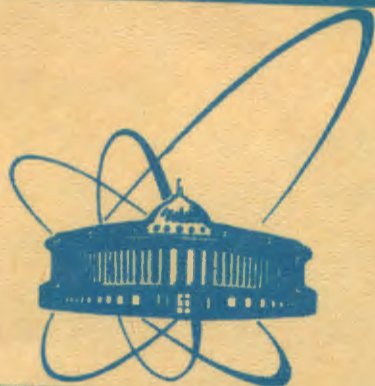


82-283



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

3726/82

9/8-82

9-82-283

Ю.Дитрих, З.А.Козловски

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ
ИОННЫХ ПУЧКОВ
НА ОСНОВЕ ПАРАКСИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения ионооптических параметров систем, включающих в себя плазменный эмиттер и систему электродов, формирующих и фокусирующих пучок заряженных частиц, может быть решена точно при одновременном решении уравнения Пуассона для определения распределения потенциала и уравнения Власова для нахождения функции распределения частиц по скоростям, для конкретной, соответствующей условиям плазмы источника функции распределения плотности электронов. Такая самосогласованная задача является достаточно сложной и для ее решения, даже при использовании современных вычислительных средств, необходимо прибегать к упрощающим предположениям. В конечном итоге получаемый результат является в определенной мере приближенным.

Если отвлечься от главной причины выступающих здесь трудностей - плазменного эмиттера, положение и форма которого являются функциями параметров плазмы и применяемой конфигурации полей, и рассмотреть самую простую задачу - нахождение траектории одной частицы, оказывается, что, во-первых, в аналитическом виде решение уравнения Лапласа для наиболее часто применяемых в электронной оптике полей с вращательной симметрией и плоских /или двумерных/ полей возможно только в ограниченном числе случаев и, во-вторых, даже тогда, когда распределение потенциала дано в аналитической форме, в большинстве случаев невозможно найти решение в точном виде и приходится прибегать к приближенным методам.

Очевидно, что получение качественных и количественных оценок оптических параметров интенсивных, "горячих" пучков возможно лишь при учете влияния сил пространственного заряда и поперечной энергии частиц /"температуры" частиц пучка/.

В серии предыдущих работ^{1/} нами показано, что, опираясь на уравнения параксиальной теории в линейном приближении, можно простыми средствами получить довольно исчерпывающую информацию о поведении пучка в фокусирующе-формирующей системе, качественно хорошо и количественно удовлетворительно согласующуюся с экспериментальными результатами.

Целью данной работы является нахождение метода приближенного определения ионооптических параметров пучков, обеспечивающего получение количественных оценок.

В основе метода лежит параксиальное уравнение траектории. Распределение потенциала аппроксимируется методом многоугольников /кусочно-линейной функцией/. Эффекты пространственного заряда и термического расплывания пучка оцениваются независимо от фокусирующих свойств применяемых конфигураций полей.

В нашей работе определены условия, обеспечивающие, с одной стороны, получение удовлетворительного по точности результата для пучков с нулевым пространственным зарядом, с другой - позволяющие получить этот результат при минимальном количестве шагов аппроксимации распределения поля.

2. РАСЧЕТ ИОНООПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Для аксиально-симметричных электростатических полей с потенциалом $\phi = \phi(z)$ параксиальное уравнение траектории можно записать в виде

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{\phi} \frac{dr}{dz} \right) = - \frac{1}{4} \frac{\phi''}{\sqrt{\phi}} r, \quad /2.1/$$

где $r = r(z)$ - радиус траектории частицы и z - текущая координата. Случай плоских полей не требует особого рассмотрения, поскольку соответствующее уравнение /2.1/ отличается только числовым /вместо 1/4 стоит 1/2/ коэффициентом.

Будем решать это уравнение в поле, в котором распределение потенциала аппроксимировано кусочно-линейной функцией. Пусть в начальной точке $z = z_{i-1}$ заданы радиус траектории $r(z) = r_{i-1}$ и наклон $r'_{i-1} = \theta_{i-1}$ /рис.1/.

