сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9-84-622

Д.Х.Динев

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ РАССТАНОВКИ ДИПОЛЬНЫХ МАГНИТОВ В СИНХРОТРОНЕ

1984

ВВЕДЕНИЕ

В процессе сооружения ускорителей типа синхротрона возникает вопрос об оптимальном размещении дипольных магнитов. О том, насколько оптимально размещены диполи по периметру синхротрона, естественно судить по величине смещения замкнутой орбиты.

Как известно, смещение орбиты от ее идеального положения вызывается ошибками в величине магнитного поля ΔB, в юстировке диполей Δx^{B} и квадруполей Δx^{g} /1/. Переставляя диполи, мы можем изменять распределение ошибки в магнитном поле ΔB по периметру синхротрона. Тем самым мы меняем орбиту в горизонтальной плоскости и величину ее искажения. На ошибки в юстировке мы влиять не можем и они остаются случайными.

Пусть $B = \{\Delta B_1, \Delta B_2, ..., \Delta B_M\}$ - множество дипольных ошибок; M - число диполей. Поскольку B - конечное множество, то перед нами возникает оптимизационная задача дискретного программирования /2/.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем описывать орбиту при помощи переменных-обобщенного азимута ϕ и нормированного смещения η:

$$\phi = \int_0^s \frac{ds}{Q\beta(s)}, \qquad /1/$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \qquad /2/$$

где s - продольная координата; x - поперечное смещение; $\beta(s)$ - амплитудная функция Твисса; Q - число бетатронных колебаний за оборот.

Смещение орбиты в данной точке дается выражением /1/:

$$\eta_i = \eta(\phi_i) = \sum_{j=1}^{M+L} a_{ij}\delta_j, \quad \phi_i \le \phi_j \le \phi_i + 2\pi, \qquad /3/$$

$$a_{ij} = \cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j), \qquad /4/$$

где L - число квадруполей; ϕ_j - азимуты магнитных элементов; δ_j - обобщенные ошибки.

Для случая дипольных ошибок

$$\delta_j = -\frac{Q\beta_j^{3/2}\,\Delta\phi_j}{2\sin\pi Q\,B_0\rho}\,\Delta B_j, \qquad /5/$$

где $B_0\rho$ - магнитная жесткость.

Замкнутая орбита является суммой орбит, связанных с ошибками в магнитном поле диполей и в положении квадруполей: $\eta = \eta^B + \eta^g$. Оценка смещения орбиты дает функционал

$$q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta^2(\phi)\,d\phi. \qquad /6/$$

Можно показать[3], что

$$2q = \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{2N}\eta_p^{g2} + \sum_{p=1}^{2N}\sum_{q=1}^{M}A_{pq}\eta_p^g\delta_q^B + \sum_{q=1}^{M}\sum_{r=1}^{M}B_{qr}\,\delta_q^B\delta_r^B. \qquad /7/$$

Здесь 2N - число точек наблюдения, δ^B - обобщенные дипольные ошибки /5/, A_{pq}, A_{qr}- коэффициенты, определенным образом зависящие от азимутов диполей и точек наблюдения.

Поскольку мы не можем управлять юстировкой квадруполей, т.е. η^g, то будем оптимизировать только последнюю сумму:

$$q' = \sum_{q=1}^{M}\sum_{r=1}^{M}B_{qr}\,\delta_q^B\delta_r^B. \qquad /8/$$

Пусть диполи расставлены в соответствии с перестановкой

$$X = (\Delta B_{k_1},\ \Delta B_{k_2},\ \ldots,\ \Delta B_{k_M}),\ k_i \in \{1,2,\ldots,M\},\ k_i \neq k_j,\ i \neq j. \qquad /9/$$

Тогда

$$\eta_i^B = \sum_{j=1}^{M} a_{ij}\,\Delta B_{k_j}, \qquad /10/$$

где

$$a_{ij} = -\frac{\sqrt{\beta_j}\,\Delta s_j}{2B_0\rho\,\sin\pi Q}\cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j). \qquad /11/$$

Если ввести коэффициенты

$$c_{ijk} = a_{ij}\,\Delta B_k, \qquad /12/$$

то можно записать:

$$\eta_i^B = \sum_{j=1}^{M} c_{ijk_j}\ (X). \qquad /13/$$

Так как мы будем оптимизировать только часть η^B орбиты, то впредь будем опускать индекс B .

