

7498

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



7498

ЭЛЗ. ЧИТ. ЗВЛБ

9 - 7498

Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, В.А.Михайлов

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ  
СИСТЕМЫ МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА ПУЧКА  
ИЗ СИНХРОФАЗОТРОНА ОИЯИ

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Объединенного института ядерных исследований

я самостоятельными публикациями. Согласно ст. 4 Устава ОИЯИ. Отличается в том, что текст препринта должен быть опубликован в каком-либо научном журнале

Классификация

Классифицированные публикации ОИЯИ имеют определенную нумерацию, составляющую последовательный номер

номер - может быть представлен

языке;

на языке;

на русском и английском языках. Публикации рассылаются только в страны, которые не имеют

определенным обозначением, определяет публикации. Перечень тематических публикаций рассылается их получателям. Публикации проставляются в правом верхнем углу каждого издания.

Ссылки

ссылки на препринты и сообщения ОИЯИ указываются по номеру, фамилию автора, далее - институт-издателя, индекс, место и год

ссылки:

, Дубна, 1971.

Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, В.А.Михайлов

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ  
СИСТЕМЫ МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА ПУЧКА  
ИЗ СИНХРОФАЗОТРОНА ОИЯИ

енка параметров системы медленного  
ка из синхрофазотрона ОИЯИ

на  $\nu_x = 2/3$  и рассмотрены особенно-  
ущений видов  $b_2 x^2 \sin 2\theta$  и  $b_4 x^4 \sin 2\theta$ .  
нелинейностей. На основании полученных  
теристик выведенного пучка на  
эв элементов выводной системы.  
системах питания. Исследуется влияние  
учет некоторых эффектов, связанных  
ля.

ститута ядерных исследований  
1973

## ВВЕДЕНИЕ

Система медленного вывода первичного пучка из синхрофазотрона ОИЯИ основана на использовании свойств резонанса радиальных бетатронных колебаний  $\nu_x = 2/3$ . Расчет системы производился как численными, так и аналитическими методами. На первом этапе вычислений с помощью аналитических методов были получены основные соотношения, характеризующие поведение пучка при резонансе  $\nu_x = 2/3$  и приближенные значения параметров выводной системы. Затем с учетом полученных результатов на ЭВМ был выполнен расчет динамических характеристик пучка и режимов вывода с использованием реальных параметров ускорителя.

В настоящей работе с помощью аналитических методов исследованы свойства резонанса  $\nu_x = 2/3$  и выполнены расчеты характеристик пучка и оценка параметров резонансной системы.

## УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

При анализе движения частиц в условиях резонанса  $\nu_x = 2/3$  использовалось гладкое приближение  $1/1$  и движение рассматривалось в плоскости  $z=0$ . Уравнение бетатронных колебаний при этих условиях можно записать в виде

$$x'' + (1 - n_0) k x = - \frac{R_c}{B_c} \Delta V_z(x, \theta), \quad /1/$$

где  $x = R - R_c = R - R_0 I$  - отклонение от сглаженного центрального радиуса,  $R_0$  - центральный радиус в квадранте ускорителя,  $I = 1 + \frac{2L}{\pi R_0}$ ,  $L$  - длина прямолинейного промежутка,  $B_c = \frac{R_0 B_0}{R_c}$ ,  $B_0$  - вертикальная проекция маг-

нитного поля на радиусе  $R_0$ ,  $\Delta B_z(x, \theta)$  - вертикальная проекция возмущения магнитного поля. Дифференцирование ведется по азимуту  $\theta$ . Уравнение /1/ можно записать в канонической форме, если положить

$$\frac{R_c}{B_c} \Delta B_z(x, \theta) = \frac{\partial H^{(1)}(x, \theta)}{\partial x};$$

$$H = \frac{p^2 + (1 - n_0) I x^2}{2} + H^{(1)}(x, \theta); \quad p = \frac{dx}{d\theta}.$$

$$\text{Тогда } \frac{dx}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\theta} = - \frac{\partial H}{\partial x}$$

и  $H^{(1)}$  можно рассматривать как возмущающую добавку к гамильтониану  $H^{(0)} = \frac{p^2 + I(1 - n_0)x^2}{2}$ , соответствующему идеальной линейной системе.

