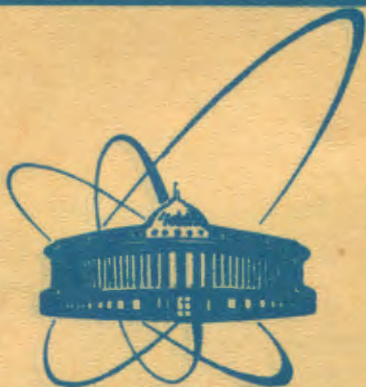


82-284



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований

дубна

3725/82

9/8-82

9-82-284

+

Ю.Дитрих, З.А.Козловски

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе ^{1/}нами было показано, что параксиальное уравнение траектории в отсутствие пространственного заряда для аксиально-симметрических полей

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{\phi} \frac{dr}{dz} \right) = - \frac{1}{4} \frac{\phi''}{\sqrt{\phi}} r \quad /1.1/$$

можно заменить системой разностных уравнений, аппроксимируя фактическое распределение потенциала кусочно-линейной функцией:

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-1} + \theta_{i-1} p_i \Delta z_i \left[2(1 - \frac{\sqrt{\phi_i \phi_{i-1}} - \phi_i}{\phi_i - \phi_{i-1}}) \right], \\ \theta_i &= \theta_{i-1} p_i + \frac{r_i}{r_i}, \\ \Delta z_i &= L g^{\alpha(i-1)} \frac{g^\alpha - 1}{Q^\alpha - 1}. \end{aligned} \quad /1.2/$$

Здесь $r = r(z)$ - радиус траектории, z - текущая координата, $\phi(z) = z^{1/\alpha}$ - потенциал, $1 \leq i \leq N$, где i - очередной номер шага, N - количество шагов, $g = Q^{1/N}$, где $Q = \phi_k / \phi_0$ - соотношение конечного ϕ_k и начального ϕ_0 потенциалов на участке длиной L . Остальные обозначения см. на рис. 1 /для соотношения $(\phi_i - \phi_{i-1}) / \phi_{i-1} \ll 1$ выражение в квадратных скобках формулы /1.2/ стремится к единице/.

Как следует из результатов ^{1/}, решение этой системы может быть получено с удовлетворительной точностью уже для $N = 2 \div 4$ при $Q \leq 10$; по мере роста Q количество шагов аппроксимации N , обеспечивающее заданную точность, растет.

Уравнения /1.2/ были получены в предположении, что между точками z_{i-1} и z_i закон распределения аппроксимирующего поля

$$\phi(z) = \alpha z. \quad \text{Заметим, что если введем определение } \left(\frac{d\phi}{dz} \right)_i = \frac{\phi(z_i) - \phi(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}},$$

тогда система уравнений /1.2/ может быть выведена из уравнения /1.1/ при аппроксимации поля также ступенчатой функцией, удовлетворяющей на отрезке от z_{i-1} до z_i условию $\phi(z) = \phi(z_{i-1}) = \phi_{i-1}$ и в точке z_i , претерпев-

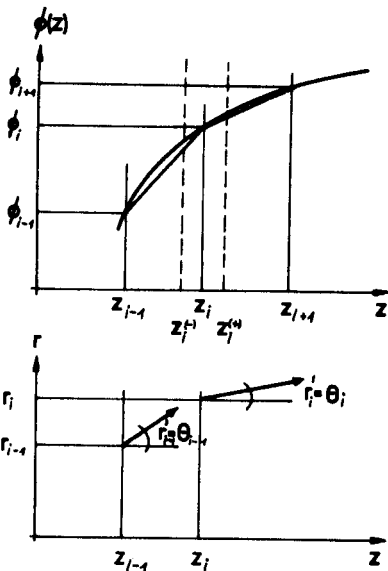


Рис. 1. Метод аппроксимации в принятых обозначениях величин.

шей скачок до значения $\phi(z) = \phi(z_i) = \phi_1$, и т.д. Это утверждение является следствием того, что в определении r_i и θ_i в /1.2/ участвуют только значения соответствующих величин на концах отрезков, а от аппроксимирующей функции достаточно потребовать выполнения условия $\phi'' = 0$, за исключением концов отрезков, где допускается $\phi'' = \infty$.

Для определения ионооптических параметров интенсивных пучков необходим учет влияния сил пространственного заряда.

