

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2082/2-80

12/5-80

9-80-46

А.А.Глазов, Е.Н.Заплатин

ВЫБОР, РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ
УСКОРЯЮЩИХ РЕЗОНАТОРОВ
СУПЕРЦИКЛОТРОНА

1980

В изохронных циклотронах на энергию несколько сот МэВ для осуществления эффективной инжекции и минимизации потерь частиц в процессе ускорения необходимо осуществлять ускорение частиц со значительным набором энергии за оборот. Поскольку оптимальной в этом случае является магнитная система, состоящая из отдельных блоков, разделенных промежутками, оказывается возможным использовать в качестве ускоряющих элементов высокодобротные объемные резонаторы, которые обеспечивают максимальный набор энергии при минимальной мощности потерь.

Классическим примером циклотрона с ускоряющими элементами в виде прямоугольных резонаторов является циклотрон $\text{SIN}^{1/}$. Недостатками "чистых" прямоугольных резонаторов являются синусоидальное распределение ускоряющего напряжения по радиусу с максимумом в центре резонатора и значительная ширина "ускоряющей щели", обусловленная необходимостью иметь минимальные потери и тем самым максимально допустимый по конструктивным соображениям поперечный размер резонатора. Кроме того, в таких резонаторах частоты целого ряда высших мод колебаний кратны основной частоте, что обуславливает их эффективное возбуждение ускоряемым пучком и в результате - потребление дополнительной мощности.

Улучшить распределение напряжения можно благодаря созданию определенной конфигурации поперечного сечения резонатора посредством введения внутренних выступов в зоне ускорения. Это приводит также к еще одному положительному эффекту, а именно, уменьшению размеров "ускоряющей щели" и тем самым угла пролета ускоряемых частиц.

Рассмотрим прямоугольный резонатор /рис.1/. Для целей ускорения необходимо распределение поля с вектором \vec{E} , направленным вдоль координат z . Наименшей и наиболее благоприятной модой колебаний в этом случае будет TM_{110} , у которой распределение электрического и магнитного полей будет следующим:

$$E_z = E_{z0} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b_1}y\right); \quad E_x = E_y = H_z = 0; \quad /1/$$

$$H_x = iE_{z0} \frac{\lambda}{2\eta b_1} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b_1}y\right); \quad H_y = -\frac{E_{z0} \lambda}{2\eta a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b_1}y\right),$$

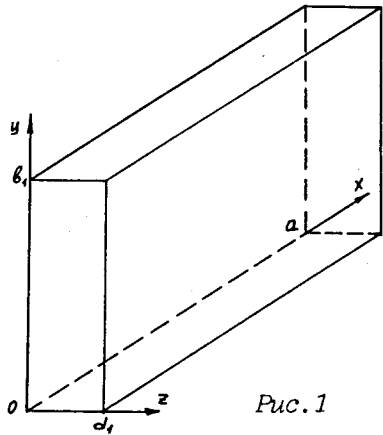


Рис. 1

где $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, а собственная длина волны

$$\lambda = 2ab_1 / (a^2 + b_1^2)^{1/2} \quad /2/$$

Мощность потерь в стенках резонатора определяется выражением

$$P = \frac{R_s \lambda^2}{8\eta^2} V_0^2 \left[\frac{b_1}{2ad_1^2} + \frac{a}{2b_1d_1^2} + \frac{a}{b_1^2d_1} + \frac{b_1}{a^2d_1} \right], \quad /3/$$

где R_s - поверхностное сопротивление, $V_0 = E_0 d_1$ - максимальное напряжение.