Если представить  $H^{(1)}$  в виде

$$H^{(1)} = \sum_k h_k(\theta) x^k \quad /2/$$

и предположить, что коэффициенты  $h_k$  содержат лишь вторую и нулевую азимутальные гармоники, то, следуя работе /2/, можно показать, что на движение частиц при  $\nu_x = 2/3$  оказывают влияние лишь члены разложения /2/ с нечетными степенями  $x$  для вторых гармоник  $h_k$  и с четными степенями  $x$  для нулевых гармоник  $h_k$ . Таким образом, гамильтониан возмущения  $H^{(1)}$  с учетом лишь членов, влияющих на резонанс  $\nu = 2/3$ , можно записать следующим образом:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} -$$

$$H^{(1)} = (k_0 x + \frac{k_2 x^3}{3} + \frac{k_4 x^5}{5} + \dots) \sin 2\theta - \frac{I n_2 x^4}{4} - \dots,$$

тогда уравнение /1/ примет вид

$$x'' + (1 - n_0 - n_2 x^2 - \dots) I x = -(k_0 + k_2 x^2 + k_4 x^4 + \dots) \sin 2\theta. \quad /3/$$

Уравнение /3/ описывает движение в медианной плоскости ускорителя с показателем поля  $n(x) = n_0 + n_2 x^2 + \dots$ . Вторую азимутальную гармонику возмущения  $\Delta B_z = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4$  на синхрофазотроне ОИЯИ наиболее просто создать, чередуя знаки возмущения в соседних квадрантах. Связь между  $k_m$  и  $b_m$  /  $m = 0, 2, 4$ / дается выражением

$$k_m = \frac{4}{\pi} \frac{R_c}{B_c} b_m, \quad /4/$$

в котором коэффициент  $4/\pi$  получается из разложения ступенчатой формы возмущения в ряд Фурье.

Если представить решение уравнения /3/ в виде

$$x = x_1 + \frac{k_0}{4 - (1 - n_0) I} \sin 2\theta, \quad x' = x_1' + \frac{2k_0}{4 - (1 - n_0) I} \cos 2\theta, \quad /5/$$

то с точностью до величин второго порядка по  $k_0, k_2, k_4$  и  $n_2$  получается уравнение для  $x_1$ :

$$x_1'' + \left\{ 1 - n_0 - \frac{k_0 k_2}{[4 - (1 - n_0) I] I} \right\} I x_1 = - \left[ \left( k_2 - \frac{3k_0 n_2 I}{4 - (1 - n_0) I} \right) x_1^2 + k_4 x_1^4 \right] \sin 2\theta + \left( n_2 - \frac{2k_0 k_4}{[4 - (1 - n_0) I] I} \right) I x_1^3. \quad /6/$$

Из сравнения уравнений /3/ и /6/ видно, что присутствие в возмущении члена  $k_0$  и связанное с этим искажение равновесной орбиты /3/, описываемое формулами /5/, приводят к изменению эффективных значений  $n_0, k_2, k_4, n_2$ . Эффективное значение  $n_0$  изменяется на величину

$$\delta n = - \frac{k_0 k_2}{[4 - (1 - n_0) I] I} \quad /7/$$

Этим объясняется наблюдавшееся снижение значения показателя поля в ускорителе при резонансе<sup>/4,5/</sup>.

В дальнейшем рассматривается уравнение вида

$$x'' + (1 - n_0) I x = -(k_2 x^2 + k_4 x^4) \sin 2\theta + n_2 I x^3, \quad /8/$$

где  $x$  - теперь отклонение от искаженной равновесной орбиты, а  $n_0$  - эффективное значение показателя поля.

Уравнение /7/ решалось с использованием 1-го приближения метода Крылова - Боголюбова<sup>/6/</sup>. Решение ищем в виде

$$x = a(\theta) \sin \left[ \frac{2}{3} \theta + \Phi(\theta) \right]. \quad /9/$$

Получаем систему уравнений для амплитуды  $a$  и фазы  $\Phi$

$$\frac{da}{d\theta} = - \left( \frac{3}{16} k_2 a^2 + \frac{9}{64} k_4 a^4 \right) \sin 3\Phi, \quad /10/$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = - \frac{3}{4} I \Delta n - \left( \frac{3}{16} k_2 a + \frac{15}{64} k_4 a^3 \right) \cos 3\Phi - \frac{9}{16} n_2 I a^2,$$

где  $\Delta n = n_0 - n_r$ ,  $n_r$  - значение показателя поля в точном резонансе. Заменой переменных

$$x = a \sin \Phi, \quad u = a \cos \Phi,$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{3}{16} k_2 (x^2 - u^2) + \frac{3}{64} k_4 (3x^4 + 6x^2 u^2 - 5u^4) - \frac{3}{4} I \Delta n u - \\ &- \frac{9}{16} n_2 I u (u^2 + x^2), \end{aligned} \quad /11/$$

$$\frac{du}{d\theta} = - \frac{3}{8} k_2 x u - \frac{3}{16} k_4 x u (u^2 + 3x^2) + \frac{3}{4} I \Delta n x + \frac{9}{16} n_2 I x (u^2 + x^2).$$

Из /9/ видно, что переменные  $x, u$  в системе /11/ представляют собой отклонение и его производную,

отнесенную к частоте ( $u = \frac{x'}{\sqrt{(1-n_0)I}}$ ) на азимуте  $\theta=0$ , т.е.