Введем целочисленные переменные x_{jk}:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если к-й диполь поставлен на j-том месте,} \\ 0 & \text{-в противном случае.} \end{cases} \qquad /14/$$

Переменные x_{jk} удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{M} x_{jk} = 1, \qquad /15/$$

$$\sum_{j=1}^{M} x_{jk} = 1. \qquad /16/$$

Условие /15/ означает, что в одном месте можно поставить только один диполь, а условие /16/ - что один диполь может быть поставлен только в одном месте.

При помощи переменных x_{jk} можно записать часть q′ /8/, подлежащую оптимизации, в следующем виде:

$$q' = \sum_{q=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} a_{qmrn}\,x_{qm}\,x_{rn} \to \min, \qquad /17/$$

где

$$a_{qmrn} = \frac{B_{qr}\,\Delta B_m\,\Delta B_n\sqrt{\beta_q\beta_r}\,\Delta s_q\,\Delta s_r}{(2\sin\pi Q\,B_0\rho)^2}. \qquad /18/$$

Задача о нахождении минимума /17/ при условиях /14-16/ известна в дискретном программировании как "квадратичная задача о назначениях". К сожалению, при больших размерностях эту задачу решить трудно[4]. Так, например, в[4] решена задача с размерностью 19x19. В ускорителях как раз имеем случай большой размерности. Поэтому здесь мы применили другой подход, стремясь максимально использовать специфику задачи.

Множество дипольных ошибок B порождает комбинаторное пространство перестановок P_B. Точки в этом пространстве - это всевозможные перестановки X /9/, а его мощность $\bar{\bar{P}}_B = M!$.

Введем в пространстве P_B метрику следующим образом: расстояние $r(X, Y)$ между точками X и Y будем считать равным минимальному числу транспозиций /элементарных перемещений/, приводящих точку X в точку Y.

В этой работе i означает номер точки наблюдения; j - номер точки, в которой необходимо поставить диполь; k - номер диполя.

2. АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА И ИСКЛЮЧЕНИЯ ВАРИАНТОВ

Для нахождения оптимального расположения диполей, при котором орбита имеет наименьшее искажение, применяется алгоритм последовательного анализа и исключения вариантов.

Обозначим через $G_П$ множество перспективных точек /вариантов/, а через $G_Н$ - множество неперспективных точек.

Нулевой шаг. На нулевом шаге полагаем $G_П^0 = P_B$ и $G_Н^0 = \emptyset$. Выберем произвольную точку $X_0 \in G_П^0 = P_B$.

Первый шаг. Пусть

$$M_0 = \max_i |\eta_i(X_0)|. \qquad /19/$$

Разделим $G_П^0$ на два непересекающихся подмножества: на перспективную часть $G_{П,П}^0$ и на неперспективную часть $G_{П,Н}^0$ в соответствии с

$$G_П^0 = G_{П,Н}^0 \cup G_{П,П}^0, \quad G_{П,Н}^0 \cap G_{П,П}^0 = \emptyset, \qquad /20/$$

$$G_{П,Н}^0 = \{X: X \in G_П^0, \bigcup_{i=1}^{2N} |\eta_i(X)| > p_0 M_0\}, \qquad /21/$$

где $0 < p_0 < 1$ - выбранный подходящим образом коэффициент /вес/.

Орбиту контролируем в $2N$ точках, $i = 1, 2, \ldots, 2N$.

Соответственно

$$G_{П,П}^0 = \{X: X \in G_П^0, |\eta_i(X)| < p_0 M_0, i = \overline{1, 2N}\}. \qquad /22/$$

Переобозначим

$$G_Н^1 = G_Н^0 \cup G_{П,Н}^0, \quad G_П^1 = G_{П,П}^0. \qquad /23/$$

Здесь $G_П^1$ - множество перспективных точек после первого шага, а $G_Н^1$ - множество неперспективных точек после первого шага, т.е. все варианты размещения, для которых орбита, по меньшей мере в одной из точек наблюдения, имеет смещение, большее $p_0 M_0$.