Добротность резонатора

$$Q = \omega \frac{W_0}{P}, \quad /4/$$

где запасенная энергия равна

$$W_0 = \frac{\epsilon ab_1}{8d_1} V_0^2. \quad /5/$$

Воспользовавшись вышеприведенными выражениями, произведем расчет прямоугольных резонаторов, подходящих для суперциклотрона, выбрав в качестве исходного параметра длину резонатора a . Диапазон рабочих радиусов суперциклотрона: $2,40 \text{ м} \leq R \leq 6,50 \text{ м}$, длина резонатора должна быть при этом больше 6 м . Учитывая необходимость введения выступов в зоне ускорения, частоту "гладких" резонаторов выберем равной 60 МГц , а $d_1 = 45 \text{ см}$, аналогично принятому в циклотроне SIN. Результаты расчета представлены в таблице. Для сравнения там же приведены характеристики резонатора на 50 МГц .

Для оценки изменения частоты, вызванного наличием выступов, целесообразно воспользоваться методом возмущений. В первом приближении изменение частоты будет определяться выражением

$$f^2 = f_0^2 \left(1 + \frac{\Delta W_E - \Delta W_H}{W_0} \right) = f_0^2 (1 + \delta W), \quad /6/$$

где ΔW_E и ΔW_H - энергия электрического и магнитного полей в области, занимаемой возмущающим телом до его введения; W_0 - энергия, запасенная в невозмущенном резонаторе.

Вдавим резонатор, как показано на рис. 2. Тогда получим

$$\Delta W_E = -\epsilon_1 E_0^2 z_1 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sin^2\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\lambda y}{b_1}\right) dx dy = \frac{\epsilon_1 E_0^2}{4} z_1 AB, \quad /7/$$

Таблица

$\lambda = 5 \text{ м}$			$\lambda = 6 \text{ м}$		
a	b ₁	P при U ₀ = 0,5 МВ Q × 10 ⁻³	b ₁	P при U ₀ = 0,5 МВ Q × 10 ⁻³	
м	м	кВт	м	кВт	
6	2,75	94,5	40,5	3,46	38,9
7	2,68	108,4	40,1	3,32	38,5
8	2,63	122,7	39,8	3,24	38,2
9	2,60	137,2	39,6	3,18	38,0
10	2,58	151,9	39,4	3,14	37,8

$$\Delta W_H = \mu_1 \left(\frac{\lambda}{2\eta}\right)^2 E_0^2 z_1 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{\lambda y}{b_1}\right)}{b_1^2} + \frac{\cos^2\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\lambda y}{b_1}\right)}{a^2} \right] dx dy =$$

$$= -\frac{\mu}{4} \left(\frac{\lambda}{2\eta}\right)^2 E_0^2 z_1 \left[\frac{A'B'}{b_1^2} + \frac{A'B}{a^2} \right], \quad /8/$$

$$A = (x_2 - x_1) - \frac{a}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{a} x_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{a} x_1\right) \right), \quad /9/$$

$$B = (y_2 - y_1) - \frac{b}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{b_1} y_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{b_1} y_1\right) \right),$$

$$A' = (x_2 - x_1) + \frac{a}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{a} x_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{a} x_1\right) \right),$$

$$B' = (y_2 - y_1) + \frac{b_1}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{b_1} y_2\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{b_1} y_1\right) \right). \quad /9'/$$

Будем считать, что:

1/ резонатор вдавлен симметрично в центре и

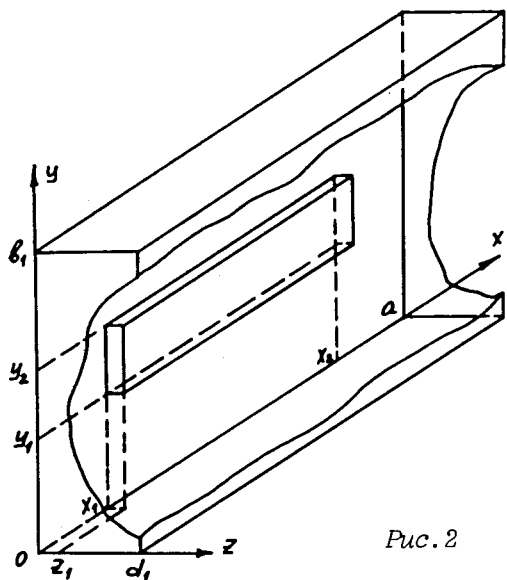
2/ высота выступа мала по сравнению с высотой резонатора,

$$h_1 / b_1 \ll 1.$$

При этом

$$B = 2h_1, \quad B' = \left(\frac{\pi h_1}{b_1}\right)^3 / 6 \approx 0; \quad /10/$$

$$A = \ell + \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \ell}{a}\right); \quad A' = \ell - \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \ell}{a}\right).$$