уравнения /11/ описывают движение на фазовой плоскости  $(x, u)$  в декартовой системе координат. Непосредственной проверкой можно показать, что система /11/ инвариантна относительно поворота осей координат на  $\pm \frac{2\pi}{3}$ , следовательно, чтобы исследовать движение на фазовой плоскости, достаточно установить характер фазовых траекторий в интервале  $0 \leq \Phi \leq \frac{2\pi}{3}$ .

Координаты, одновременно обращающие в нуль правые части системы /11/, соответствуют движению с постоянной частотой и амплитудой. Для исследования движения в окрестности особых точек необходимо в системе /11/ перейти к новым переменным  $\bar{x} = x - x_i$ ,  $\bar{u} = u - u_i$ , где  $(x_i, u_i)$  - координаты особой точки, и сохранить лишь члены, линейные по  $\bar{x}$  и  $\bar{u}$ .

#### ХАРАКТЕРИСТИКИ ПУЧКА ПРИ $k_1 = 0, n_2 = 0$

В этом случае система /11/ принимает вид

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3}{16} k_2 (x^2 - u^2) - \frac{3}{4} I \Delta n u, \quad /12/$$

$$\frac{du}{d\theta} = - \frac{3}{8} k_2 x u + \frac{3}{4} I \Delta n x.$$

Координаты особых точек равны:

$$\begin{aligned} x_0 = 0, u_0 = 0; \quad x_1 = 0, u_1 = - \frac{4\Delta n I}{k_2}; \quad x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \frac{\Delta n I}{k_2}, \\ u_{2,3} = \frac{2\Delta n I}{k_2}. \end{aligned} \quad /13/$$

Можно показать, что первая из этих точек является устойчивой точкой типа "центр", а остальные три явля-

ются неустойчивыми точками типа "седло". Прямые, соединяющие эти точки, являются одним из решений системы /12/ и определяют область устойчивости. Фазовые траектории, проходящие через точки вне этой области, уходят в этом случае в бесконечность.

На рис. 1 показаны фазовые траектории при  $\Delta n > 0$ ,  $k_2 > 0$ .

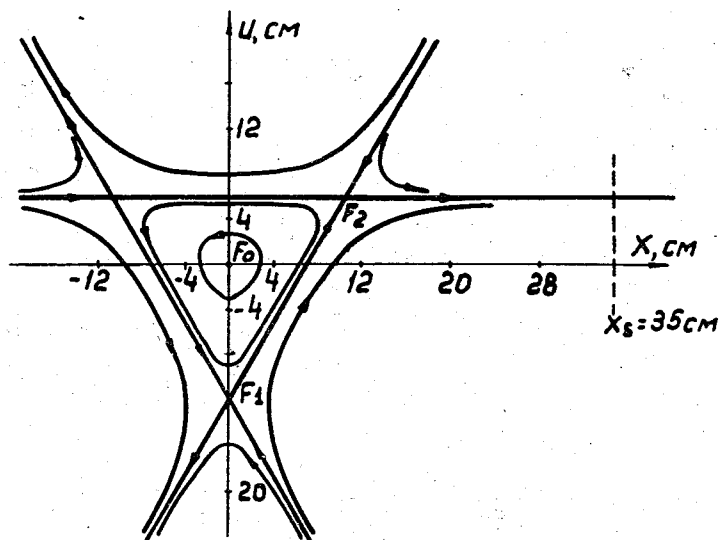


Рис. 1. Фазовые траектории при  $k_2 = 3,94 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta n = 0,01$ ,  $k_4 = 0$ ,  $n_2 = 0$ .

Из /13/ видно, что размер области устойчивости стремится к нулю при  $\Delta n \rightarrow 0$  и при  $k_2 \rightarrow \infty$ . Следовательно, вывод пучка может быть осуществлен как путем изменения  $n_0$  от рабочего значения до резонансного, так и путем увеличения возмущения во времени. В последнем случае площадь области устойчивости никогда не обращается в нуль и для эффективного вывода требуются высокие токи в резонансной системе, поэтому был выбран первый метод введения пучка в резонанс.

Площадь фазового эллипса циркулирующего пучка в плоскости  $(x, x')$  равна:

$$S_0 = \pi a_0^2 \sqrt{(1-n_0)I}, \quad /14/$$

где  $a_0$  - максимальная амплитуда. В процессе адиабатического изменения  $n_0$  начальный эллипс деформируется так, что площадь фазовой области, заполненной пучком, остается постоянной. Вывод начинается, когда кривая, ограничивающая заполненную фазовую область, трансформируется в треугольник, площадь которого равна:

$$S = 12 \sqrt{3} \left( \frac{\Delta n_b I}{k_2} \right)^2 \sqrt{(1-n_b)I}, \quad /15/$$

где  $n_b$  - показатель поля в момент начала вывода. Условие равенства площадей /14/ и /15/ определяет расстройку  $\Delta n_b$ , соответствующую началу вывода

$$\Delta n_b = \frac{a_0 k_2 \sqrt{\pi}}{2I \sqrt{27}} \quad /16/$$

Если отклоняющий септум-магнит (FM) расположен на  $x_s > 0$ , то, как следует из /12/ и /13/, при  $\Delta n = 0$  точки на фазовой плоскости, которые соответствуют частицам, попадающим в зазор магнита, при адиабатическом изменении  $\Delta n$  движутся приблизительно по прямой  $u = \frac{2\Delta n I}{k_2}$ , т.е. угол входа частиц изменяется в процессе вывода от

$$\alpha = \frac{2\Delta n_b I \sqrt{(1-n_b)I}}{k_2 (x_s + R_0)} \quad /17/$$

в начале вывода до  $\alpha = 0$  в конце. Здесь  $x_s$  - координата септума.

