

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

4434 /
2-81

31/8-81

9-81-326

П.Ф.Белошицкий, Э.А.Перельштейн, Б.Г.Щинов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
АЗИМУТАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ
В ОДНОМОДОВОМ РЕЖИМЕ

1981

Азимутальные /продольные/ неустойчивости в кольцевых заряженных пучках принципиально ограничивают интенсивность ускоряемых частиц^{/1-3/}. В коллективном ускорителе ионов электронными кольцами требование азимутальной устойчивости в линейной теории приводит к ограничению числа электронов или к необходимому увеличению радиального размера поперечника кольца, что снижает величину эффективного ускоряющего ионы поля^{/4/}. Для приложений наиболее интересным является вопрос о величине энергетического разброса /радиального размера поперечника/ на стадии развитой неустойчивости.

Численное моделирование развития азимутальных неустойчивостей в релятивистских электронных кольцах проводилось в работах^{/5,6/}, в цилиндрическом слое вращающихся электронов /E-слое/ - в работе^{/7/}.

Однако в работах^{/5,6/} моделирование проводилось для довольно ограниченного интервала времени, так что по результатам трудно судить об асимптотическом поведении пучка. Кроме того, при разумном в целом согласии результатов численного моделирования с экспериментами по изучению продольных неустойчивостей электронных колец^{/8/} некоторые важные вопросы /например, зависимость конечного энергетического разброса от начального разброса в пучке, глубина модуляции плотности/ остались невыясненными.

В настоящей работе использован метод исследования динамики азимутальных неустойчивостей, основанный на численном интегрировании уравнений движения частиц, моделирующих кольцо, и решена задача о развитии неустойчивости в одномодовом режиме.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим одномерную задачу об азимутальном движении электронов в кольце, считая его достаточно тонким, так что выполняется условие $a \ll 2\pi r_0$, a - малый размер кольца, r_0 - его радиус. Будем моделировать кольцо точечными частицами, положение каждой из которых в момент времени t характеризуется азимутальными координатой ϕ и скоростью $\omega = d\phi/dt$. Такая постановка задачи соответствует выбору функции распределения

$$f(\phi, \omega, t) = \frac{2\pi}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} \delta[\phi - \phi_k(t)] \delta[\omega - \omega_k(t)], \quad /1/$$

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ

ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

БИБЛИОТЕКА

N_e - число частиц /электронов/ в кольце. Уравнения движения частицы с номером k

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k, \quad \frac{d\omega_k}{dt} = -\frac{2\nu}{\gamma} \eta \omega_0 \frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \omega_n \bar{Z}(\phi_k - \phi_n), \quad /2/$$

где $\nu = \frac{N_e}{2\pi r_0} \frac{e^2}{mc^2}$ - параметр Будкера, ω_0 - средняя начальная частота обращения частиц, γ - релятивистский фактор, $\eta = \left(\frac{E}{\omega} \frac{d\omega}{dE}\right)_{\omega=\omega_0}$. В дальнейшем будем считать $\eta < 0$, что всегда выполняется при движении частицы в слабофокусирующем поле. При написании /2/ мы выразили действующее на частицу поле $E(\phi, t)$ через учитывающий влияние окружающей пучок камеры импеданс $Z_{n, \omega} /4/$

$$E(\phi, t) = -\frac{1}{2\pi r_0} \sum_m Z_{m, m\omega_0} I_m(t) e^{im\phi} = -\frac{e}{(2\pi)^2 r_0} \sum_m Z_{m, m\omega_0} \sum_{k=1}^{N_e} \omega_k e^{im(\phi - \phi_k)} = -\frac{e}{\pi r_0 c} \sum_{k=1}^{N_e} \omega_k \bar{Z}(\phi - \phi_k). \quad /3/$$

Здесь мы предположили, что временная зависимость фурье-гармоник поля и тока имеет вид $E_n(t) = \bar{E}_n(t) e^{in\omega_0 t}$, $I_n(t) = \bar{I}_n(t) e^{in\omega_0 t}$, где $\bar{E}_n(t)$ и $\bar{I}_n(t)$ - медленно меняющиеся комплексные амплитуды, а импеданс $Z_{n, \omega}$ не имеет особенностей при $\omega \approx n\omega_0$. В дальнейшем будем опускать второй индекс у импеданса, подразумевая $Z_n = Z_{n, n\omega_0}$. На ранней стадии неустойчивости, когда амплитуда полей возмущения мала, система уравнений /2/ в согласии с линейной теорией описывает экспоненциальный рост возмущенных величин.

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \phi - \omega_0 t, \quad \zeta = \frac{1}{\chi} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad \tau = \chi \omega_0 t, \quad \chi = \left(-\frac{2\nu}{\gamma} \eta\right)^{1/2}. \quad /4/$$

Для типичных параметров электронных колец в коллективных ускорителях ионов $\chi \approx 0,06 /4/$. В новых переменных система уравнений имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \zeta_k, \quad \frac{d\zeta_k}{d\tau} = \frac{1}{N_e} \sum_n (1 + \chi \zeta_n) \bar{Z}(\xi_k - \xi_n). \quad /5/$$

Одномерное рассмотрение остается справедливым до тех пор, пока выполняется условие

$$\bar{\zeta}, (\bar{\zeta}^2)^{1/2} \ll \frac{1}{\chi}. \quad /6/$$

Поэтому при численном моделировании неустойчивости во втором из уравнений системы /5/ мы пренебрежем членом $\chi \zeta_n$ по сравнению с единицей.