Идея предлагаемого метода заключается также в поочередной, независимой друг от друга, оценке величин, определяющих ионооптические параметры пучка, и последующем их сложении:

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1} \quad n_i = \sqrt{\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_i}} \quad E_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta z_i}$$

$$r_i = \frac{-4\phi_i}{E_{i+1} - E_i}$$

$$r_i = r_{iLENS} + \Delta r_{ISC} + \Delta r_{ITH} ,$$

$$\theta_i = [(\theta_{iLENS} + \Delta\theta_{ISC})^2 + \Delta\theta_{ITH}^2]^{1/2} , \quad /1.3/$$

где r_{iLENS} , θ_{iLENS} - радиус и угол наклона траектории вычисленных в поле, примененных в системе электродов, Δr_{ISC} и Δr_{ITH} - соответствующие приращения радиуса и угла наклона за счет сил пространственного заряда (SC) и влияния термического разброса скоростей /TH/.

Закон сложения углов наклона траектории следует непосредственно из вида функции, определяющей потенциал. В параксиальном случае потенциал $\phi = \phi(z, r)$ при учете кулоновской поправки для аксиальной симметрии в окрестности точки $z = z_0$ в переменных r и $\zeta = z - z_0$ можно записать в виде

$$\phi = \phi(z_0, 0) + \zeta \phi'(z_0, 0) + \frac{1}{2} \zeta^2 \phi''(z_0, 0) - \frac{1}{4} [\phi''(z_0, 0) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}] ,$$

где ρ_0 - плотность пространственного заряда на оси, ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума. Из уравнения эквипотенциальной линии, которое в окрестности точки z_0 можно получить, полагая $\phi = \phi(z_0, 0)$, следует для кривизны K этой линии

$$K = \frac{\phi''(z_0, 0)}{2\phi'(z_0, 0)} + \frac{\rho_0(z_0)}{2\epsilon_0\phi'(z_0, 0)}. \quad /1.4/$$

На граничной эквипотенциальной линии с кривизной $K \equiv K_1$, разделяющей пространство, с потенциалом ϕ_{i-1} и ϕ_i происходит отклонение траектории, которое можно описать посредством оптической силы $1/f_1$:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{\sqrt{\phi_i} - \sqrt{\phi_{i-1}}}{\sqrt{\phi_i}} K_1 \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{2\phi_i} K_1.$$

Для пучка радиусом r_1 угол отклонения θ_1

$$\theta_1 = \frac{r_1}{f_1}.$$

Иначе говоря, мы показали, что оптические силы, определенные электростатическим полем /линзовый эффект - первое слагаемое формулы /1.4// и кулоновской поправкой /пространственный заряд - второе слагаемое формулы /1.4//, аддитивны, и вследствие этого аддитивны соответствующие углы отклонения. Термическая поправка в силу векторного характера складываемых величин /скорости поперечного - термического и продольного движения/ прибавляется к предыдущим величинам по геометрическому закону.

В данной работе представлен метод оценки влияния сил пространственного заряда, основанный на принципе аппроксимации истинного распределения поля системой ступенек, на которых $\phi = \text{const}$.

Кроме указанного в формулах /1.2/ закона определения длин шагов аппроксимации $\Delta z_1 (g_1 = \text{const})$ рассмотрены также случаи: $\Delta z_1 = L/N = \text{const}$ и $\Delta t_1 = \text{const}$, где Δt_1 - время пролета частицей отрезка Δz_1 .

2. ТРАЕКТОРИЯ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

В аксиально-симметричном случае получение в аналитическом виде решения уравнения движения с учетом пространственного заряда невозможно даже в пространстве дрейфа, где $\phi = \text{const}$. Для приближенной оценки влияния эффектов пространственного заряда воспользуемся аппроксимацией распределения полей $\phi \sim z$ и $\phi \sim z^{4/3}$ ступенчатой функцией ($\phi(z) = \text{const}$). Будем ограничиваться

случаем не слишком больших изменений радиуса пучка /не более чем в два раза/. Оценка поперечной составляющей силы, действующей на частицу вследствие ее движения в поле объемного заряда, основана на использовании теоремы Гаусса. Предполагая, что радиальная составляющая скорости v_r значительно меньше продольной v_z , и понимая под $\phi_0 = \text{const}$ абсолютное значение соответствующего v_z ускоряющего потенциала, можно уравнение движения граничной частицы пучка записать в виде