Ищем точку $X_1 \in G_П^1$. Для этого решим систему неравенств:

$$|\eta_i(X)| < p_0 M_0, \ i = \overline{1, 2N}, \ X \in G_П^0. \qquad /24/$$

Пусть на к-м шаге мы получили множества $G_П^k$ и $G_Н^k$:

$$P_B = G_Н^k \cup G_П^k, \quad G_Н^k \cap G_П^k = \emptyset. \qquad /25/$$

Кроме того, пусть путем решения соответствующей системы неравенств мы нашли точку $X_k \in G_П^k$.

$(k + 1)$-й шаг. Положим

$$M_k = \max_i |\eta_i(X_k)|. \qquad /26/$$

Разделим $G_П^k$ на два непересекающихся подмножества $G_{П,Н}^k$ и $G_{П,П}^k$ в соответствии с

$$G_П^k = G_{П,Н}^k \cup G_{П,П}^k, \quad G_{П,Н}^k \cap G_{П,П}^k = \emptyset, \qquad /27/$$

$$G_{П,Н}^k = \{X: X \in G_П^k, \bigcup_{i=1}^{2N} |\eta_i(X)| \geq p_k M_k\}, \qquad /28/$$

где $0 < p_k < 1$ - выбранный подходящим образом коэффициент.

Переобозначим

$$G_П^{(k+1)} = G_{П,П}^k, \quad G_Н^{(k+1)} = G_Н^k \cup G_{П,Н}^k. \qquad /29/$$

Ищем точку $X_{(k+1)} \in G_П^{(k+1)}$. Для этого решим систему неравенств:

$$|\eta_i(X)| < p_k M_k, \ i = \overline{1, 2N}, \ X \in G_П^k, \quad \text{и т.д.} \qquad /30/$$

И так на каждом шаге /кроме первого/ мы решаем систему неравенств /30/ на конечном множестве $G_П^k$. Для этого мы разработали два алгоритма: управляемый случайный поиск и случайный поиск с применением вектора спада.

2.1. Управляемый случайный поиск

Будем искать одно из решений системы неравенств

$$|\eta_i(X)| < \Delta_k, \ i = 1, 2N, \ X \in G_П^k, \qquad /31/$$

где обозначили

$$\Delta_k = p_k M_k. \qquad /32/$$

Введем следующую оценку δ_k степени невыполнения системы неравенств[5]:

$$\delta_k = \max_i \{0, \frac{|\eta_i| - \Delta_k}{M_k}\}. \qquad /33/$$

Пусть L - множество решений /31/. Тогда

$$\delta_k(X) = \begin{cases} 0, & X \in L \\ >0, & X \notin L. \end{cases} \qquad /34/$$

При этом на сколько мы находимся дальше от множества решений L, на столько δ_k больше нуля.

В качестве начального приближения к решению системы неравенств /31/ возьмем точку X_k, т.е. $X^{(0)} = X_k$. Тогда при принятой в /33/ нормировке $\delta_k(X^{(0)}) = (1 - p_k)$. Следовательно, на сколько p_k меньше единицы, т.е. на сколько искомое решение дальше от X_k, на столько $\delta_k(X^{(0)})$ будет большей величиной.

Пусть

$$R_{k,0} = \delta_k(X^{(0)})\, M^{\alpha}, \qquad /35/$$

где α - выбранное подходящим образом число.

Пусть $S_{k,0}$ - сфера с радиусом $R_{k,0}$ и с центром в точке $X^{(0)}$.

Разделим $S_{k,0}$ на две непересекающиеся части:

$$S_{k,0} = S^{+}_{k,0} \cup S^{-}_{k,0}, \quad S^{+}_{k,0} \cap S^{-}_{k,0} = \emptyset, \qquad /36/$$

где

$$S^{-}_{k,0} = \{X : X \in S_{k,0},\ \delta_k(X) < \delta(X^{(0)})\}. \qquad /37/$$

Множество $S^{-}_{k,0}$ не пустое, так как мы здесь допускаем, что минимум $|\eta_i|$ меньше Δ_k.