Для компенсации этого изменения угла и, следовательно, уменьшения эффективного эмитанса выведенного пучка требуется изменять ток в магните FM в процессе

вывода так, чтобы угол отклонения в FM менялся по закону

$$\alpha_F(n_0) = \alpha_{F0} + \frac{2I[(n_b - n_r)\sqrt{(1-n_b)I} - (n_0 - n_r)\sqrt{(1-n_0)I}]}{k_2(x_s + R_0)} =$$

$$= \alpha_{F0} + \frac{2I^{3/2}(n_b - n_0)\sqrt{1-n_0}}{k_2(x_s + R_0)},$$

где  $\alpha_{F0}$  - угол отклонения в FM в начале вывода. Изменение угла в процессе вывода можно также компенсировать, вводя изменяющуюся в процессе вывода дипольную компоненту возмущения  $k_0$ . Закон ее изменения можно получить, используя /17/ и /5/:

$$k_0(n_0) = \frac{I^{3/2}(n_b - n_0)\sqrt{1-n_0}[4 - (1-n_0)I]}{k_2}.$$

Для создания второй гармоники дипольной компоненты возмущения необходимо проложить по крайней мере в двух квадрантах дополнительные полюсные проводники, поэтому для компенсации изменения угла выведенного пучка был выбран, как более простой, первый способ.

Укороченные уравнения для случая движения точки на фазовой плоскости по прямой  $u = \frac{2\Delta n I}{k_2}$  имеют вид

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3}{16} k_2 (x^2 - x_2^2),$$

/18/

$$\frac{du}{d\theta} = 0.$$

Интегрируя /18/, получаем прирост координаты /шаг/ за три оборота на радиусе септума

$$\Delta x_s = \frac{(x_s^2 - x_2^2)(e^{-9\pi k_2 x_2/4} - 1)}{[x_s + x_2 - (x_s - x_2)e^{-9\pi k_2 x_2/4}]},$$

где  $x_2$  определяется формулами /12/. При  $\frac{9}{4}\pi k_2 x_2 \ll 1$  формула упрощается:

$$\Delta x_s \approx \frac{9}{8} \pi k_2 (x_s^2 - x_2^2). \quad /19/$$

При введении пучка в резонанс путем увеличения  $k_2$  величина заброса, как видно из /19/, меняется в широких пределах, что значительно снижает эффективность вывода. Если вывод осуществляется путем изменения  $n_0$ , то глубина заброса и, следовательно, эффективность тоже несколько меняются, так как  $x_2 \neq 0$  при  $n_0 \neq n_r$ . Этот эффект можно компенсировать соответствующим уменьшением  $k_2$  в процессе вывода.

Используя /19/ и принимая во внимание, что плотность частиц на данном радиусе обратно пропорциональна шагу за три оборота, получаем выражение для эффективности вывода:

$$E_f = 1 - \frac{\int_{x_s}^{x_s+\delta} \frac{8dx}{9\pi k_2(x^2 - x_2^2)}}{\int_{x_s}^{x_s+9\pi k_2(x_s^2 - x_2^2)/8} \frac{8dx}{9\pi k_2(x^2 - x_2^2)}} \approx$$

$$\approx 1 - \frac{8\delta}{9\pi k_2(x_s^2 - x_2^2)}, \quad /20/$$

где  $\delta$  - толщина септума.

### ХАРАКТЕР ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ВСЕХ ЧЛЕНОВ, ОТВЕТСТВЕННЫХ ЗА РЕЗОНАНС

Рассмотрим вначале  $k_4 \neq 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $n_2 = 0$ . В этом случае из системы /11/ определяются 4 особые точки с координатами

$$x_0 = 0, u_0 = 0; \quad x_1 = 0, u_1 = -2 \sqrt[3]{\frac{2}{5} \frac{I \Delta n}{k_4}};$$

$$x_{2,3} = \pm \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{\frac{2}{5} \frac{I \Delta n}{k_4}}, \quad u_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{2}{5} \frac{I \Delta n}{k_4}}. \quad /21/$$

Первая из этих точек  $F_0$  является особой точкой типа "центр", а остальные - типа "седло". Точки  $F_2$  и  $F_3$  получаются поворотом точки  $F_1$  на  $\pm \frac{2\pi}{3}$ . На рис. 2 приведены фазовые траектории при  $k_4 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $\Delta n = 0,006$ . Из этого рисунка видно, что одна из разомкнутых ветвей сепаратриссы асимптотически приближается к оси  $u = 0$ . Это приводит к тому, что изменение угла на входе в FM в процессе вывода при использовании возмущения вида  $b_4 x^4 \sin 2\theta$  гораздо меньше, чем при секступольном возмущении.