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (2Q/AM)^{1/2}} \frac{P}{r}, \quad /2.1/$$

где AM - масса частицы, Q - ее заряд, $P = J/\phi_0^{3/2}$, J - полный ток пучка. Введем нормализованные переменные:

$$R = \frac{r}{r_n},$$

$$Z = \frac{z}{r_n} \left(\frac{P}{2\pi\epsilon_0 (2Q/AM)^{1/2}} \right)^{1/2},$$

где r_n - нормирующий множитель. В этих переменных уравнение /2.1/ более компактно:

$$\frac{d^2 R}{dZ^2} = \frac{1}{2R}. \quad /2.1a/$$

После первого интегрирования получим

$$\left(\frac{dR}{dZ} \right)^2 = \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) + \left(\frac{dR}{dZ} \right)_0^2, \quad /2.2/$$

где R_0 - начальный радиус и $\left(\frac{dR}{dZ} \right)_0$ - начальный наклон траектории в системе координат R, Z . Второе интегрирование приводит к уравнению траектории граничной частицы пучка в виде

$$Z = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{\ln(R/R_0) + \left(\frac{dR}{dZ} \right)_0^2}}. \quad /2.3/$$

Из уравнения /2.2/ можно найти величину радиуса R_M пучка в плоскости Z_M его минимального сечения. Поскольку здесь $\frac{dR}{dZ} = 0$,

$$R_M = R_0 \exp \left[- \left(\frac{dR}{dZ} \right)_0^2 \right]. \quad /2.4/$$

Если в качестве нормирующего множителя примем $r_n = r_M$ и сдвинем начало отсчета по координате Z в плоскость $Z = Z_M$ где $R_0 = R_M$, получим систему уравнений, описывающую пучок в пространстве дрейфа в виде

$$\frac{dR}{dZ} = \sqrt{\ln R}, \quad /2.2a/$$

$$Z = \pm \int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\ln R}} \quad /2.3a/$$

/положительный знак соответствует $(\frac{dR}{dZ})_0 \geq 0$). Подстановкой $w = (\ln R)^{1/2}$ интеграл /2.3a/ можно преобразовать к виду

$$\int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\ln R}} = 2 \int_0^w e^{-w^2} dw = A$$

и для $R < 2$ $A \approx 2,09 (R - 1)^{1/2}$.

Учет эффектов пространственного заряда может быть теперь, в принятом нами приближении, произведен для каждого шага расчета путем прибавления к рассчитываемым по формулам /1.2/ величинам r_1, θ_1 величин Δr_{isc} и $\Delta \theta_{isc}$, определенных из уравнений /2.2a/ и /2.3a/. В случае, когда для каждого из шагов будем принимать, что кулоновская поправка рассчитывается как для пучка с $r_0 = r_M$, то есть $(\frac{dr}{dz})_{01} = (\frac{dR}{dZ})_{01} \approx 0$

/основной вариант метода, пренебрегающий на всех шагах расчета начальным наклоном траектории на каждом отрезке/:

$$\Delta r_{isc} = \frac{(\Delta z_1)^2}{r_{i-1}} \frac{P_1}{2(2,09)^2 \pi \epsilon_0 (2Q/AM)^{1/2}}, \quad /2.5/$$

$$\Delta \theta_{isc} = \frac{\Delta z_1}{r_{i-1}} \frac{P_1}{(2,09)^2 \pi \epsilon_0 (2Q/AM)^{1/2}}.$$

Величина первеанса пучка P_1 в формулах /2.5/ определена посредством полного тока пучка и потенциала ϕ_0 на участке дрейфа.

Применяя наш метод для определения поведения пучка на участках с изменяющимся потенциалом, мы должны более точно определить величину ϕ_0 в выражении для P_1 . Было рассмотрено несколько вариантов определения ϕ_0 /см. рис.2/:

1. $\phi_0 \equiv \phi_{i-1}$ на каждом шаге расчета,
2. $\phi_0 \equiv \phi_i$ на каждом шаге расчета,
3. $\phi_0 \equiv \phi_{i-1}$ на нечетных шагах расчета,
 $\phi_0 \equiv \phi_i$ на четных шагах расчета,
4. $\phi_0 \equiv \frac{\phi_{i-1} + \phi_i}{2}$ на каждом шаге расчета.