Система уравнений /5/ удовлетворяет равенствам /4/

$$\bar{\zeta}(r) = 2 \sum_{m>0} \text{Re} \bar{Z}_m \int |\lambda(x)|^2 dx + \zeta(0). \quad /7/$$

$$\overline{\zeta^2}(r) + \overline{\zeta^2}(r) - 2 \sum_{m>0} \frac{\text{Im} \bar{Z}_m}{m} |\lambda_m(r)|^2 = 4 \sum_{m>0} \text{Re} \bar{Z}_m \int \text{Re} \Delta \bar{\zeta}_m(x) |\lambda_m(x)|^2 dx + \overline{\zeta^2}(0) + \overline{\zeta^2}(0) - 2 \sum_{m>0} \frac{\text{Im} \bar{Z}_m}{m} |\lambda_m(0)|^2. \quad /8/$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} \zeta_k, \quad \overline{\zeta^2} = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} (\zeta_k - \bar{\zeta})^2, \quad \lambda_m = \int f_m(\omega, t) d\omega = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} e^{-im\phi_k},$$

$$\overline{\Delta \zeta}_m = \frac{1}{\chi \omega_0} \overline{\Delta \omega}_m = \frac{1}{\chi \omega_0} \frac{1}{\lambda_m} \int (\omega - \omega_0) f_m(\omega, t) d\omega = \frac{\sum_{k=1}^{N_e} \zeta_k e^{-im\phi_k}}{\sum_{k=1}^{N_e} e^{-im\phi_k}}.$$

Нас будут интересовать изменения в процессе развития неустойчивости усредненных характеристик кольца: средней частоты обращения частиц $\bar{\zeta}$, среднеквадратичного отклонения $\overline{\zeta^2}$, входящего в пороговое условие линейной теории /4/

$$\overline{\zeta^2} \geq a \left| \frac{\bar{Z}_m}{m} \right|, \quad /9/$$

где a - коэффициент порядка единицы, зависящий от вида функции распределения, глубины модуляции пучка λ_m и просто связанной с ней амплитудой соответствующей гармоники поля E_m

$$|E_m(t)| = \frac{eN_e}{\pi r_0^2} |Z_m| |\lambda_m(t)|. \quad /10/$$

Согласно /10/, максимальная амплитуда гармоники поля, достигаемая при развитии неустойчивости $|E_m|_{\max} = (eN_e / \pi r_0^2) |Z_m| |\lambda_m|_{\max}$. Значение $|\lambda_m|_{\max}$ сильно зависит от величины начального энергетического разброса в пучке. Так, при развитии неустойчивости в одномодовом режиме значение величины $|\lambda_m|_{\max}$ меняется от 0,6 до 0,7 для моноэнергетического пучка до $|\lambda_m|_{\max} \ll 1$ для пучка с начальным разбросом, близким к пороговому.

2. РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОМОВОМ РЕЖИМЕ

Проследим за развитием неустойчивости в условиях сильной нелинейности в простейшем случае, когда в импедансе Z_n выделена одна гармоника n_0 , так что $Z_{n_0} \neq 0$, $Z_n = 0$, $n \neq n_0$.

На нелинейной стадии, после того как амплитуда поля достигла первого максимума, происходят наиболее интересные явления: самозахват пучка в неустойчивости отрицательной массы, деление его на отдельные сгустки в условиях радиационной неустойчивости.

При рассмотрении неустойчивости в одномодовом режиме удобнее перейти к другим переменным /штрихи в дальнейшем опускаем/

$$\xi' = n_0 \xi, \zeta' = \left| \frac{\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}}{n_0} \right|^{-1/2} \zeta, r' = n_0 \left| \frac{\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}}{n_0} \right|^{1/2} r = \left(-\frac{2\nu}{\gamma} \eta \frac{|\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}|}{n_0} \right)^{1/2} n_0 \omega_0 t = \gamma_L t.$$

В этих переменных сила, действующая на частицы, зависит только от отношения $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0}$, а кольцо обладает симметрией порядка n_0 , т.е. функция распределения по азимуту не меняется при повороте кольца на угол $2\pi/n_0$.

$$\frac{d\xi_k}{dr} = \zeta_k, \quad \frac{d\zeta_k}{dr} = \frac{2}{N_e} \sum_{m=1}^{N_e} \left[\frac{\text{Re} \tilde{Z}_{n_0}}{|\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}|} \cos(\xi_k - \xi_m) - \frac{\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}}{|\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}|} \sin(\xi_k - \xi_m) \right]. \quad /5a/$$

Численный анализ развития неустойчивости проведен для следующих значений отношения $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0}$: 0; 0,3; 2; -0,3.

Система уравнений /5a/ интегрировалась методом Рунге-Кутты с постоянным шагом $\Delta r = 5 \cdot 10^{-3} \div 2,5 \cdot 10^{-2}$, изменявшимся в зависимости от величины импеданса. Для контроля результатов некоторые варианты были просчитаны с вдвое меньшим шагом. При этом координата и скорость отдельной частицы несколько менялись, однако эти изменения почти не сказывались на усредненных характеристиках, таких, как среднеквадратичный разброс, средняя частота обращения. При численном моделировании неустойчивости важно было добиться повторяемости результатов при дальнейшем уменьшении шага интегрирования и увеличении числа моделирующих пучков макрочастиц N /одной макрочастице соответствует N_e/N электронов пучка/. Требование независимости результатов от величины шага оказалось значительно более жестким, чем требование сохранения интегралов /7/, /8/ в течение всего счета с погрешностью $< 10^{-4}$. Число макрочастиц, моделирующих кольцо, для моноэнергетического пучка было выбрано $N = 330$, для пучка с отличным от нуля начальным энергетическим разбросом $N = 660$.

1/. $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} = 0$, неустойчивость отрицательной массы

Пусть в начальный момент времени макрочастицы заполняют прямоугольник на фазовой плоскости, причем число частиц с заданной координатой $-N_\xi$, с заданной скоростью $-N_\zeta$, так что $N_\zeta \cdot N_\xi = N$. Для удобства задания начального возмущения припи-

шем каждой частице вес

$$W_k = 1 + A \sin \frac{2\pi}{N_\xi} (k-1), \quad k = 1, 2, \dots, N_\xi. \quad /11/$$

Величина A , характеризующая амплитуду начального возмущения, изменялась в пределах $A = 0,01 \div 0,30$. Задание начального возмущения с помощью весовой функции типа /11/ охватывает лишь один класс возмущений - возмущения плотности. Как показали исследования, проведенные в /7/, конечная стадия неустойчивости очень слабо зависит от типа начального возмущения /плотности или скорости/.