Глубина заброса в FM определяется из системы /11/, в которой можно положить для достаточно больших

$$x_s, u = 0, \quad \frac{du}{d\theta} = 0;$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{9}{64} k_4 x^4. \quad /22/$$

Интегрируя /22/, получаем значение  $k_4$  при котором шаг за 3 оборота на координате септума составляет  $\Delta x_s$ :

$$k_4 = \frac{32}{81\pi} \frac{(x_s + \Delta x_s)^3 - x_s^3}{x_s^3 (x_s + \Delta x_s)^3}. \quad /23/$$

Расстройку  $\Delta n_b$ , соответствующую началу вывода, можно оценить из соотношения

$$\pi a_0^2 \sqrt{(1-n_0)I} = s(\Delta n_b) > s_\Delta = 3\sqrt[3]{\frac{2}{5} \frac{I \Delta n_b^2}{k_4}} \sqrt{(1-n_b)I}, \quad /24/$$

где  $s(\Delta n_b)$  - площадь устойчивой области на фазовой плоскости в момент начала вывода,  $s_\Delta$  - площадь

треугольника с вершинами в особых точках при  $n_0 = n_b$ .

Рассмотрим теперь  $k_2 \neq 0$  и  $k_4 \neq 0$ . Если  $k_2$  и  $k_4$  имеют одинаковые знаки, то, как следует из системы /11/, характер движения на фазовой плоскости будет аналогичен представленному на рис. 2.

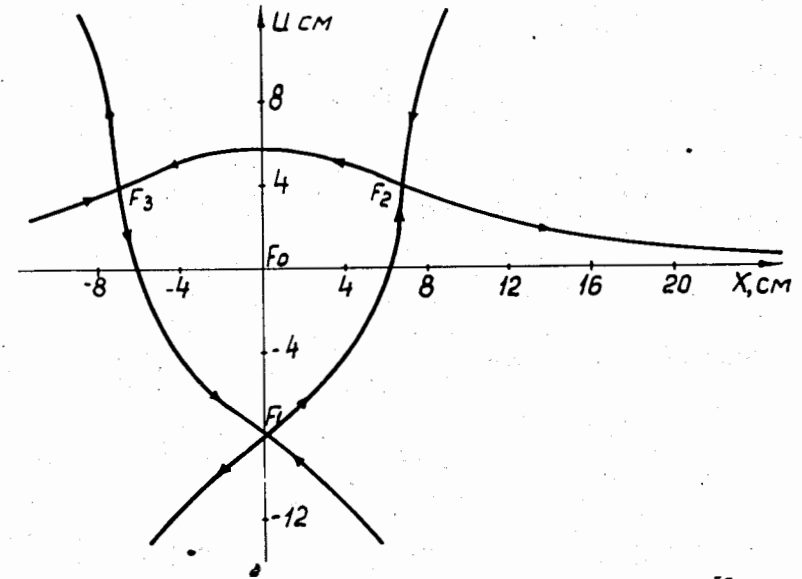


Рис. 2. Фазовые траектории при  $k_1 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $k_2 = 0$ ,  $\Delta n = 6 \cdot 10^{-3}$ ,  $n_2 = 0$ .

Соответствующая ветвь сепаратриссы асимптотически приближается к оси  $u = 0$ , причем скорость сходимости стремится к нулю при  $k_4/k_2 \rightarrow 0$ . Таким образом, одновременное присутствие в возмущении секступольной и декапольной компонент одинакового знака не меняет качественно характер движения на фазовой плоскости. При увеличении вклада в возмущение декапольной компоненты глубина заброса в FM будет возрастать, а изменение угла на входе уменьшаться.

Чтобы проанализировать движение при  $k_2$  и  $k_4$  противоположных знаков, рассмотрим систему /10/, в кото-



рой положим  $n_2 = 0$ . Из первого уравнения находим, что при  $a = a_c = 2\sqrt{-k_2/3k_4}$  амплитуда не меняется, следовательно, окружность  $u^2 + x^2 = a_c^2$  является решением системы /11/.

Рассмотрим характер движения на фазовой плоскости в зависимости от расстройки  $\Delta n$ .