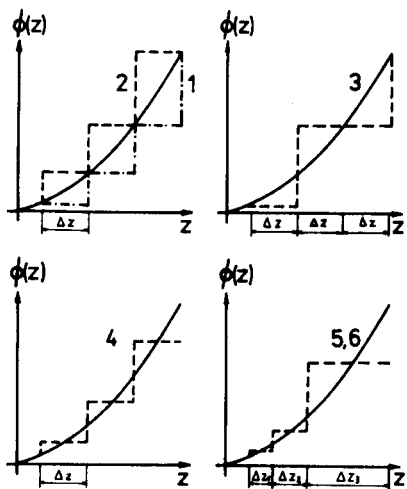


Рис.2. Различные методы аппроксимации распределения потенциала ступенчатой функцией: 1,2,3, 4 - $\Delta z_i = \text{const}$, 5 - $\Delta t_i = \text{const}$, 6 - $g_i = \text{const}$. На всех последующих рисунках цифры кривых соответствуют различным методам аппроксимации, представленным на данном рисунке.

В работе ^{/1/} мы показали, что в поле $\phi \sim z$ для $P=0$ система уравнений /1.2/ дает точный результат, независимый от количества шагов расчета N . Для контроля свойств перечисленных выше вариантов /1-4/ было рассчитано поведение пучка в поле $\phi \sim z$ для небольшого $G \sim 4$. Результаты расчета представлены на рис.3а и 3б. Кривые 1-4 представляют результаты расчета по вариантам 1-4 для случая $\Delta z_i = \text{const}$. Кривая 5 - результат расчета для $\Delta t_i = \text{const}$ и ϕ_0 по варианту 4, кривая 6 - для случая $g_i = \text{const}$ и ϕ_0 также по варианту 4. Здесь, как и в работах ^{/2/}, мы пользуемся поня-

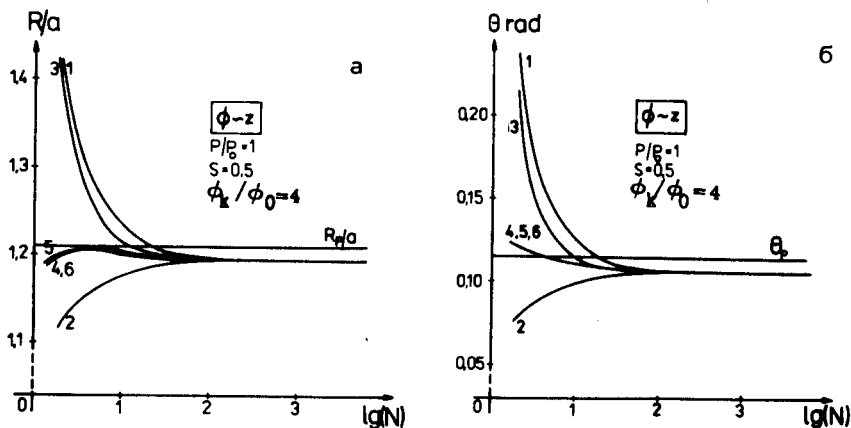


Рис.3. Зависимость конечного нормированного радиуса /а/ и угла наклона /б/ траектории от количества шагов аппроксимации N .

тиями "aspect ratio" $S = a/d$ и первеанса эквивалентного плоского диода:

$$P_0 = \frac{4}{9} \pi \epsilon_0 \left(\frac{2Q}{AM} \right)^{1/2} S^2,$$

где a - радиус эмиттера и d - межэлектродное расстояние диода. Расчет проведен для пучков с первеансом $P = J \phi_k^{-3/2} \equiv P_0$. Прямые, обозначенные символами R_p/a /рис.3а/ и θ_p /рис.3б/, показывают точные значения R и θ , полученные путем численного интегрирования параксиального уравнения методом Мерсона³. Представленные результаты убедительно показывают, что определение в величине первеанса потенциала в виде

$$\phi_0 = \frac{\phi_{1-1} + \phi_1}{2} \quad /2.6/$$

дает результат, менее всего отличающийся от значения, соответствующего $N \rightarrow \infty$ для любого N , и одновременно отклонения величин R и θ от точных значений невелики для небольших N .