Рассмотрим неустойчивость моноэнергетического пучка. Прежде всего исследуем зависимость результатов от амплитуды начального возмущения и от числа моделирующих кольцо частиц. Как видно из рис.1, при изменении глубины начальной модуляции в широких пределах картина развития неустойчивости сохраняется, появляется лишь естественный временной сдвиг. Кроме того, рис.1 показывает, что характер неустойчивости в целом правильно описывается при $N = 50$ частицах, приходящихся на одну длину волны. Более точно - нужно говорить о времени, в течение которого данное число частиц правильно описывает развитие неустойчивости, например, для $N = 50$ оно составляет $\tau = 20$, когда происходит сбой фазы, для $N = 24$ величина $\tau = 10$. Шаг интегрирования был выбран $\Delta r = 2,5 \cdot 10^{-2}$, при этом интегралы /7/, /8/ сохранялись с точностью $6 \cdot 10^{-15}$ и $1,5 \cdot 10^{-8}$ соответственно.

На начальной стадии неустойчивости в соответствии с результатами линейной теории неустойчивости экспоненциальный рост амплитуды

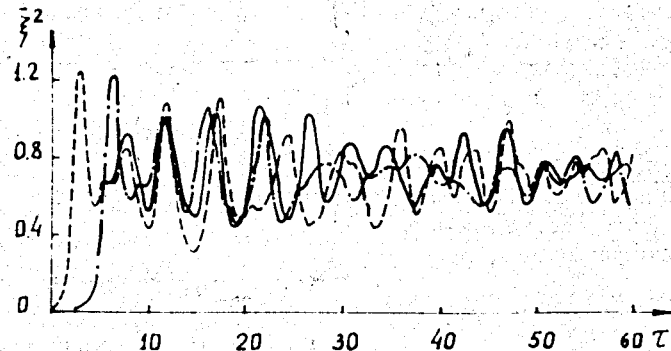


Рис.1. Зависимость разброса в кольце от времени. Начальный разброс $\zeta^2(0) = 0$, $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} = 0$. Сплошная линия - $N = 330, A = 0,3$; штриховая линия - $N = 50, A = 0,3$; штрих-пунктирная линия - $N = 330, A = 0,01$.

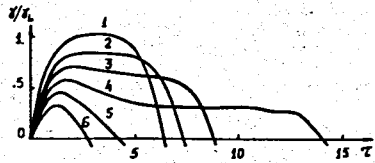


Рис. 2. Зависимость инкремента от времени при различных значениях начального разброса в кольце / $\text{Re} Z_{n0} = 0$; $A = 0,01$ / . 1 - $\zeta^2(0) = 0$; 2 - $\zeta^2(0) = 0,1$; 3 - $\zeta^2(0) = 0,2$; 4 - $\zeta^2(0) = 0,3$; 5 - $\zeta^2(0) = 0,4$; 6 - $\zeta^2(0) = 0,5$.

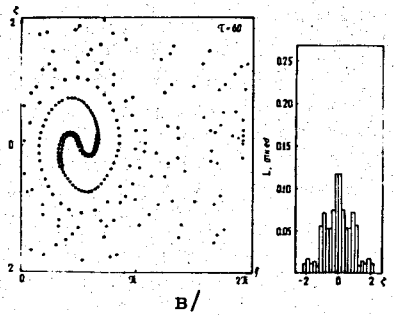
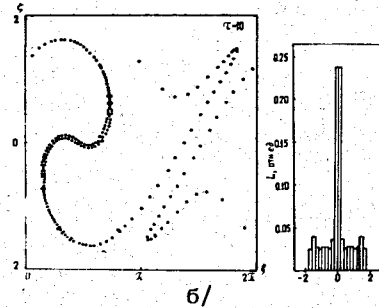
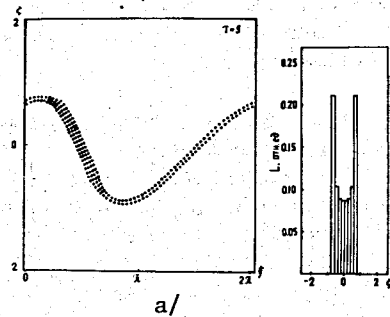


Рис. 3а, б, в. Динамика фазовой плоскости кольца и гистограммы распределения числа частиц L по скоростям.

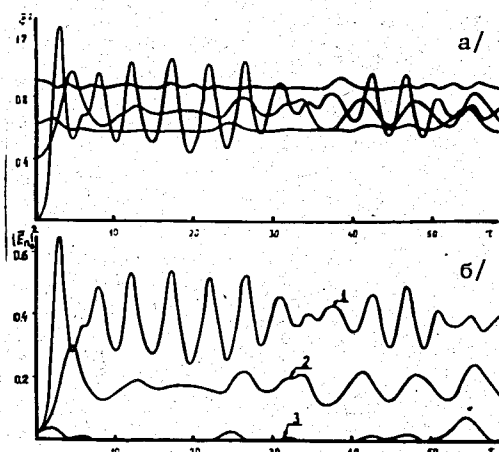


Рис. 4. а/ - зависимость разброса в кольце от времени при различных значениях начального разброса $\zeta^2(0)$; б/ - зависимость квадрата амплитуды гармоники поля от времени, 1 - $\zeta^2(0) = 0$; 2 - $\zeta^2(0) = 0,4$; 3 - $\zeta^2(0) = 0,6$.