Первое интегрирование уравнения /2.1/ в пределах от z_{i-1} до z дает

$$\sqrt{\phi} \frac{dr}{dz} \Big|_{z_{i-1}}^z = - \frac{1}{4} \int_{z_{i-1}}^z \frac{\phi''}{\sqrt{\phi}} r dz.$$

Для $r'(z)$, таким образом, получаем

$$r'(z) = \sqrt{\frac{\phi_{i-1}}{\phi}} r'_{i-1} - \frac{1}{4 \sqrt{\phi}} \int_{z_{i-1}}^z \frac{\phi''}{\sqrt{\phi}} r dz.$$

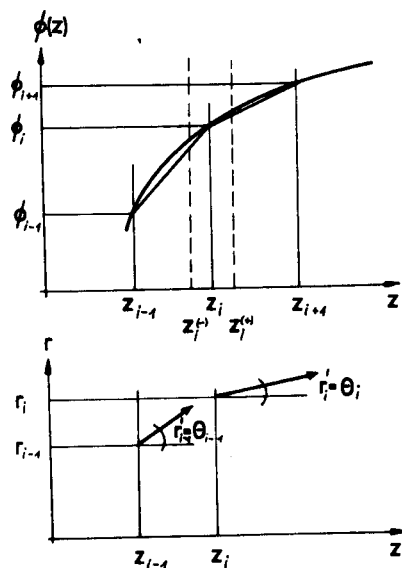
После второго интегрирования

$$r(z) = r_{i-1} + \sqrt{\phi_{i-1}} r'_{i-1} \int_{z_{i-1}}^z \frac{dz}{\sqrt{\phi}} - \frac{1}{4} \int_{z_{i-1}}^z \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left[\int_{z_{i-1}}^z \frac{\phi''}{\sqrt{\phi}} r dz \right] dz.$$

Для принятой нами аппроксимации $\phi(z)$ на отрезке от z_{i-1} до z_i /рис.1/

$$\phi(z) = \phi_{i-1} + (z - z_{i-1}) E_1$$

Рис.1. Метод аппроксимации и принятые обозначения величин.



$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1} \quad n_i = \sqrt{\frac{\phi_{i-1}}{\phi_i}} \quad E_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta z_i}$$

$$f_i = \frac{-4\phi_i}{E_{i+1} - E_i}$$

и $\phi'' \neq 0$, за исключением точки $z = z_i$, где $\phi'' = \infty$. Интеграл, содержащий ϕ'' в приведенных выше формулах, можно оценить следующим образом /см. рис.1/:

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\phi''}{\sqrt{\phi}} r dz =$$

$$= \lim_{\substack{z_i^{(+)} \rightarrow z_i \\ z_i^{(-)} \rightarrow z_i}} \left(\int_{z_{i-1}}^{z_i^{(-)}} (\dots) dz + \int_{z_i^{(+)}}^{z_i} (\dots) dz \right)$$

на участке (z_{i-1}, z_i) , поскольку $\phi'' \neq 0$ первый интеграл суммы равен нулю. В точке z_i , $\phi(z) = \phi_i$, $r(z) = r_i$, $\phi'(-) = E_i$ и $\phi'(+) = E_{i+1}$,

$$\lim_{\substack{z_i^{(+)} \rightarrow z_i \\ z_i^{(-)} \rightarrow z_i}} \int_{z_{i-1}}^{z_i^{(-)}} \frac{d}{dz} (\phi') \frac{1}{\sqrt{\phi}} r dz = \frac{r_i}{\sqrt{\phi_i}} (E_{i+1} - E_i)$$

Вдоль всего участка от z_{i-1} до z_i угол наклона траектории изменяется согласно закону

$$r'(z) = r'_{i-1} \sqrt{\frac{\phi_{i-1}}{\phi(z)}}$$

и в точке $z = z_i$ скачкообразно изменяется на

$$\Delta \theta = \frac{r_i}{f_i}$$

где

$$f_i = - \frac{4\phi_i}{E_{i+1} - E_i}$$

Радиус пучка $r_i(z_i)$ равен

$$r_i(z_i) = r_{i-1} + r'_{i-1} \Delta z_i n_i \left(2 \left(1 - \frac{\sqrt{\phi_i \phi_{i-1}} - \phi_i}{\phi_i - \phi_{i-1}} \right) \right) \quad /2.2a/$$