Как дополнительный вариант метода учета влияния пространственного заряда, было рассмотрено решение уравнения /2.1/ для случая, когда начальный угол $\theta_0 \neq 0$. В этом случае $\left(\frac{dR}{dz} \right)_0 \neq 0$, и мы должны сдвинуть начало отсчета в точку

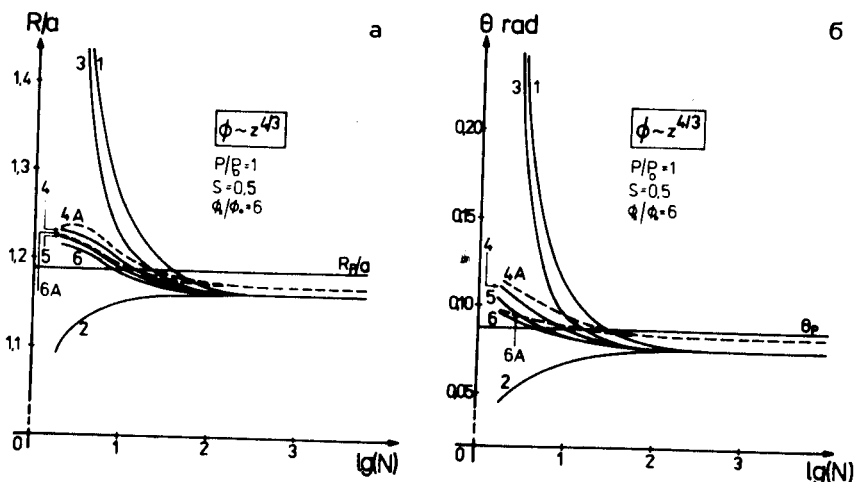


Рис.4. Зависимость конечного нормированного радиуса /а/ и угла наклона /б/ траектории от количества шагов аппроксимации N . 4А - аппроксимация потенциала 4 и $\theta_{01} \neq 0$, 6А - аппроксимация потенциала 6 и $\theta_{01} \neq 0$.

$Z=Z_M$, в которой $R=R_M=1$. Начиная расчет из этой точки и ограничиваясь величинами $R < 2$, можно получить для $\Delta r_{ISC}(\theta)$ и $\Delta \theta_{ISC}(\theta)$ /значок θ применен для выделения этого варианта метода/ формулы типа

$$\Delta r_{ISC}(\theta) = \Delta r_{ISC} + f(\Delta z_i, \theta_{i-1}, P_i), \quad /2.5a/$$

$$\Delta \theta_{ISC}(\theta) = \Delta \theta_{ISC} + \frac{df(\Delta z_i, \theta_{i-1}, P_i)}{d(\Delta z_i)},$$

где Δr_{ISC} и $\Delta \theta_{ISC}$ определены уравнениями /2.5/. Заметим, что диапазон допустимых значений Δr_{ISC} здесь существенно уже, чем для случая /2.5/, поскольку выражения выведены для функции $f(\Delta z_i, \theta_{i-1}, P_i)$ в предположении, что отношение $r_i/r_M < 2$, а не, как прежде, $r_i/r_{i-1} < 2$. Применение этого относительно неудобного из-за громоздкого выражения /2.5a/ метода возможно только для пучков с небольшими углами наклона траектории. На рис.4а и 4б представлены результаты расчета параметров траектории в поле $\phi \sim z^{4/3}$ для $G=6$. Рис.5а и 5б соответствуют значениям $G=100$. Как и для случая поля $\phi \sim z$, видно преимущество определения длины шага Δz_i на основе закона $g_i = \text{const}$ /кривые б/. Для сравнения на рис.4а и 4б приведены результаты, полученные с учетом начальных углов наклона, вычисленные для $\Delta z_i = \text{const}$ /кривые 4А/ и