туды поля, среднеквадратичного разброса и т.д. Зависимость инкремента от времени на начальной стадии неустойчивости для кольцевых пучков с различным начальным энергетическим разбросом представлена на рис. 2. Наличие плато согласуется с полученным в [9] результатом постоянства инкремента до тех пор, пока разброс в пучке остается значительно меньше максимального.

К моменту времени $\tau \approx 3 \div 6$ / оно зависит от амплитуды начального возмущения / происходит самозахват пучка в потенциальные ямы / рис. 3 /, и в дальнейшем амплитуда поля, энергетический разброс и другие величины осциллируют около некоторого среднего значения с характерным временем $\tau_0 \approx 5$, что несколько меньше периода обращения $T_0 \approx 6 \div 7$ одной частицы в статической потенциальной яме. С течением времени амплитуда колебаний несколько уменьшается, что связано с более равномерным заполнением фазовой плоскости / рис. 3в /, так что при повороте сгустка на фазовой плоскости на произвольный угол функция распределения по скоростям меняется незначительно.

Рассмотрим неустойчивость с отличным от нуля начальным энергетическим разбросом $\zeta^2(0)$. В качестве исходного распределения по скоростям выберем распределение типа "Столик" с $N_z = 11$, когда частицы в пространстве скоростей расставлены на одинаковом расстоянии друг от друга. Для исследования зависимости результатов от вида начального распределения по скоростям был проведен контрольный расчет с гауссоподобным распределением / $\zeta^2(0) = 0,4 \zeta_{\text{пор}}^2$, $\zeta_{\text{пор}}^2 = [1 + (\frac{\text{Re} Z_{n0}}{\text{Im} Z_{n0}})^2]^{1/2}$ - пороговый разброс линейной теории / . Результаты расчета показали очень слабое отличие основных параметров от вида начального распределения по скоростям. Точность сохранения интегралов [7], [8] при прежней величине шага для всех вариантов не превышала в процессе счета $5 \cdot 10^{-13}$ и $5 \cdot 10^{-9}$ соответственно.

На рис. 4а изображена зависимость энергетического разброса в кольце от времени для 4 значений начального разброса $\zeta^2(0) / \zeta_{\text{пор}}^2 = 0; 0,4; 0,625; 0,9$. Из рис. 4а можно сделать следующие выводы: если начальный разброс много меньше порогового, то величина конечного разброса $\zeta_{\text{кон}}^2 \approx 0,7 \div 0,75 \zeta_{\text{пор}}^2$. Если же $\zeta^2(0) \geq 0,6 \zeta_{\text{пор}}^2$, то возникающие в результате неустойчивости электрические поля не достигают больших величин / рис. 4б /, слабо влияют на движение частиц, и конечный разброс остается равным начальному, $\zeta_{\text{кон}}^2 = \zeta^2(0)$. Отметим, что в случае неустойчивости отрицательной массы, когда $\zeta_{\text{кон}}^2 \leq 1$, условие применимости одномерной модели [6] для типичных параметров электронных колец ($\chi = 0,06$) выполняется с большим запасом.

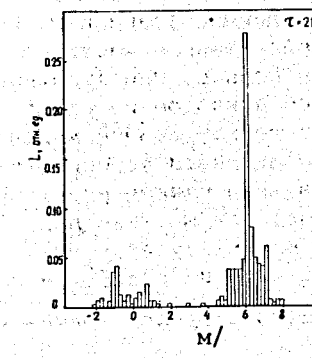
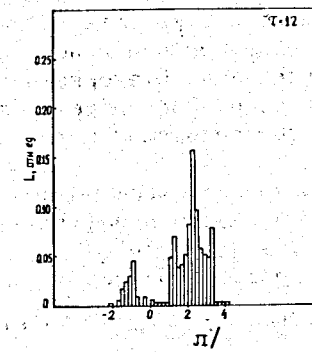
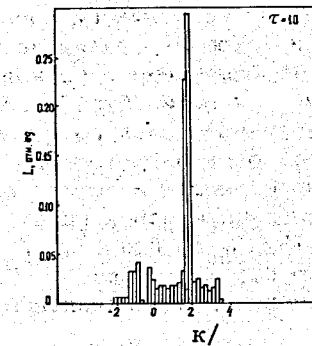
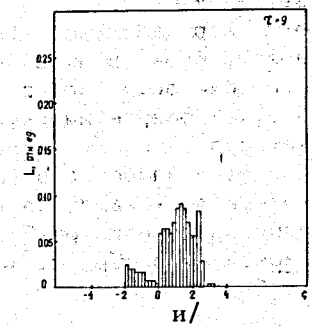
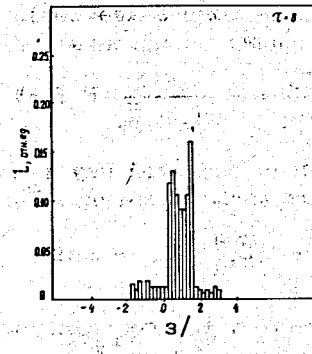
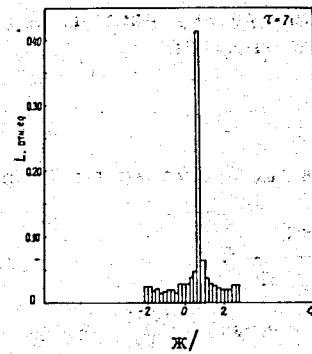
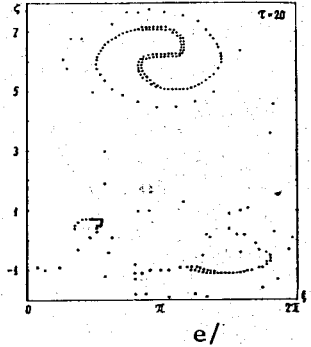
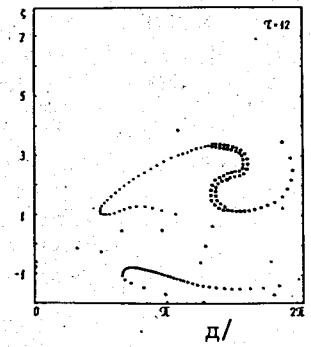
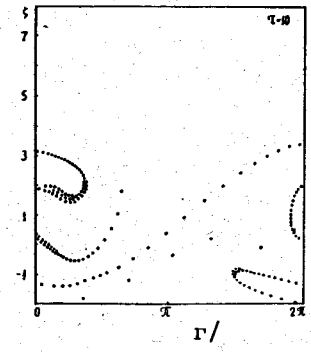
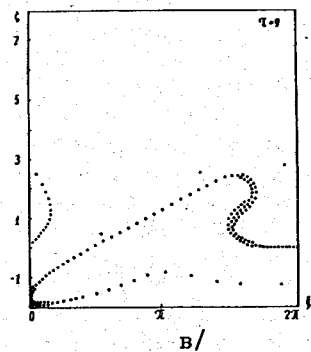
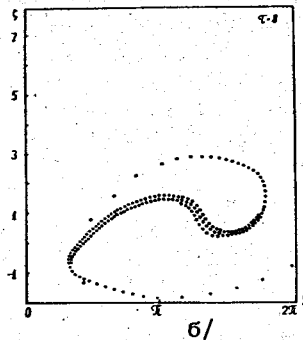
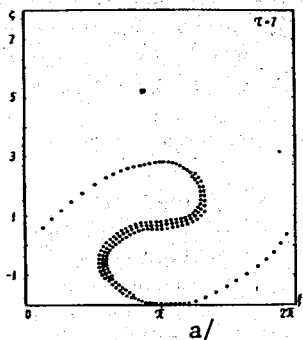