При  $|\Delta n| \geq \left| \frac{k_2}{3I} \sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}} \right|$ , кроме точки устойчивого

равновесия  $F_0(x=0, u=0)$ , имеются такие 3 особые точки типа "седло", координаты одной из которых ( $F_1$ ) удовлетворяют условию:

$$x=0, \frac{3}{4}I\Delta n + \frac{3}{16}k_2 u + \frac{15}{64}k_4 u^3 = 0. \quad /25/$$

Две другие особые точки получаются поворотом  $F_1$  на  $\pm 2\pi/3$ . Характер фазовых траекторий для этого случая

приведен на рис. 3. При  $|\Delta n| = \left| \frac{k_2}{3I} \sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}} \right|$  сепаратрисса

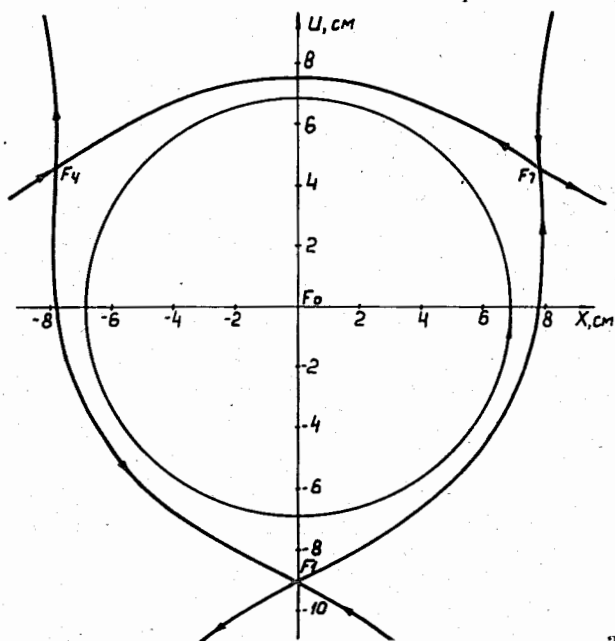


Рис. 3. Фазовые траектории при  $k_2 = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_4 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_2 = 0$ ,  $\Delta n = 9 \cdot 10^{-3}$ .

представляет окружность с радиусом  $a_c$ , на которой лежат найденные 3 особые точки /рис. 4/.

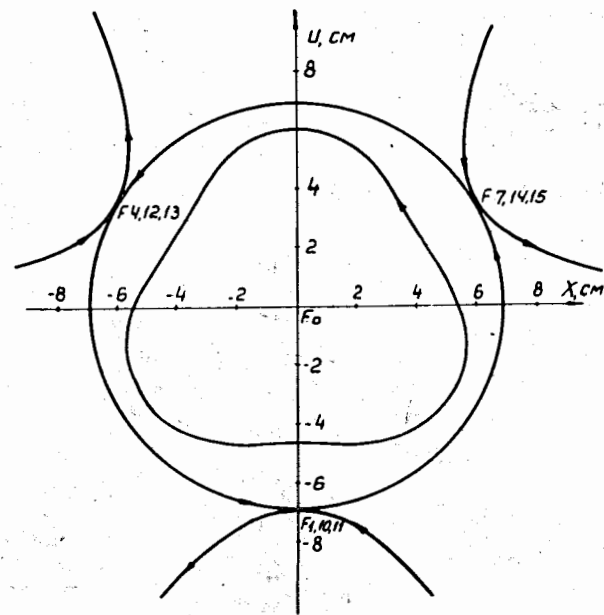


Рис. 4. Фазовые траектории при  $k_2 = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_4 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_2 = 0$ ,  $\Delta n = 2,7 \cdot 10^{-3}$ .

При  $|\Delta n| < \left| \frac{k_2}{3I} \sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}} \right|$  эти точки являются особыми точками типа "центр" и к ним добавляются 6 точек неустойчивого равновесия типа "седло". Их координаты удовлетворяют условию

$$a = a_c = 2\sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}}, \quad \cos 3\Phi = \frac{3I\Delta n}{k_2 \sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}}}.$$

При  $|\Delta n| < \left| \frac{k_2}{3I} \sqrt{-\frac{k_2}{15k_4}} \right|$  уравнение /25/ имеет 3 дей-

ствительных корня, следовательно, к точке  $F_1$ , которая является в этом случае точкой устойчивого равновесия типа "центр", добавляются две особые точки  $F_2$  и  $F_3$  /рис. 6/. Точка  $F_2$  с координатой  $u$ , меньшей по абсолютной величине, является особой точкой типа "седло", а  $F_3$  - точкой устойчивого равновесия типа "центр".

При  $|\Delta n| = \left| \frac{k_2}{3I} \sqrt{-\frac{k_2}{15k_4}} \right|$  уравнение /25/ имеет корень кратности два и точки  $F_2$  и  $F_3$  совпадают /рис. 5/.