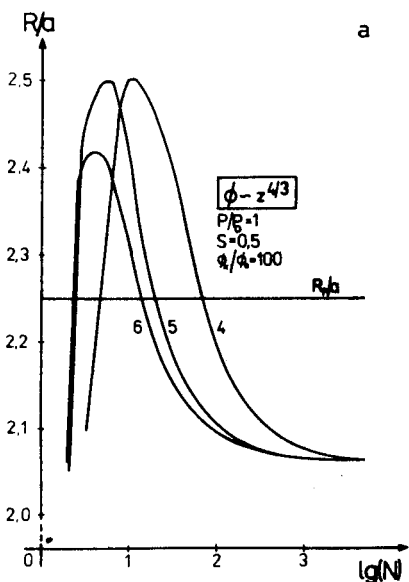
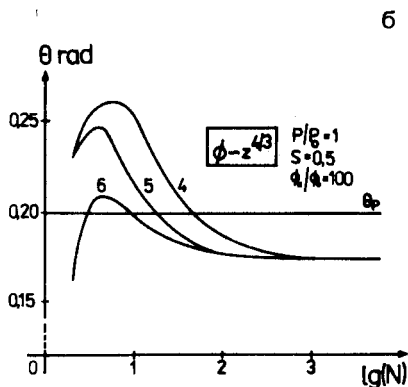


Рис.5. Зависимость конечного нормированного радиуса /а/ и угла наклона /б/ траектории от количества шагов аппроксимации N при $G = 100$.



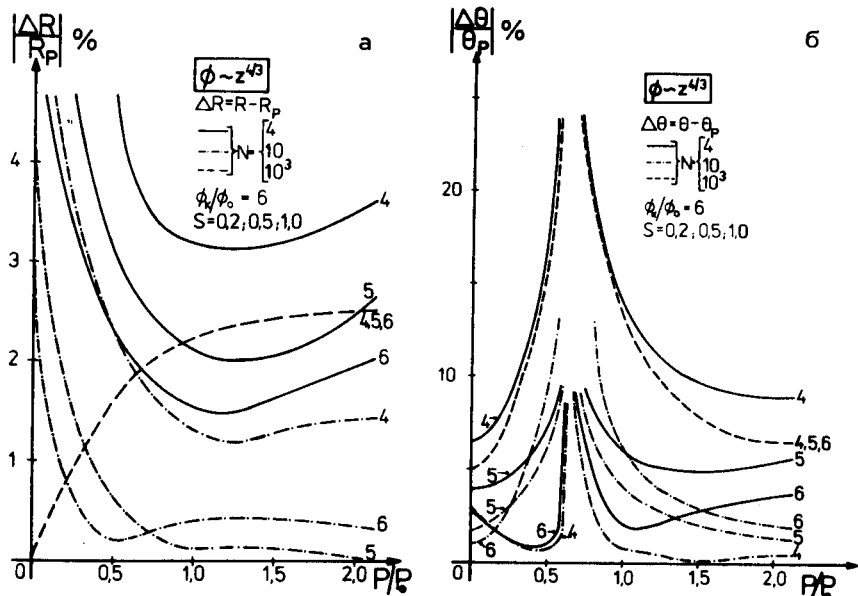


Рис. 6. Относительное отклонение радиуса /а/ и угла наклона /б/ траектории от параксиального решения в зависимости от относительного первеанса P/P_0 при $G=6$.

$g_1 = \text{const}$ /кривые 6А/. Отличительной чертой этих кривых является то, что в пределе $N \rightarrow \infty$ отклонения значений радиуса и угла наклона траектории от соответствующих точных решений параксиального уравнения значительно меньше, чем для базового варианта, предполагающего при расчете Δ_{ISC} на каждом шаге $\theta_{0,1-1} = 0$. К сожалению, ограничение метода значением $r_1/r_M < 2$ не позволяет применять этот вариант для больших G . Следует также указать, что для небольших N отклонения величин радиуса и угла наклона от точного решения параксиального уравнения больше при учете начальных углов на каждом шаге расчета.

На рис. 6а и 6б, 8а и 8б, 9а и 9б представлены величины относительных отклонений от параксиального решения в случае расчета параметров траектории (R, θ) для трех законов определения длины шага Δz , вычисленные в функции относительного первеанса P/P_0 . Параметром кривых здесь является количество шагов расчета $/N = 4, 10, 10^3 /$. Первеанс определен через среднее арифметическое значение потенциала на длине шага /2.6/. Поскольку кривые, описывающие поведение величины $|\Delta\theta/\theta|$ для параллельного пучка $/\theta = 0/$, претерпевают разрыв, для более полной характеристики метода на рис. 7 представлен ход абсолютного значения величины $\Delta\theta$.

