 = 0$, $z_1 = 0$ /см. рис. 1/ определяется как

$$F_x = M^2 (R_1 + R_2 + R_3 + R_4), \qquad /14/$$

где

$$R_1 = 2y_1 \left(\sqrt{y_1^2 + 4\ell^2 + 4h^2} - \sqrt{y_1^2 + 4\ell^2} - \sqrt{y_1^2 + 4h^2} \right) -$$

$$-(y_1 - 2a) \left[\sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} - \sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2} - \sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4h^2} \right] -$$

$$-(y_1 + 2a) \left[\sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} - \sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2} - \sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4h^2} \right] -$$

$$-8a^2 ,$$

$$R_2 = 2\ell \left[2y_1 \ln \frac{\left(\sqrt{y_1^2 + 4\ell^2 + 4h^2} - 2\ell \right) \left(\sqrt{y_1^2 + 4\ell^2} + 2\ell \right)}{\left(\sqrt{y_1^2 + 4\ell^2 + 4h^2} + 2\ell \right) \left(\sqrt{y_1^2 + 4\ell^2} - 2\ell \right)} - \right.$$

$$-(y_1 - 2a) \ln \frac{\left(\sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} - 2\ell \right) \left(\sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2} + 2\ell \right)}{\left(\sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} + 2\ell \right) \left(\sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2} - 2\ell \right)} -$$

$$\left. -(y_1 + 2a) \ln \frac{\left(\sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} - 2\ell \right) \left(\sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2} + 2\ell \right)}{\left(\sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} + 2\ell \right) \left(\sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2} - 2\ell \right)} \right],$$

$$R_3 = 4\ell h \left[2 \operatorname{arctg} \frac{y_1 \ell}{h \sqrt{y_1^2 + 4\ell^2 + 4h^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(y_1 - 2a)\ell}{h \sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{(y_1 + 2a)\ell}{h \sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2}} \right],$$

$$R_4 = 4 \left[(h^2 - \ell^2) \ln \frac{\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4\ell^2 + 4h^2} \right)^2}{\left(y_1 + 2a + \sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} \right) \left(y_1 - 2a + \sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2 + 4h^2} \right)} \right.$$

$$+ \ell^2 \ln \frac{\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4\ell^2} \right)^2}{\left(y_1 + 2a + \sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4\ell^2} \right) \left(y_1 - 2a + \sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4\ell^2} \right)} -$$

$$\left. - h^2 \ln \frac{\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4h^2} \right)^2}{\left(y_1 + 2a + \sqrt{(y_1 + 2a)^2 + 4h^2} \right) \left(y_1 - 2a + \sqrt{(y_1 - 2a)^2 + 4h^2} \right)} \right].$$

2. Рассмотрим случай, когда между пластинами действует только сила F_z, т.е. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Введем обозначения :

$$p = \sqrt{z_1^2 + 4a^2 + 4\ell^2} \ ,$$

$$p_+=\sqrt{(z_1+2h)^2+4a^2+4\ell^2}\,,\qquad p_-=\sqrt{(z_1-2h)^2+4a^2+4\ell^2}\,,$$

$$p_\ell=\sqrt{z_1^2+4\ell^2}\,,\qquad p_a=\sqrt{z_1^2+4a^2}\,,$$

$$p_{+\ell}=\sqrt{(z_1+2h)^2+4\ell^2}\,,\qquad p_{+a}=\sqrt{(z_1+2h)^2+4a^2}\,,$$

$$p_{-\ell}=\sqrt{(z_1-2h)^2+4\ell^2}\,,\qquad p_{-a}=\sqrt{(z_1-2h)^2+4a^2}\,.$$

Тогда

$$\frac{F_z}{M^2}=16\,a\,\ell\Big[2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z_1 p}{4a\ell}-\mathrm{arctg}\,\frac{(z_1-2h)p_-}{4a\ell}-\mathrm{arctg}\,\frac{(z_1+2h)p_+}{4a\ell}\Big]+$$

$$+4\ell\Big[2z_1\Big(\ln\frac{p-2\ell}{p+2\ell}-\ln\frac{p_\ell-2\ell}{p_\ell+2\ell}\Big)-$$

$$-(z_1-2h)\Big(\ln\frac{p_--2\ell}{p_-+2\ell}-\ln\frac{p_{-\ell}-2\ell}{p_{-\ell}+2\ell}\Big)-(z_1+2h)\Big(\ln\frac{p_+-2\ell}{p_++2\ell}-\ln\frac{p_{+\ell}-2\ell}{p_{+\ell}+2\ell}\Big)\Big]+$$

$$+4a\Big[2z_1\Big(\ln\frac{p-2a}{p+2a}-\ln\frac{p_a-2a}{p_a+2a}\Big)- \qquad /15/$$

$$(z_1-2h)\Big(\ln\frac{p_--2a}{p_-+2a}-\ln\frac{p_{-a}-2a}{p_{-a}+2a}\Big)-(z_1+2h)\Big(\ln\frac{p_+-2a}{p_++2a}-\ln\frac{p_{+a}-2a}{p_{+a}+2a}\Big)\Big]+$$

$$+4\big[2z_1(z_1+p-p_a-p_\ell)-(z_1-2h)(z_1-2h+p_--p_{-a}-p_{-\ell})-$$

$$-(z_1+2h)(z_1+2h+p_+-p_{+a}-p_{+\ell})\big].$$

Теперь положим, что $h\to\infty$, т.е. рассматриваем очень длинные в направлении z пластины. Обозначив зазор между пластинами через g, запишем