Случайным образом, с равной вероятностью выберем точку $X^{(1)} \in S^{-}_{k,0}$. После этого вычислим $\delta_k(X^{(1)})$ и радиус $R_{k,1} = \delta_k(X^{(1)}) M^{\alpha}$. Из части $S^{-}_{k,1}$ сферы $S_{k,1}$ с центром в точке $X^{(1)}$ и радиусом $R_{k,1}$ выберем с равной вероятностью новую точку $X^{(2)}$ и т.д. Процесс продолжается до получения такой точки $X^{(p)}$, для которой $\delta_k(X^{(p)}) = 0$.

2.2. Случайный поиск с применением вектора спада

В этом алгоритме вначале сводим систему неравенств /31/ к виду

$$g_r(X) < 0,\ r = \overline{1,4N},\ X \in G^k_{\Pi}, \qquad /38/$$

где

$$g_r(X) = \begin{cases} \eta_r - \Delta_k, & r = \overline{1,2N} \\ -\eta_r - \Delta_k, & r = \overline{(2N+1),4N}. \end{cases} \qquad /39/$$

Введем штрафную функцию

$$F = \max_r\{0,\ g_r(X)\}. \qquad /40/$$

Если L′ - множество решений /38/, то

$$F(X) = \begin{cases} 0, & X \in L' \\ >0, & X \notin L'. \end{cases} \qquad /41/$$

Для поиска минимума F(X) используем алгоритм случайного поиска с применением вектора спада[6]. В качестве начального приближения возьмем точку X_k, т.е. $X^{(0)} = X_k$. Пусть $F(X^{(0)}) > 0$, $F(X^{(0)}) = g_{r_0}(X^{(0)})$, Ω_0 - единичная окрестность точки $X^{(0)}$. При принятой нами метрике в пространстве P_B это означает, что $Y \in \Omega_0$, если точка Y получена из точки $X^{(0)}$ путем одной транспозиции. Пусть эта транспозиция $x_p \rightleftarrows x_q$, т.е. $Y = (\Delta B_{k_1}, \dots, \Delta B_{k_q}, \dots, \Delta B_{k_p}, \dots, \Delta B_{k_M})$.

В окрестности Ω_0 аппроксимируем F(X) функцией $g_{r_0}(X)$.

Введем вектор спада:

$$\Delta(X, Y) = F(Y) - F(X). \qquad /42/$$

Так как мы аппроксимируем в Ω_0 функцию F(X) функцией $g_{r_0}(X)$, то для $Y \in \Omega_0$

$$\Delta(X^{(0)}, Y) = g_{r_0}(Y) - g_{r_0}(X^{(0)}). \qquad /43/$$

Используя /12/, можно свести /43/ к

$$\Delta(X^{(0)}, Y) = \begin{cases} c_{r_0 p k_q} + c_{r_0 q k_p} - c_{r_0 p k_p} - c_{r_0 q k_q}, & r_0 \in [1, 2N] \\ -c_{(r_0-2N) p k_q} - c_{(r_0-2N) q k_p} + c_{(r_0-2N) p k_p} + \\ +c_{(r_0-2N) q k_q}, & r_0 \in [(2N+1), 4N]. \end{cases} \qquad /44/$$

Окрестность Ω_0 точки $X^{(0)}$ разделим на две непересекающиеся части Ω_0^{+} и Ω_0^{-}, где

$$\Omega_0^{-} = \{Y : Y \in \Omega_0,\ \Delta(X^{(0)}, Y) < 0\}. \qquad /45/$$

Новое приближение $X^{(1)}$ к решению системы неравенств /38/ выберем случайным образом и с равной вероятностью из точек Ω_0^{-}. Процесс продолжается до нахождения точки $X^{(p)}$, для которой $F(X^{(p)}) = 0$.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В качестве вычислительного эксперимента рассмотрим пример тяжелоионного синхротрона ТИС, который проектируется в ОИЯИ. Этот синхротрон /7/ предназначен для ускорения ионов всех элементов вплоть до урана до энергии 250 МэВ/нукл. /по урану/. Синхротрон имеет триплетную магнитную структуру: 16 периодов и 32 дипольных магнита. Среднеквадратическое отклонение относительной ошибки магнитного поля $\sigma_{\Delta B/B} = 5 \cdot 10^{-4}$.