Рис.5. а/-е/- динамика фазовой плоскости кольца;
ж/-м/ - эволюция распределения числа частиц L по скоростям.

Оценим долю захваченных в потенциальную яму частиц. В уравнении движения частицы в поле в переменных /4а/

$$\frac{d^2 \xi}{dr^2} = - \frac{\pi r_0^2}{e N_e \operatorname{Im} \tilde{Z}_{n_0}} E(\xi, r) \quad /12/$$

на стадии развитой неустойчивости для оценки можно пренебречь осцилляциями амплитуды. Тогда

$$\xi^2 - 4 |\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}| \sin \xi = \text{const}, \quad \tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}} = \frac{\pi r_0^2}{e N_e \operatorname{Im} \tilde{Z}_{n_0}} E_{n_0}^{\text{ср.}} \quad /13/$$

Построив на фазовой плоскости кривые с $\text{const} = 4 |\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}|$ /сепаратриса/ со значением \tilde{E}_{n_0} , взятым из результатов численного моделирования, мы приходим к выводу, что вплоть до $\zeta^2(0) = 0,4 \zeta_{\text{кон}}^2$ происходит практически полный самозахват пучка.

Таким образом, развитие неустойчивости отрицательной массы в одномодовом режиме приводит к самозахвату пучка в потенциальные ямы и к нелинейной стабилизации неустойчивости. При этом характеризующие кольцо параметры, такие, как энергетический разброс, осциллируют около своих средних значений. Величина конечного энергетического разброса в кольце - наиболее важная для приложений характеристика - незначительно уменьшается /от $0,7 \div 0,75 \zeta_{\text{пор}}^2$ до $0,6 \zeta_{\text{пор}}^2$ / при увеличении начального разброса от 0 до $0,6 \zeta_{\text{пор}}^2$. При $\zeta^2(0) > 0,6 \zeta_{\text{пор}}^2$ конечный разброс в кольце примерно равен начальному, $\zeta_{\text{кон}}^2 \approx \zeta^2(0)$.

$$2/. \quad \frac{\operatorname{Re} \tilde{Z}_{n_0}}{\operatorname{Im} \tilde{Z}_{n_0}} = 0,3.$$

Появление активной части в импедансе при $\operatorname{Im} \tilde{Z}_{n_0} > 0$ приводит к качественно новому явлению: кольцо разбивается на радиально разделенные фрагменты, количество и параметры которых при заданной активной части определяются величиной начального разброса в кольце. При этом имеет смысл говорить об энергетическом разбросе в каждом из сгустков в отдельности. Рассмотрение процесса в рамках данной модели остается справедливым до тех пор, пока выполняется условие /6/.

Начальная стадия неустойчивости моноэнергетического пучка протекает так же, как и в случае неустойчивости отрицательной массы. К моменту времени $\tau = 7$ происходит азимутальная группировка частиц /рис.5а/ и амплитуда поля в дальнейшем осциллирует около среднего значения $|\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}|^2 \approx 0,45 \left(\frac{e N_e}{\pi r_0^2} \operatorname{Im} \tilde{Z}_{n_0} \right)^2$. Практически сразу вслед за этим / $\tau = 8 \div 12$, рис.5б-д/ пучок разбивается на два - сгусток и остаток. Сгусток содержит ~78% всех частиц, его собственный энергетический разброс $\bar{\epsilon}^2$ к моменту вре-

мени $\tau = 20$ /рис.5е/ $\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} (\zeta_k - \bar{\zeta})^2 \approx 0,4 \bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2$, где суммирование производится по частицам сгустка, а величины $\bar{\zeta}$, $\bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2 = \frac{N_a}{N_c} \zeta_{\text{пор}}^2$ и N_c определяют среднюю скорость частиц сгустка, его собственный пороговый разброс и число частиц в нем. С течением времени радиальное расстояние между сгустком и остатком увеличивается, а число частиц в сгустке остается практически неизменным. Условие /6/ при этом еще выполняется /рис.5е/.