$$\frac{F_z}{M^2}=4g\big(\sqrt{g^2+4\ell^2}+\sqrt{g^2+4a^2}-\sqrt{g^2+4a^2+4\ell^2}-g\big)+$$

$$+16a\cdot\ell\Big(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\frac{g\sqrt{g^2+4a^2+4\ell^2}}{4a\ell}\Big)+$$

$$+4g\Big[\ell\cdot\ln\frac{(\sqrt{g^2+4\ell^2}-2\ell)(\sqrt{g^2+4a^2+4\ell^2}+2\ell)}{(\sqrt{g^2+4\ell^2}+2\ell)(\sqrt{g^2+4a^2+4\ell^2}-2\ell)}+$$

$$+a\cdot\ln\frac{(\sqrt{g^2+4a^2}-2a)(\sqrt{g^2+4a^2+4\ell^2}+2a)}{(\sqrt{g^2+4a^2}+2a)(\sqrt{g^2+4a^2+4\ell^2}-2a)}\Big].$$

Из этого выражения следует, что при g, много меньшем a и ℓ, сила F_z не зависит от g и будет равна

$$F_z=2\pi M^2 S\,, \qquad /17/$$

где S - площадь сечения пластины плоскостью, перпендикулярной z.

Зависимости полученной силы F_z /деленной на M^2S / от относительной величины $g/2\ell$ для некоторых значений $g/2a$ представлены на рис. 2.

Из рисунка следует, что кривые пересекают ось $(F_z/M\,S)$ в точках

$$2\pi-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{g}{2a}+\frac{g}{a}\ln\frac{g^2}{g^2+4a^2}.$$

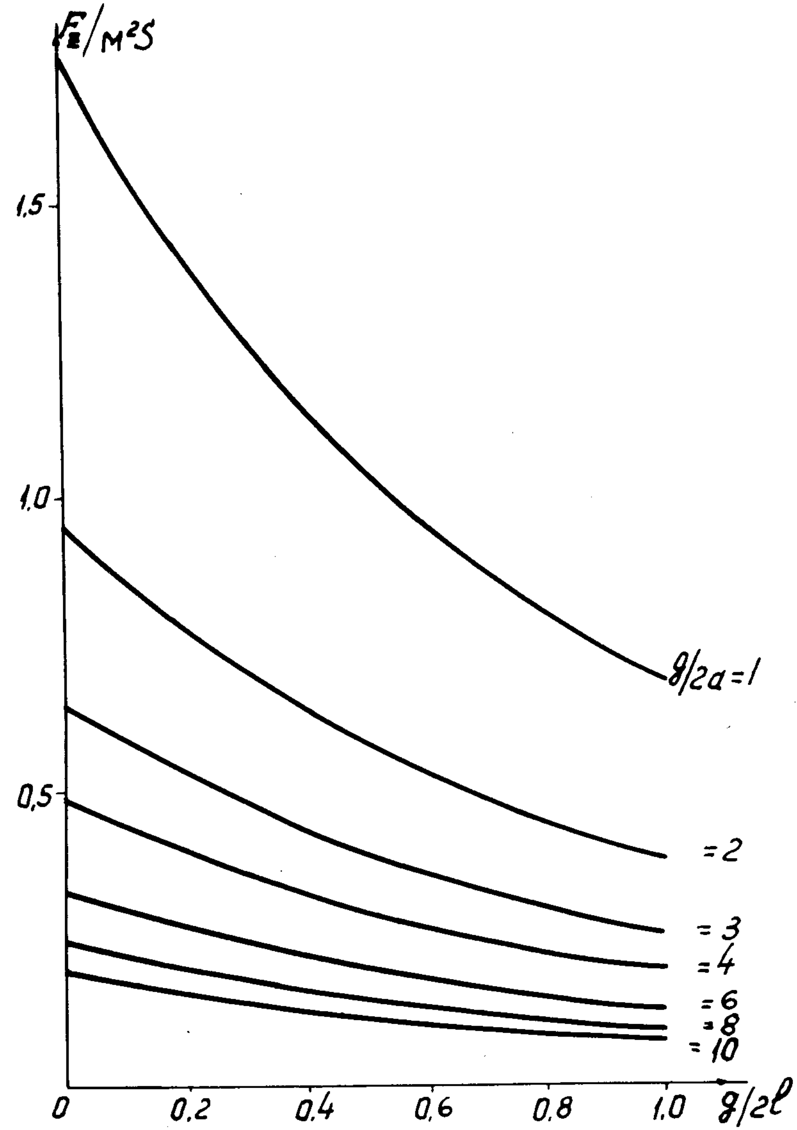

Рис. 2. Зависимость сил, действующих между двумя бесконечно длинными шиммами, от величины зазора между ними.

В заключение отметим, что изложенный метод был использован при конструировании магнитного канала синхроциклотрона ОИЯИ для расчета сил, действующих между отдельными шиммами его секций.

Литература

1. *И.Е.Тамм. Основы теории электричества, ГИТТЛ, Москва, 1959.*
2. *В.И.Данилов, О.В.Савченко. ПТЭ, № 3, 17-20, 1959.*

Рукопись поступила в издательский отдел 28 ноября 1974 года.