Был проведен вычислительный эксперимент по нахождению оптимального расположения диполей синхротрона ТИС по описанному алгоритму /в его двух вариантах/. В /32/ было принято $p_k = 0{,}5$, а в /35/ было принято $\alpha = 1$. Рассматривались 16 точек наблюдения орбиты.

Была составлена программа для ЭВМ на фортране. Эта программа требует 64К машинной памяти. На ЭВМ типа CDC-6500 за 24 с вычислительного времени было получено расположение диполей, имеющее максимальное отклонение орбиты, в 8 раз меньшее, чем при начальном расположении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный алгоритм можно применять и в случае, когда не все диполи доступны для перестановки, а только диполи очередной группы, подлежащей монтажу. В случае, когда диполи разделены на P групп из $M_p = M/P$ диполей и отдельные группы диполей монтируются последовательно, имеем

$$\eta_i = \sum_{\ell=0}^{(P-1)} \eta_{i,\ell}, \qquad /46/$$

где

$$\eta_{i,\ell} = \sum_{m=1}^{M_p} c_{ijk_j}, \quad j = \ell M_p + m. \qquad /47/$$

Для нахождения оптимального расположения диполей в этом случае применим многошаговую оптимизацию. Она состоит в следующем: сначала описанным выше образом при сравнительно большом M_p или путем простого перебора при небольшом M_p находим такое размещение диполей первой группы /$\ell = 0$/, для которого $\max_i |\eta_{i,0}|$ имеет минимум. Пусть орбита, отвечающая этому оптимальному размещению, равна $\eta^*_{i,0}$. Оптимальное размещение диполей второй группы /$\ell = 1$/ ищем, имея в виду первую группу, т.е. $\eta^*_{i,0}$. Следовательно, ищем такое размещение диполей второй группы, для которого $\max |\eta_{i,1} + \eta^*_{i,0}|$ имеет минимум. Этот процесс продолжается до последней группы диполей с $\ell = (p-1)$.

Автор выражает благодарность Э.А.Перельштейну и В.А.Михайлову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динев Д.Х. ОИЯИ, Р9-82-504, Дубна, 1982.
2. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. "Наука", М., 1969.
3. Динев Д.Х. ОИЯИ, Р9-82-502, Дубна, 1982.
4. Murtaph B.A. et al. European Journal of Operational Research. 1982, vol. 9, p. 71-76.
5. Волконский В.А. и др. Проблемы кибернетики. "Наука", М., вып.20, 1968.
6. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. "Наукова думка", Киев, 1981.
7. Александров В.С. и др. Ускорительный комплекс тяжелых ионов в ОИЯИ. Р9-83-613, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 сентября 1984 года.

Динев Д.Х. 9-84-622
Алгоритм оптимальной расстановки дипольных магнитов в синхротроне

Предложен алгоритм для нахождения оптимальной расстановки магнитных диполей в синхротроне. При этой расстановке замкнутая орбита имеет минимальное искажение. Алгоритм использует метод последовательного анализа и исключения вариантов размещения. Предложены два варианта алгоритма: управляемый случайный поиск и случайный поиск с применением вектора спада. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Dinev D. 9-84-622
An Algorithm for Optimum Positioning of the Dipoles in a Synchrotron.

An algorithm for optimum positioning of the dipoles in a synchrotron is described. This optimum positioning of the dipole provides the least displacement of the orbit. The algorithm makes use of successive analysis and elimination of variants. The results of a computational experience are also given.

The investigation has been performed at the Department of New Methods and Acceleration, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984