и для

$$(\phi_i - \phi_{i-1}) / \phi_{i-1} \ll 1$$

$$r_i = r_{i-1} + \theta_{i-1} n_i \Delta z_i,$$

/2.2/

$$\theta_i = \theta_{i-1} n_i + r_i / f_i,$$

где

$$n_i = \sqrt{\phi_{i-1} / \phi_i}.$$

Исходное уравнение движения /2.1/ таким образом замещено системой разностных уравнений /2.2/.

Исследуемый участок разделяется на несколько отрезков, между которыми предполагается линейный ход потенциала. На границе между очередными отрезками наступает скачкообразное изменение угла наклона траектории. Этот скачок равен сумме двух эффектов: преломления луча в соответствии с электрооптическим коэффициентом n_i и "линзового эффекта", определенного фокусным расстоянием f_i и радиусом r_i .

Формула, по которой вычисляется величина f_i , есть не что иное, как формула Девиссона-Кельбика. Ее смысл в принятом приближении состоит в том, что влияние отклонения фактического хода потенциала от принятого нами линейного распределения оценивается посредством помещения на границе раздела между отрезками идеальной тонкой линзы, не изменяющей радиуса пучка и приводящей только к изменению угла наклона траектории.

Задача состоит теперь в определении границ применимости полученного результата и нахождении условий, при которых можно получить удовлетворительный по точности результат при минимальном количестве шагов аппроксимации уравнения /2.1/ системой /2.2/.

Для интересующих нас задач /извлечения и формирования пучков частиц из плазменных ионных источников/ характерно применение полей с осевым распределением потенциала типа $\phi \sim z^{4/3}$ /на участке извлечения пучка из источника/ и комбинации полей типа $\phi \sim z$ в области формирования пучка. Для дальнейшей разработки метода будем априори принимать существование именно таких типов распределений потенциалов в интересующих нас ионооптических системах.

Результаты расчета параметров траектории /конечные: радиус и угол наклона/ представим в виде функциональных рядов, параметром которых будет количество шагов расчета N . Выбор метода аппроксимации распределения поля, метод определения длин отрезков, на которые разделяем участок, не связаны ни с какой физической реальностью /в виде, например, набора данных об измерении фактического распределения полей или предложения измерять поля в определенных стратегических точках/. Они ориентированы лишь на получение результатов расчета в виде ряда, сходящегося к точному результату с максимальной скоростью в функ-

ции N /то есть получение для небольших N результата, достаточно близкого действительности - в основном экспериментальным данным/.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА

Точность результатов, определяющих оптические свойства поля $\phi \sim z$ при применении для r_1 формулы /2.2a/, зависит лишь от точности параксиального уравнения. Поле типа $\phi \sim z^{4/3}$ требует разработки оптимального метода определения длины шага аппроксимации.

Поскольку распределения полей заданы нами априори, применяя закон $\Delta z_1 = f(N)$, можно все величины, определяющие r_1 и θ_1 в системе уравнений /2.2/, выразить аналитически в функции N .

В работе рассмотрено три метода определения длины шага Δz_1 . Первый - самый естественный и наиболее употребляемый - это

$$\Delta z_1 = \Delta z = \frac{L}{N} = \text{const},$$

где L - полная длина исследуемого участка.

Следующий метод предполагает постоянство времени пролета частицей каждого шага, то есть

$$\Delta t_1 = \Delta t = \frac{T}{N} = \text{const},$$

где T - время пролета исследуемого участка.