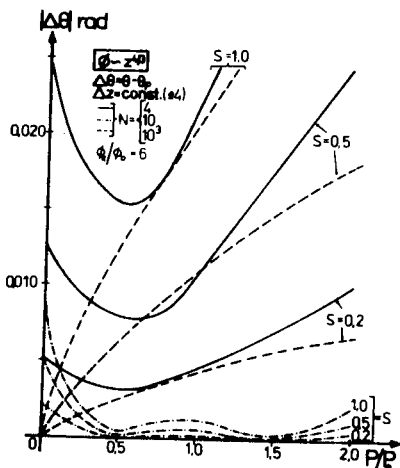


Рис. 7. Абсолютное отклонение угла наклона траектории от параксиального решения в зависимости от относительного первеанса P/P_0 при $G=6$.

Как и следовало ожидать, для $N \rightarrow \infty$ полученные результаты не зависят от метода определения величины шага Δz . Вариант метода, учитывающий на каждом шаге начальный наклон, дает более точный результат. Однако, поскольку поставленная задача имеет целью выявление условий, при которых можно получить наиболее точный результат при минимальном N , в конечном итоге мы отдали предпочтение базовому варианту /2.5/.

3. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Окончательная формулировка метода оценки эффектов фокусировки электростатическими полями и расплывания пучков под

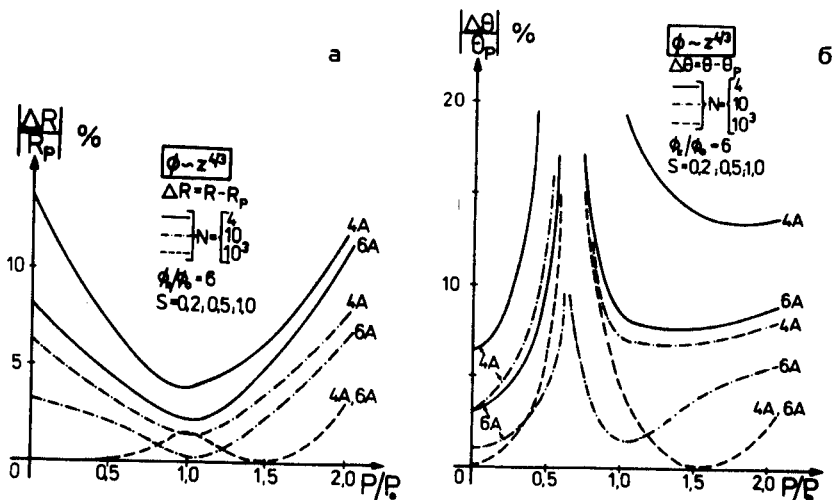


Рис. 8. Относительное отклонение радиуса /а/ и угла наклона /б/ траектории от параксиального решения в зависимости от относительного первеанса P/P_0 при $G=6$.

влиянием пространственного заряда может быть выражена посредством следующих формул:

$$r_i = r_{i-1} + \theta_{i-1} n_i \Delta z_i k + \frac{(\Delta z_i)^2}{r_{i-1}} \frac{2}{9(2,09)^2} \frac{P_i}{P_0} S^2;$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} n_i + \frac{r_i}{f_i} + \frac{\Delta z_i}{r_{i-1}} \frac{4}{9(2,09)^2} \frac{P_i}{P_0} S^2; \quad 1 \leq i \leq N; \quad /3.1/$$

$$\Delta z_i = L \frac{g^a - 1}{G^a - 1} g^{a(i-1)}, \quad k = 2[1 - \frac{\sqrt{g} - g}{g - 1}]; \quad P_i = J \left(\frac{\phi_{i-1} + \phi_i}{2} \right)^{-3/2}.$$

Надо отметить, что впервые идея такого типа оценки параметров пучка с заметным пространственным зарядом высказал Вибранс¹⁴. Представленный набором /3.1/ метод за счет предложенного определения величин Δz_i и P_i позволяет получить результат заданной точности при значительно меньшем значении N . Учет величин "линзового эффекта" r_i/f_i и k значительно повышает достижимую точность результата в сравнении с пред-