В случае, когда начальный разброс в кольце $\zeta^2(0) = 0,6 \zeta_{\text{пор}}^2$ из кольца сначала выделяется первый сгусток /рис.6а/, содержащий ~38% всех частиц, через довольно продолжительное время ($\tau = 160$) из остатка выделяется второй сгусток /рис.6б, 28% всех частиц/. К моменту времени $\tau = 200$ /рис.6в/ появляется еще один сгусток /15% частиц/. Собственные разбросы сгустков составляют $0,71 \bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2$, $0,50 \bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2$ и $0,67 \bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2$ соответственно.

Аналогично протекает процесс в случае $\zeta^2(0) = 0,9 \zeta_{\text{пор}}^2$. Число частиц в сгустках при этом уменьшается, а их собственные разбросы лежат в интервале $\bar{\epsilon}^2 \approx 0,6 \div 0,7 \bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2$. Темп разбиения на сгустки при этом сохраняется, однако радиальное расстояние между ними существенно уменьшается, так как изменение частоты обращения пропорционально амплитуде электрического поля, которая падает при увеличении начального энергетического разброса.

Процесс разбиения кольца на банчи наблюдается и при начальном разбросе, незначительно превышающем пороговый ($\zeta^2(0) = 1,2 \zeta_{\text{пор}}^2$). Основные закономерности такого процесса, описанные ранее, сохраняются. При дальнейшем увеличении начального разброса /был проведен расчет с $\zeta^2(0) = 2,5 \zeta_{\text{пор}}^2$ / происходит уширение кольца без разбиения на сгустки.

$$3/. \quad \frac{\operatorname{Re} \tilde{Z}_{n_0}}{\operatorname{Im} \tilde{Z}_{n_0}} = 2.$$

С увеличением активной части импеданса на начальной стадии по-прежнему происходит образование сгустков, однако их устойчивость оказывается существенно меньшей, чем в предыдущем случае.

При развитии неустойчивости моноэнергетического пучка возникающая потенциальная яма оказывается глубокой, в нее захватывается около 46% всех частиц /собственный разброс сгустка $\bar{\epsilon}^2 \approx 0,37 \bar{\epsilon}_{\text{пор}}^2$ /, и потери частиц из сгустка при его торможении невелики.

На рис.7 изображена эволюция пучка с $\zeta^2(0) = 0,55 \zeta_{\text{пор}}^2$. К моменту времени $\tau = 8$ /рис.7в/ из пучка выделился первый сгусток, содержащий 23% частиц. Частицы постепенно вываливаются из него, и к моменту образования второго сгустка /17% частиц/ в

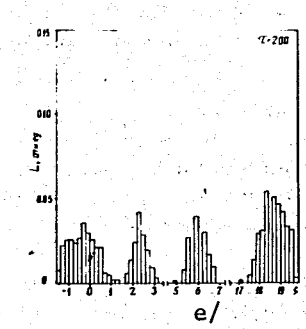
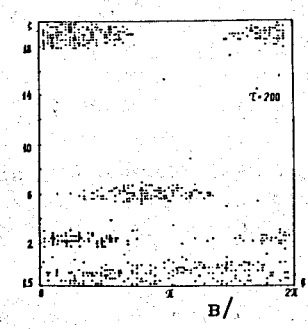
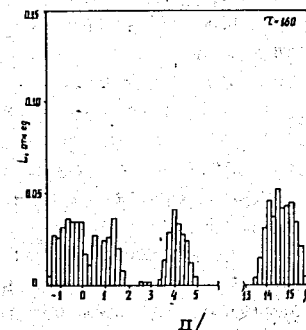
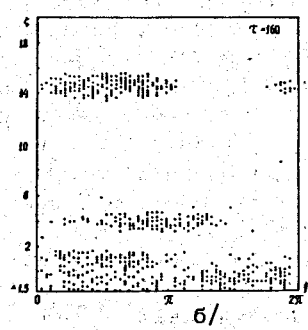
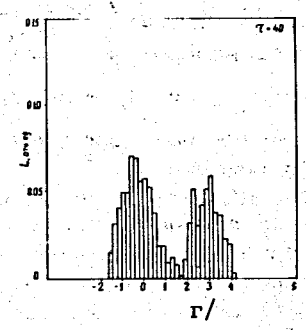
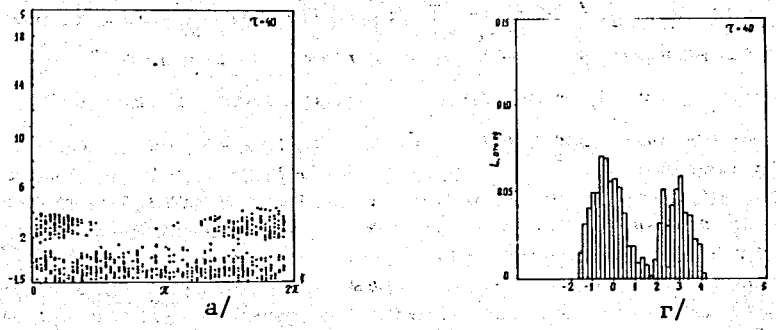


Рис.6. а/, б/, в/ - динамика фазовой плоскости кольца; г/, д/, е/ - эволюция распределения числа частиц L по скоростям ($\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = 0,3$; $\zeta^2(0) = 0,6 \zeta_{\text{пор}}^2$).