Из /5/, /7/, /8/ и /10/ следует, что

$$\delta W = \frac{h_1}{ab_1 d_1} z_1 \left[\ell \left(4 - \frac{\lambda_0^2}{a^2} \right) + \frac{a}{\pi} \sin \left(\frac{\lambda \ell}{a} \right) \left(4 + \frac{\lambda_0^2}{a^2} \right) \right] \quad /11/$$

Если подставить в полученное выражение величины, характерные для макета резонатора SIN, то получим в соответствии с /6/

$$f_{\text{SIN}} \approx f_0 (1 - 0,387 z_1)^{1/2} \quad /6'/$$

или, если ввести в рассмотрение расстояния между выступами δ ,

$$f = f_0 [1 - 0,1935(0,45 - \delta)]^{1/2} \quad /6''/$$

Экспериментально полученная зависимость $f(\delta)$ для макета резонатора SIN, взятая из работы /2/, и результаты расчета по формуле /6''/ /крестики/ приведены на рис.3. Видно, что формула дает значительные расхождения с экспериментом /меньшие значения изменения частоты/ при больших изменениях зазора. Это объясняется тем обстоятельством, что выражение /11/ справедливо только при малых возмущениях, пока можно считать, что поле в области

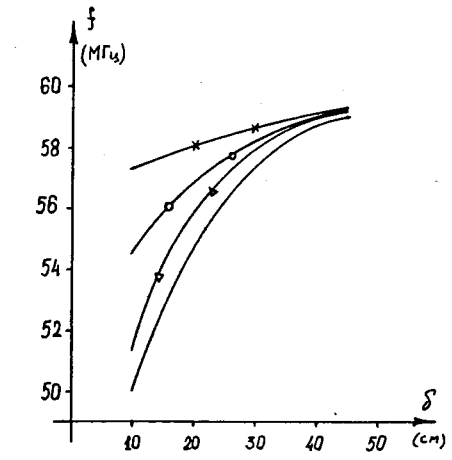


Рис. 3

возмущения равно полю в невозмущенной области. Реально напряженность поля в зазоре между выступами возрастает по сравнению с полем в "невозмущенном" резонаторе; и необходимо применить этот факт.

Воспользуемся исходным выражением теории возмущений /3/:

$$(\beta^2 - \beta_0^2) \int_V \vec{E} \vec{E}_0 dv = \int_{V'} (\text{rot} \vec{E}_0 \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \text{rot} \vec{E}_0) dv, \quad /12/$$

где \vec{E} - "возмущенное" поле, V' - область возмущения. Предположим, что в области возмущения амплитуда

$$|\vec{E}| = \frac{V_0}{\delta} = \frac{E_0 d_1}{(d_1 - 2z)}, \quad /13/$$

а распределение поля остается невозмущенным.