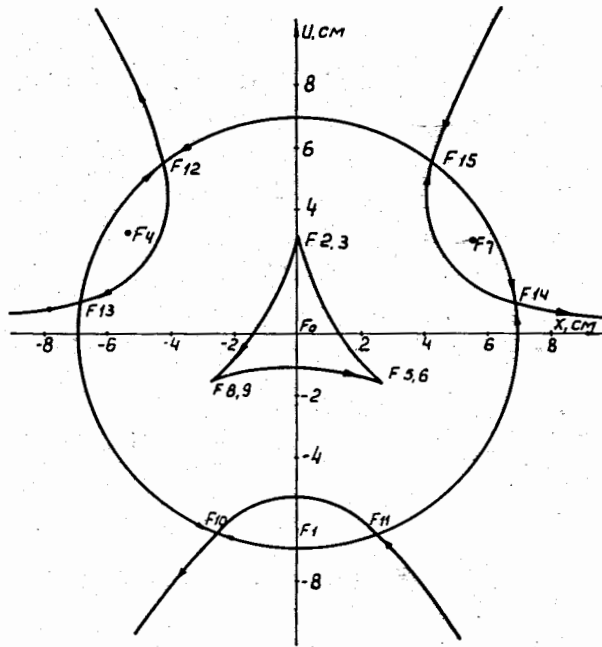


Рис. 5. Фазовые траектории при  $k_2 = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_4 = 7 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_2 = 0$ ,  $\Delta n = 1,089 \cdot 10^{-3}$ .

При  $\Delta n = 0$  точка  $F_2$  совпадает с точкой  $F_0$  и является точкой неустойчивого равновесия типа "седло" /рис. 7/, а координаты точек  $F_1$  и  $F_3$  равны ( $x_1 = 0$ ,

$$u_1 = -2\sqrt{-\frac{k_2}{5k_4}} \text{ и } (x_3 = 0, u_3 = +2\sqrt{-\frac{k_2}{5k_4}}) \text{ соответственно.}$$

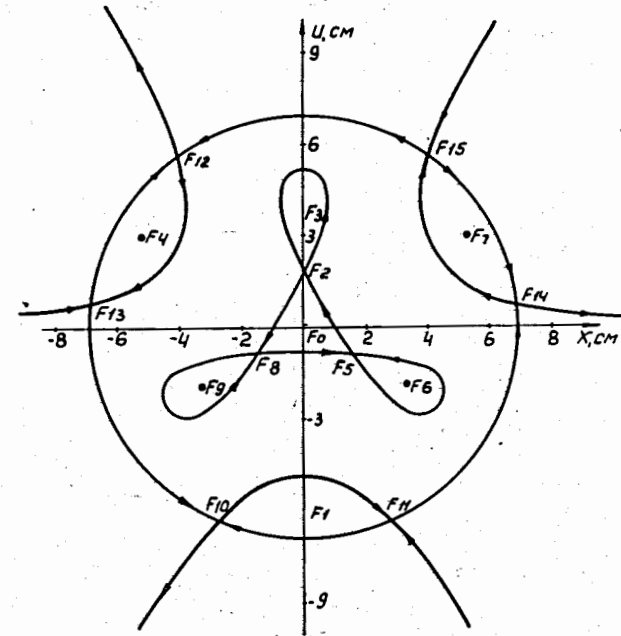


Рис. 6. Фазовые траектории  $k_2 = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_4 = 7 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_2 = 0$ ,  $\Delta n = 8,46 \cdot 10^{-4}$ .

При использовании при выводе секступольного возмущения необходимо потребовать  $|x_s| \ll \left| 2\sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}} \right|$ . Это определяет допуск на величину  $k_4$ :

$$|k_4| \ll \left| \frac{4k_2}{3x_s} \right|. \quad /26/$$

Если при выводе используется возмущение вида  $b_4 x^4 \sin 2\theta$ , то частицы с начальными амплитудами

$a_0 < a_c = 2\sqrt{-\frac{k_2}{3k_4}}$  выведены не будут. Поэтому нужно стремиться, чтобы коэффициент  $k_2$  равнялся нулю или был одинакового знака с  $k_4$ .

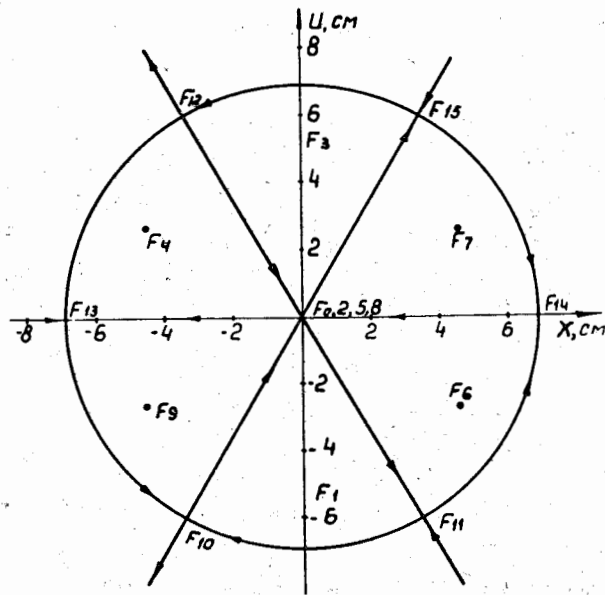


Рис. 7. Фазовые траектории при  $k_2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_4 = 7 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_2 = 0$ ,  $\Delta n = 0$ .