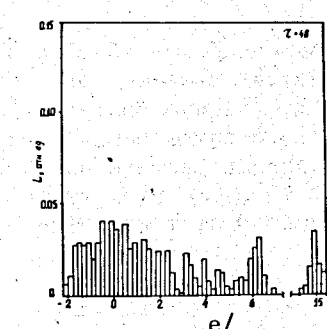
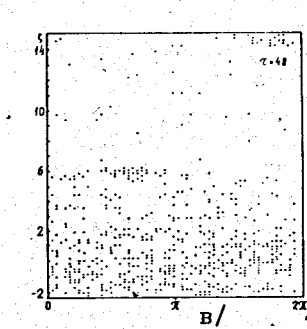
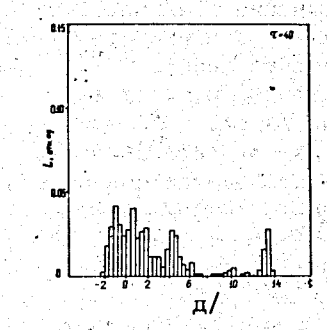
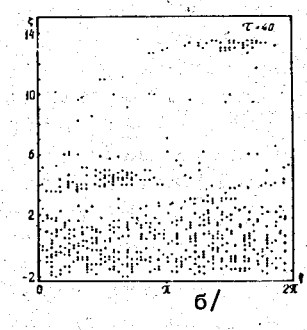
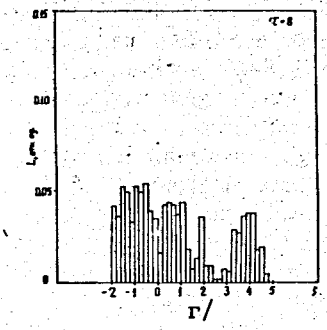
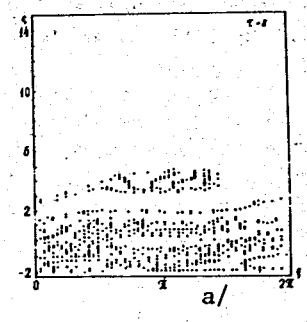


Рис.7. а/, б/, в/ - динамика фазовой плоскости кольца; г/, д/, е/ - эволюция распределения числа частиц L по скоростям ($\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = 2,0$; $\zeta^2(0) = 0,55 \zeta_{\text{пор}}^2$).

первом осталось 10% частиц /рис.7б/. С течением времени число частиц в каждом из сгустков уменьшается /при $\tau = 48$ в первом осталось 8,6% частиц, во втором - 11,5%, рис.7в/.

Описанный процесс разбиения кольца на сгустки можно пояснить, обратившись еще раз к уравнению /12/. В случае, когда $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} \neq 0$, основной вклад в гармонику поля с номером n_0 дает часть поля $E_1(\xi, \tau) = E_1(\xi - \Delta\zeta \cdot \tau - a\tau^2/2)$, связанная с вращающимся сгустком. Здесь $\Delta\zeta$ - сдвиг частоты в линейной теории, величина $a = 2\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} |\lambda_{n_0}|_{\text{ср.}}$ обусловлена потерями энергии частиц. Вводя новую переменную $x = \xi - \Delta\zeta \cdot \tau - a\tau^2/2 + \pi/2$, уравнение /12/ можно привести к виду

$$\ddot{x} = 2|\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}| (\cos x - \cos x_s), \quad \cos x_s = \frac{a}{2|\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}|} = \frac{\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} |\lambda_{n_0}|_{\text{ср.}}^2}{|\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}|} \cdot /14/$$

Уравнение /14/ известно в теории ускорителей как фазовое уравнение, описывающее синхротронные колебания частицы около равновесной фазы x_s /10/. Величина $\cos x_s$ определяет площадь сепаратрисы, и, следовательно, число захваченных в режим ускорения /здесь - торможения/ частиц. С ростом $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0}$ площадь, охватываемая сепаратрисой, уменьшается, и, соответственно, уменьшается число частиц в сгустке. Проиллюстрируем сказанное на примере. В случае неустойчивости моноэнергетического пучка $\cos x_s = 0,17$ для $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = 0,3$ и $\cos x_s = 0,44$ для $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = 2,0$. Величины a и $|\tilde{E}_{n_0}^{\text{ср.}}|$ в обоих случаях взяты из численного счета. Подставляя данные значения в уравнение /14/, находим, что при увеличении отношения $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0}$ от 0,3 до 2,0 азимутальный размер сгустка захваченных частиц уменьшается примерно вдвое, а радиальный малый размер почти не меняется. Таким образом площадь, охватываемая сепаратрисой, уменьшается примерно вдвое. Если предположить, что частицы заполняют фазовую плоскость примерно одинаково в обоих случаях, то доля захваченных частиц должна уменьшиться вдвое. Точные численные расчеты показывают, что это отношение равно $78\%/46\% = 1,7$. С увеличением начального энергетического разброса в пучке растет занимаемая им на фазовой плоскости площадь, и, соответственно, падает доля захваченных в режим торможения частиц.

С увеличением отношения $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0}$ амплитуда осцилляций на нелинейной стадии неустойчивости пучка с отличным от нуля энергетическим разбросом возрастает. Так, при $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = 0,3$ и $\zeta^2(0) / \zeta_{\text{пор}}^2 = 0,4$ $|E_{n_0}|_{\text{max}} / |E_{n_0}|_{\text{min}} = 1,25$, а при $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = 2,0$ и $\zeta^2(0) / \zeta_{\text{пор}}^2 = 0,55$ $|E_{n_0}|_{\text{max}} / |E_{n_0}|_{\text{min}} = 3,1$, и описать режим торможения с помощью уравнения /12/ с заменой E_{n_0} на $E_{n_0}^{\text{ср.}}$ уже

нельзя. Сильные колебания амплитуды поля делают неустойчивым существование сгустка, и частицы вываливаются из него.