В основе последнего рассмотренного нами метода лежит требование постоянства соотношения потенциалов на очередных шагах:

$$g_1 = g = \frac{\phi_1}{\phi_{1-1}} = G^{1/N} = \text{const},$$

где G - соотношение конечного ϕ_k и начального ϕ_0 потенциалов на исследуемом участке.

Поскольку функциональная связь потенциала с расстоянием известна, для определения перечисленных величин достаточно найти Δz_1 в случае $\Delta t_1 = \text{const}$ и $g_1 = \text{const}$. Остальные интересующие нас в расчетах величины n_1 , r_1 , E_1 выражаются через ϕ_1 и Δz_1 . Пусть в начале интересующего нас участка длиной L определяется потенциал $\phi = \phi_0$, и на его конце $\phi = \phi_k = G\phi_0$. Длина L_A участка, на котором потенциал возрастает от нуля до ϕ_0 , равна

$$L_A = L \frac{1}{G-1} \quad \text{для } \phi \sim z,$$

$$L_A = L \frac{1}{G^{3/4}-1} \quad \text{для } \phi \sim z^{4/3}.$$

Расстояние, на котором потенциал растет от нуля до $\phi = G\phi_0$,
 $L^* = L + L_A$.

Путь, пройденный частицей, начинающей движение в точке с $\phi_0 = 0$, с нулевой начальной скоростью в поле $\phi \sim z$ за время $T^* = k \cdot \Delta t$, равен

$$L^* = \sum_1^k \Delta z_i = \text{const} \cdot k^2 \cdot \Delta t^2.$$

Воспользовавшись равенством $k^2 = \sum_{i=1}^k (2i-1)$, получаем

$$\Delta z_i = L^* \frac{2i-1}{k^2}.$$

Если исследуемый нами участок L разделить на N частей и обозначить через j количество отрезков, на которое делится участок L_A , тогда

$$j = \frac{N}{G^{1/2} - 1}$$

и

$$\Delta z_j = L \frac{2(j+1) - 1}{(j+N)^2 - j^2}.$$

Найдем теперь закон, связывающий время пролета и пройденное частицей расстояние в поле $\phi \sim z^{4/3}$. Как и раньше, будем рассматривать частицу, начинающую движение в точке $\phi_0 = 0$ с начальной скоростью $v_0 = 0$. Из уравнения непрерывности тока для пучка следует, что

$$\rho = \frac{I_\rho}{v_z},$$

где ρ - плотность зарядов, I_ρ - плотность тока. Из уравнения Пуассона можем определить напряженность поля:

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dz} E_z = \frac{I_\rho}{\epsilon_0 v_z}$$

и

$$E_z = \frac{I_\rho}{\epsilon_0} t.$$

Тогда из уравнения движения $\frac{dv_z}{dt} = \text{const} \cdot t$ окончательно получим

$$z(t) = \text{const} \cdot t^3.$$

Основываясь на аналогичных /как и для поля $\phi \sim z$ / рассуждениях, воспользовавшись равенством $k^3 = \sum_{i=1}^k [3i(i-1)+1]$, получим

$$\Delta z_1 = L * \frac{3i(i-1)+1}{k^3},$$

$$j = \frac{N}{Q^{1/4} - 1}$$

и окончательно

$$\Delta z_1 = L \frac{3(j+1)(j+1-1)+1}{(j+N)^3 - j^3}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Идея расчета Δz_1 в случае $g = \text{const}$ основана на аналогичных принципах:

$$\Delta z_1 = L \frac{g-1}{G-1} g^{i-1} \text{ для } \phi - z$$

и

$$\Delta z_1 = L \frac{g^{3/4} - 1}{G^{3/4} - 1} g^{3/4(i-1)} \text{ для } \phi - z^{4/3}.$$

Формулы, определяющие Δz_1 и ϕ_1 для полей $\phi - z$ и $\phi - z^{4/3}$ для методов $\Delta z = \text{const}$, $\Delta t = \text{const}$ и $g = \text{const}$, приведены в табл.1.