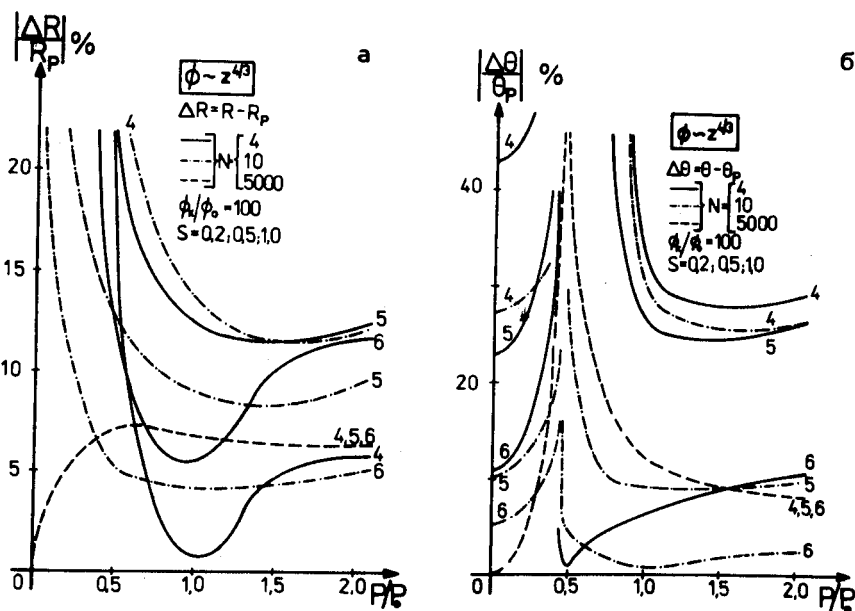


Рис.9. Относительное отклонение радиуса /а/ и угла наклона /б/ траектории от параксиального решения в зависимости от относительного первеанса P/P_0 при $G = 100$.

ложением Вибранса. Описание явления расплывания пучка под влиянием пространственного заряда посредством величины приведенного первеанса P/P_0 позволяет рассмотреть сразу весь класс геометрически подобных /с одинаковым "aspect ratio"/ систем пучков и электродов.

Результаты, приведенные в разделах 1 и 2, получены для моноэнергетических пучков. Несмотря на несоизмеримость ускоряющего потенциала, применяемого при формировании пучков, и потенциала, эквивалентного начальному разбросу скоростей, последний является величиной, определяющей минимальный угол наклона траектории $1/2$. Предложенный метод расчета позволяет учесть термические эффекты следующим способом. В каждом сечении i пучка вследствие теоремы Лиувилля сохраняется величина нормализованного эмиттанса. Для конца i -того отрезка можем тогда записать

$$r_e^2 T_e = r_i^2 T_i ,$$

где r_e, T_e - радиус и температура /выраженная в единицах эквивалентного термической скорости потенциала/ эмиттера. Тогда наклон траектории граничной частицы обусловлен термическими эффектами

$$\Delta\theta_{iTH} = \frac{r_e}{r_i} \left(\frac{T_e}{\phi_i} \right)^{1/2} , \quad /3.2a/$$

и, соответственно, радиус

$$\Delta r_{iTH} \approx \Delta z_i \cdot \Delta\theta_{iTH} . \quad /3.2b/$$

При помощи описанного метода можно получить количественные оценки ионооптических параметров пучков в широком диапазоне изменений первеанса пучка $/0 \leq P/P_0 \leq 2/$ и для соотношения конечного и начального потенциалов G вплоть до $G=100$.

Отличительной чертой метода является то, что эта оценка с точностью, лучшей 10% /в сравнении с решением параксиального уравнения/, может быть получена при малом /2-4/ количестве шагов расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дитрих Ю., Козловски З.А. ОИЯИ, 9-82-283, Дубна, 1982.
2. Козловски З.А., Дитрих Ю. ОИЯИ, 9-81-208, Дубна, 1981; Дитрих Ю., Козловски З.А. ОИЯИ, 9-81-209, Дубна, 1981; Дитрих Ю., Козловски З.А. ОИЯИ, 9-81-464, Дубна, 1981.
3. CERN, 6600 Computer, Program Library, 1975, No.D208.
4. Vibrans G.E. Tech.Rep. No.308, Lincoln Lab. Loco cit. Focusing of Charged Particles, vol.11, ed. A.Septier, Academic Press, New York, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел

15 апреля 1982 года.