Итак, при наличии активной составляющей у импеданса в случае $\text{Im} \tilde{Z}_{n_0} > 0$ на нелинейной стадии неустойчивости происходит деление кольца на сгустки. Число сгустков растет с увеличением начального энергетического разброса в кольце и соответственно падает число частиц в сгустке. Энергетический разброс в сгустке в полтора-два раза меньше порогового ($\zeta^2 = 0,4 \div 0,7 \zeta_{\text{пор}}^2$). При малой величине активной части импеданса по сравнению с реактивной, сгустки существуют продолжительное время. При большой величине $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0}$ происходит их постепенный развал.

$$4/ \quad \text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = -0,3$$

При изменении знака у мнимой части импеданса скорость развития неустойчивости в соответствии с предсказанием линейной теории $\gamma_L' = \frac{1}{2} \frac{\text{Re} \tilde{Z}_{n_0}}{|\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}|} \gamma_L$, γ_L' - линейный инкремент продольной неустойчивости в случае $\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} \ll |\text{Im} \tilde{Z}_{n_0}|$, $\text{Im} \tilde{Z}_{n_0} < 0$ /значительно уменьшается. При этом само ее развитие протекает не так, как в случае $\text{Im} \tilde{Z}_{n_0} > 0$. На начальной стадии /рис.8/ одновременно с ростом разброса ζ^2 происходит уменьшение амплитуды поля \tilde{E}_{n_0} . Этот факт легко объясняется, если обратиться к уравнению /8/, выражающему закон сохранения энергии. На начальной стадии неустойчивости, когда возмущенные величины малы,

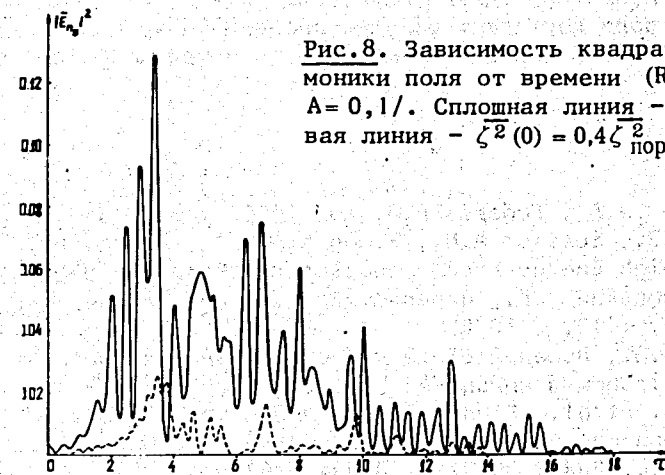


Рис.8. Зависимость квадрата амплитуды гармоники поля от времени ($\text{Re} \tilde{Z}_{n_0} / \text{Im} \tilde{Z}_{n_0} = -0,3$; $A = 0,1$). Сплошная линия - $\zeta^2(0) = 0$, штриховая линия - $\zeta^2(0) = 0,4 \zeta_{\text{пор}}^2$.

уравнение /8/ можно приближенно записать в виде

$$\bar{\zeta}^2(r) - 2 \sum_{m>0} \frac{\text{Im} \bar{Z}_m}{m} |\lambda_m(r)|^2 = \text{const.} \quad /8a/$$

Тогда при $\text{Im} \bar{Z}_m < 0$ с ростом энергетического разброса в пучке должна уменьшаться глубина модуляции λ_m и связанная с ней соотношением /10/ амплитуда гармоники поля. Таким образом, в случае $\text{Im} \bar{Z}_{n_0} < 0$ развитие неустойчивости носит скачкообразный характер, когда на монотонный в среднем рост амплитуд наложены быстрые осцилляции. К моменту $r' = \gamma'_L t = 3,4$ амплитуда поля достигает своего максимального значения /оно примерно в 2,3 раза меньше, чем в аналогичном варианте с $\text{Im} \bar{Z}_{n_0} > 0$ / и затем в среднем монотонно уменьшается. Процесс

уменьшения амплитуды поля имеет место только при $\text{Im} \bar{Z}_{n_0} < 0$ и отсутствует при $\text{Im} \bar{Z}_{n_0} > 0$, когда она по достижении некоторого уровня остается примерно постоянной. Отметим, что сходная временная зависимость амплитуды гармоник поля наблюдалась в экспериментах по изучению продольных неустойчивостей /8/.

Иным оказывается и распределение частиц по частотам обращения: разбиения на сгустки не происходит, и к моменту времени $r' = 16$ /когда $|E_{n_0}| \ll |E_{n_0}|_{\text{max}}$ / оно напоминает гауссово с $\bar{\zeta} = 1,3$ и $\bar{\zeta}^2 = 0,75 \bar{\zeta}^2$.

При увеличении отношения $\text{Re} \bar{Z}_{n_0} / |\text{Im} \bar{Z}_{n_0}|$ /был проведен расчет с $\text{Re} \bar{Z}_{n_0} / \text{Im} \bar{Z}_{n_0} = -2$ и $\bar{\zeta}^2(0) = 0$ / характер временной зависимости \bar{E}_{n_0} не меняется. Однако неустойчивость носит более сильный характер, поля достигают больших значений и конечный энергетический разброс в кольце оказывается значительно больше порогового.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. АЭ, 1959, т.7, с.549.
2. Nielsen C.E., Sessler A.M., Symon K.R. In: Proc. Int. Conf. on High Energy Accel. and Instr., Geneva, 1959, p.239.
3. Бонч-Осмоловский А.Г., Перельштейн Э.А. Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т.13, с.1080.
4. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. "Атомиздат", М., 1979.
5. Shinov B.G. et al. Plasma Phys., 1971, vol.15, p.211; Бонч-Осмоловский А.Г. и др. ОИЯИ, Р9-5622, Дубна, 1971.
6. Гетманов Б.С. ОИЯИ, Р9-9244, Дубна, 1975.
7. Grewal M.S., Byers G.A. Plasma Phys., 1969, vol.11, p.727.

8. Faltens A. et al. In: Proc. IX Int. Conf. on High Energy Accel. California, Stanford, 1974, p.226; LBL-2488, Berkeley, 1974.
9. Бонч-Осмоловский А.Г., Цытович В.Н. В кн.: Труды ФИАН им. П.Н.Лебедева. "Наука", М., 1973, с.144.
10. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. "Физматгиз", М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 мая 1981 года.