Таблица 1

$1 \leq i \leq N$		$\Delta z = \text{const}$	$\Delta t = \text{const}$	$g = \text{const}$
$\phi - z$	Δz_1	$\frac{L}{N}$	$L \frac{2(j+1)-1}{(j+N)^2 - j^2}$	$L \frac{g-1}{G-1} g^{i-1}$
$\phi - z^{4/3}$			$L \frac{3(j+1)(j+1-1)+1}{(j+N)^3 - j^3}$	$L \frac{g^{3/4} - 1}{G^{3/4} - 1} g^{3/4(i-1)}$
$\phi - z$	ϕ_1	$\phi_0 \left(1 + \frac{1}{N}(G-1)\right)$	$\phi_0 \left(\frac{j+1}{j+N}\right)^2$	$\phi_0 g^i$
$\phi - z^{4/3}$		$\phi_0 \left(1 + \frac{1}{N}(G^{3/4}-1)\right)^{4/3}$	$\phi_0 \left(\frac{j+1}{j+N}\right)^4$	
$\phi - z$		$G = \frac{\phi k}{\phi_0}$	$j = \frac{N}{G^{1/2} - 1}$	$g = G^{1/N}$
$\phi - z^{4/3}$			$j = \frac{N}{G^{1/4} - 1}$	

4. ВЫВОДЫ

Во всех последующих расчетах в качестве исходных данных приняты: нормированный на единицу начальный радиус и начальный угол наклона траектории, вычисленный для плазменного эмиттера, работающего в "бестоковом" режиме, то есть с первеансом пучка $P = I/V^{3/2} / I$ - полный ток пучка, V - ускоряющее напряжение/, равным нулю. Конкретная величина угла начального наклона траектории θ_0 вычислялась для заданной геометрии по формулам работ ^{/1/}. Определяющим θ_0 параметром является характеризующая геометрию вытягивающего промежутка величина "aspect ratio" $S = a/d$ /рис.2/, где a равно радиусу эмиттера, то есть начальному нормированному радиусу траектории $R_0=1$, d - расстояние между эмиттером и вытягивающим электродом. Согласно формулам ^{/1/} росту S соответствует возрастающий начальный угол наклона траектории, то есть условия применимости параксиального приближения выполняются значительно хуже для больших S .

Решая полное уравнение траектории:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{2U} \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dr}{dz} \right), \quad /4.1/$$

где $U = U(r, z)$ - потенциал, можно оценить пределы применимости параксиального уравнения. Эта оценка выполнена нами для случая $G = 4-8$. Решение полного уравнения /4.1/ получено для осевого распределения потенциала $\phi - z$ и $\phi - z^{4/3}$ с учетом в $U(r, z)$ членов порядка r^4 включительно. Интегрирование выполнялось по методу Мерсона ^{/2/}. Отклонения решения параксиального уравнения /2.1/ от решения полного уравнения /4.1/ не превышали 10% для $S < 0,6$ и 5% для $S < 0,4$.

При определении r_i по формуле /2.2a/ точность результатов, определяющих оптические свойства поля $\phi - z$, зависит только от точности параксиального уравнения и не зависит от метода определения Δz_i и количества шагов расчета. В связи с этим на рис.3,4а и 4б представлены результаты применения предлагаемого метода для поля $\phi - z^{4/3}$ в случае $G=6$ и $G=100$. Нормировочными величинами для кривых выбраны значения (R_p, θ_p) точных решений параксиального уравнения /2.1/, полученные методом Мерсона. Длина участка, на котором рассчитывалась траектория, изменялась в зависимости от величины $G = \phi_k / \phi_0$. Начальные и конечные /нормировочные/ данные собраны в табл.2.