Подставляя значения E и E_0 в /12/ и выполняя интегрирование в предположении симметрии и малости высоты выступов, найдем

$$\begin{aligned} (\beta^2 - \beta_0^2) \frac{ab_1 d_1}{4} &= \frac{h_1 d_1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\ell - \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi \ell}{a} \right) \times \\ &\times \ln \frac{d_1}{\delta} \frac{d_1 h_1}{2} \beta_0^2 \left(\ell + \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi \ell}{a} \right) \ln \frac{d_1}{\delta}. \end{aligned} \quad /14/$$

Первый член в правой части выражения /14/ соответствует ΔH и значительно меньше второго. Если им пренебречь, то выражение для частоты резонатора с выступами приобретает вид

$$f = f_0 \left[1 - \frac{2h_1}{ab_1} \left(\ell + \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi \ell}{a} \right) \ln \frac{d_1}{\delta} \right]^{1/2}. \quad /15/$$

Значения частоты, рассчитанные по формуле /15/ для макета резонатора SIN, приведены на рис.3 /кружки/. Видно лучшее совпадение с экспериментальными результатами. Максимальное отличие частоты в рассматриваемом диапазоне изменений зазора не превышает 10% при малых δ /экспериментальное значение ниже/. Воспользуемся выражением /15/ для расчета значений собственной частоты резонатора суперциклотрона в зависимости от величины зазора между выступами. Как и для случая SIN, будем считать, что частота невозмущенного резонатора равна 60 МГц, а размеры: $a = 8$ м, $d_1 = 0,45$ м, $h_1 = 0,16$ м, $\ell = 4,4$ м. Подставляя приведенные значения в /15/ и воспользовавшись результатами таблицы, найдем

$$f = f_0 \left(1 - 0,105 \ln \frac{0,45}{\delta} \right)^{1/2}. \quad /16/$$

Зависимость частоты от величины зазора между выступами δ , рассчитанная по формуле /16/, представлена на рис.4 /кружки/. Приблизительно собственную частоту резонатора можно найти также, рассматривая резонатор как волновод с поперечным сечением, показанным на рис.5, в котором возбуждается TE-волна, а длина вдоль оси z равна половине собственной длины волны в волноводе:

$$a = \frac{\lambda_{\text{волн}}}{2} = \frac{1}{2f\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}, \quad /17/$$

$$f^2 = c^2/4a^2 + f_{\text{кр}}^2,$$

где $\lambda_{\text{кр}}$ - критическая длина волны в волноводе. Для нахождения зависимости критической частоты от величины зазора между выступами воспользуемся методом частичных областей. Разобьем поперечное сечение волновода на три области, в каждой из которых отличны от нуля только три компоненты поля - E_x , H_z , H_y , а общее решение волнового уравнения имеет следующий вид:

$$\psi = (A_x \cos k_x x + B_x \sin k_x x) \cdot (A_y \cos k_y y + B_y \sin k_y y), \quad /18/$$

где $k_y^2 = \omega^2 \epsilon \mu - k_x^2 = k^2 - k_x^2$, k_x , k_y - постоянные. Граничными условиями будут условия непрерывности линий магнитного поля на границах раздела областей и условие равенства нулю тангенциальной и нормальной составляющих соответственно электрического и магнитного полей на металлических поверхностях.

Из граничных условий находим выражения для поля в области I:

$$E_{xn} = (A_n \cos k_{yn} y + B_n \sin k_{yn} y) \cos\left(\frac{n\pi}{c_1} x\right), \quad /19/$$

$$H_{zn} = \frac{j\omega\epsilon}{k_{yn}} (-A_n \sin k_{yn} y + B_n \cos k_{yn} y) \cos\left(\frac{n\pi}{c_1} x\right).$$