Как видно из полученных результатов, для небольших значений G выбор метода определения Δz_i не принципиален, и вполне допустимо определение $\Delta z_i = L/N = \text{const}$, а удовлетворительная точность может быть получена уже для $N=4-8$. Для $G \gg 10$ это уже недопустимо. Разумные, при небольших N , результаты могут быть получены лишь в результате применения метода постоянного

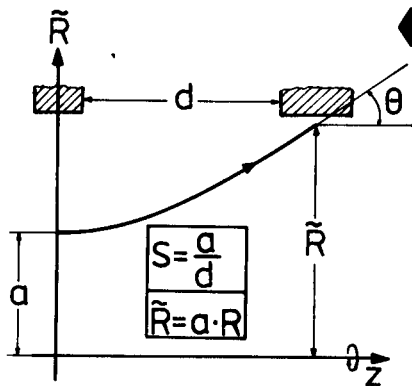


Рис. 3. Конечный нормированный радиус и угол наклона траектории в функции количества шагов аппроксимации поля $\phi \sim z^{4/3}$ отрезками с линейным потенциалом.

Рис. 2. Определение используемых в расчетах величин.

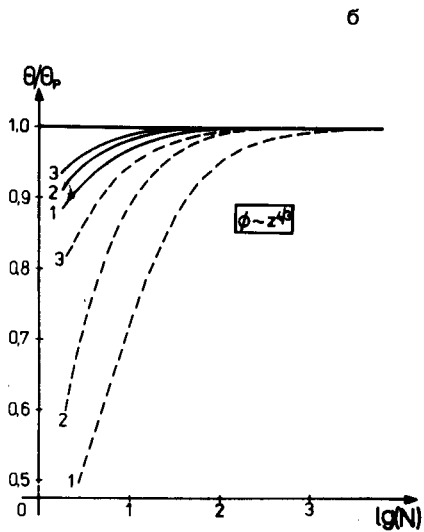
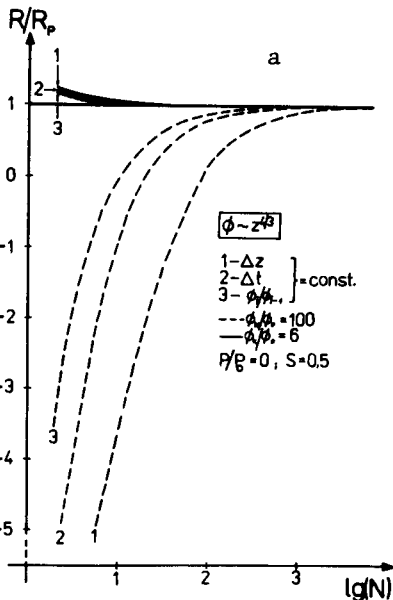
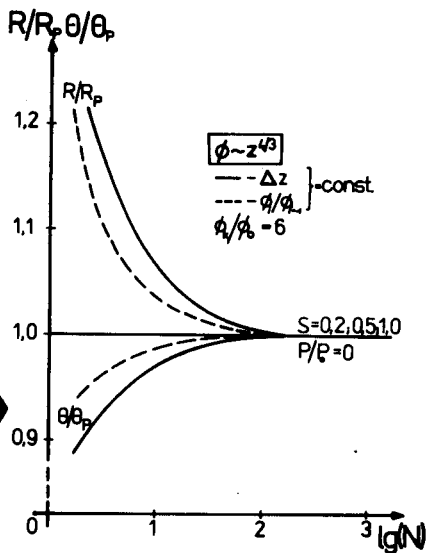


Рис. 4. Конечный нормированный радиус /а/ и угол наклона /б/ траектории в функции количества шагов аппроксимации поля $\phi \sim z^{4/3}$; кривая 1 - $\Delta z = \text{const}$; 2 - $\Delta t = \text{const}$, 3 - $g = \text{const}$.

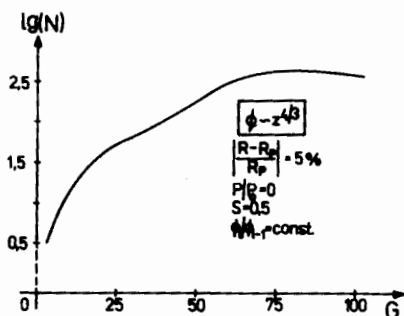
$\phi \sim z^{4/3}$						
S	R ₀	θ_0	R _p		θ_p	
			G = 6	G = 100	G = 6	G = 100
0,2	1,0	-0,14938	0,35973	-0,09808	-0,07797	-0,07852
0,5		-0,37344			-0,19492	-0,19631
1,5		-0,74688			-0,38984	-0,39262

соотношения потенциалов на очередных шагах расчета. Только этот метод для больших G обеспечивает условия параксиальности на начальных шагах расчета и условия применимости используемого нами приближения тонких линз при вычислении фокусных расстояний воображаемых линз, помещенных на концах очередных отрезков, на которые разделены исследуемые участки /см. вывод уравнения /2.2//.

Как видно из табл.1, только для $g_i = \text{const}$ электрооптический показатель n_i является величиной постоянной и не меняющейся в зависимости от номера шага расчета. В случае $\Delta t_i = \text{const}$, и особенно $\Delta z_i = \text{const}$, эти изменения велики, и для больших G при небольшом количестве шагов изменение угла наклона траектории на первых шагах значительно превышает изменения этого угла на конечных шагах расчета. Иначе говоря, на первых шагах происходит основное изменение угла наклона траектории, вычисленное с небольшой точностью, а при $G \gg 10$ даже с недопустимо большой ошибкой. Конечные же шаги для $\Delta z_i = \text{const}$ и $\Delta t_i = \text{const}$ обеспечены условиями, значительно превосходящими требования точности. Метод $g_i = \text{const}$ приводит к равномерному распределению величин углов отклонения по всем шагам, и условия применимости параксиального уравнения на всех шагах расчета одинаковы, поскольку $n_i = g^{-1/2} = \text{const}$. Одновременно и величина f_i для всех рассмотренных методов зависит слабее всего от очередного номера шага i в случае $g_i = \text{const}$.

На основании кривых 3 на рис.4а и 4б можно сделать вывод, что для пучков с небольшим ($\theta_0 < 0,4$) начальным наклоном траектории ($S < 0,5-0,8$) и $G < 10$ оценка оптических свойств формирующих и фокусирующих полей может быть проведена с достаточной точностью при умеренном количестве шагов аппроксимации $N = 2-4$. По мере роста соотношения конечного и начального потенциалов G на исследуемом участке необходимое для получения заданной точности количество шагов также растет /рис.5/.

Рис. 5. Зависимость количества шагов аппроксимаций, обеспечивающих точность вычисления нормированного радиуса пучка не хуже 5%, в функции G .



Ценой потери "чистоты" метода, то есть того, чтобы при $N \rightarrow \infty$ (R_N, θ_N) \rightarrow (R_p, θ_p), можно добиться получения результатов, мало отличающихся от R_p и θ_p уже при $N \approx 2-4$ для любого G . Таким тонко регулирующим параметром является величина $\theta_1 / 2.2$. Путем введения параметра $1 \leq \alpha \leq 4/3$ в уравнение

$$\theta_1 = \theta_{1-1} \alpha + \alpha \frac{r_1}{f_1}$$

можно достигнуть количественного совпадения с заданной точностью величин R и θ с результатами точного решения параксиального уравнения при $N \approx 2-4$ даже для $G \approx 100$.

Подводя итоги сказанного, можно утверждать, что для определения ионооптических свойств электростатических полей приближенными методами наиболее часто употребляемый метод определения длин отрезков, на которые разделяют исследуемый участок в виде $\Delta z_1 = \text{const}$, дает результаты самой низкой точности. Предложенный в этой работе метод $g = \phi_1 / \phi_{1-1} = \text{const}$ обеспечивает значительно лучшие результаты расчета, позволяя одновременно начинать их из точки $\phi_0 \sim 0,01 \phi_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козловски З.А., Дитрих Ю. ОИЯИ, 9-81-208, Дубна, 1981; Дитрих Ю., Козловски З.А. ОИЯИ, 9-81-209, Дубна, 1981; Дитрих Ю., Козловски З.А. ОИЯИ, 9-81-464, Дубна, 1981.
2. CERN 6600. Computer Program Library, No.D208, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1982 года.