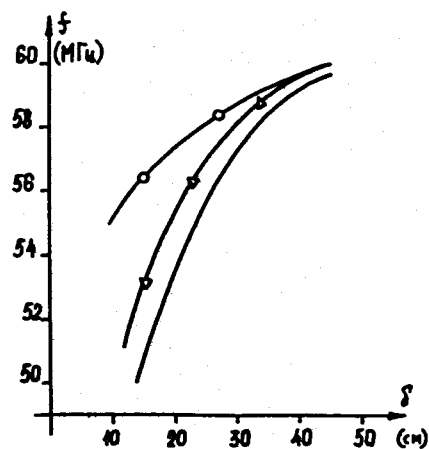


Рис. 4

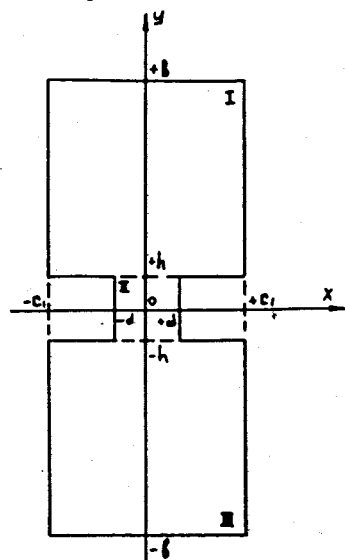


Рис. 5

Используя условие непрерывности H_z при $y=h$ и тот факт, что в нашем случае расстояние между выступами волновода ($\delta = 2d$) много меньше всех остальных размеров и длины волны основного типа колебания, а следовательно, с достаточной степенью точности можно считать, что поле между выступами не имеет вариаций по x , найдем

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} kh = \operatorname{sink} h + \frac{\cos kh}{\operatorname{tg} kb} - \frac{2kc_1}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi a}{n^3 e^{T_n h}}, \quad /20/$$

где

$$a = \frac{d}{c_1}, \quad T_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{c_1}\right)^2 - k^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Это трансцендентное уравнение может быть использовано для определения критической длины волны. Решая его и зная связь между критической длиной волны в волноводе и длиной волны основного типа колебания резонатора /17/, получим зависимость собственной частоты резонатора суперциклотрона от величины зазора между выступами /рис. 4, треугольники/. Аналогичная зависимость для резонатора SIN представлена на рис. 3 /треугольники/.

Для проверки теоретических результатов была сделана модель резонатора в масштабе 1:10. Она представляет собой прямоугольный параллелепипед, выполненный из листового дюралюминия. В боковых стенках сделаны выступы, которые можно плавно менять по длине. Для возбуждения модели использовался генератор ГЗ-41. Для измерения распределения напряженности поля вдоль резонатора в выступах были проделаны 5 отверстий, через которые вводился зонд, другим концом соединенный с милливольтметром ВЗ-25. Собственная частота модели изменялась в диапазоне от 500 до 600 МГц в зависимости от расстояния между выступами. Эта зависимость, пересчитанная по отношению к полномасштабному резонатору, представлена на рис. 4 /сплошная кривая/. Видно хорошее подтверждение экспериментом теоретических результатов. Распределение напряженности поля модели изменялось от синусоидального /в "чистом" резонаторе/ до почти трапецеидального /в модели с выступами/, т.е. в пространстве между выступами поле по длине резонатора постоянно.

Таким образом, резонатор суперциклотрона может представлять собой прямоугольный параллелепипед со сторонами $8 \times 2,63 \times 0,45 \text{ м}^3$, с прямоугольными внутренними выступами в медианной плоскости высотой 0,16 м и длиной 4,4 м. Расстояние между выступами должно быть при этом $12 \div 14 \text{ см}$. Добротность такого резонатора будет составлять примерно 35000, а мощность потерь при максимальном напряжении 500 кВ будет около 150 кВт.

Для окончательного определения параметров резонатора, детального выяснения характера распределения напряженности поля вдоль ускоряющей кромки и условий возбуждения необходимо проведение модельных исследований в более крупном масштабе, например, 1:4, при котором частота модели составит 200 МГц, а максимальный размер резонатора - около двух метров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блазер Д.П., Гербер Г.Д., Виллакс Г.А. Труды II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. "Наука", М., 1972, с.55.
2. Lanz P., Frei H., Banteli J. Results of First Measurements on the 1:1 Model of a H_{101} Cavity for the ETH Cyclotron. Zyklotronplanung der ETH, Zürich, 1966.
3. Гуревич А.Г. Полые резонаторы и волноводы. "Сов. радио", М., 1952.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 января 1980 года.