Рассмотрим теперь  $n_2 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$ ,  $k_4 = 0$ . Система /11/ примет вид:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3}{16} k_2 (x^2 - u^2) - \frac{3}{4} I \Delta n u - \frac{9}{16} n_2 I u (x^2 + u^2),$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{3}{8} k_2 x u + \frac{3}{4} I \Delta n x + \frac{9}{16} n_2 I x (x^2 + u^2).$$

Полагая  $x = 0$ , находим координаты особых точек  $F_0, F_1$  и  $F_2$ :

$$x_0 = 0, u_0 = 0; \quad x_{1,2} = 0, u_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 48 I^2 \Delta n n_2}}{6 n_2 I} \quad /27/$$

Еще четыре особые точки находятся поворотом  $F_1$  и  $F_2$  на  $\pm \frac{2\pi}{3}$ :

$$x_{3,5} = \pm \frac{u_1 \sqrt{3}}{2}, \quad u_{3,5} = -\frac{u_1}{2}; \quad x_{4,6} = \pm \frac{u_2 \sqrt{3}}{2}, \quad u_{4,6} = -\frac{u_2}{2} \quad /28/$$

На рис. 8 приведен характер фазовых траекторий при  $n_2 < 0$ ,  $k_2 > 0$  и значениях расстройки  $\Delta n > 0$  (а),  $\Delta n = 0$  (б),  $0 > \Delta n > \frac{k_2}{48 I^2 n_2}$  (с) и  $\Delta n < \frac{k_2}{48 I^2 n_2}$  (д).

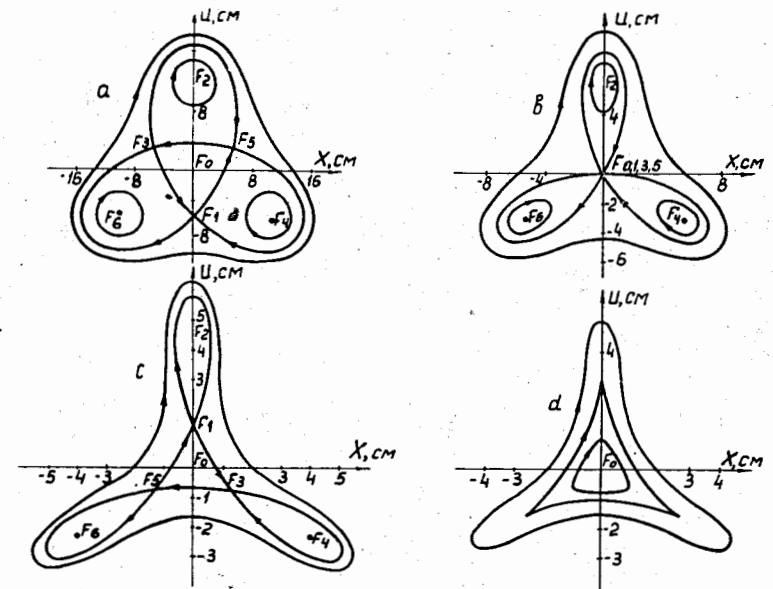


Рис. 8. Фазовые траектории при  $k_2 = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_4 = 0$ ,  $n_2 = 2 \cdot 10^{-4}$  и значениях расстройки а)  $\Delta n = 9,7 \cdot 10^{-3}$ , б)  $\Delta n = 0$ , в)  $\Delta n = -9 \cdot 10^{-4}$ , д)  $\Delta n = -1,2 \cdot 10^{-3}$ .

Вид фазовых траекторий при  $n > 0$  получаем, учитывая, что рассматриваемая система уравнений инвариантна относительно изменения знака переменных  $u$ ,  $n_2$  и  $\Delta n$ .

$F_1$ ,  $F_3$  и  $F_5$  являются неустойчивыми точками типа "седло", и сепаратрисса, проходящая через эти точки, определяет область на фазовой плоскости, внутри которой траектории замыкаются вокруг центра  $F_0$ . Вне этой области фазовые траектории замыкаются вокруг особых точек типа "центр"  $F_2$ ,  $F_4$  и  $F_6$ . Чтобы иметь удовлетворительную картину заброса в зазор FM, нужно потребовать, чтобы  $\frac{|u_2| \sqrt{3}}{2} > x_s$ , или с учетом /27/

$$|n_2| < \frac{|k_2|}{2|x_s \sqrt{3}}$$

Из формул /27/ и /28/ видно также, что размер центральной области устойчивости несимметричен относительно  $\Delta n = 0$ . Так, при  $n$  отрицательном  $S(+\Delta n) < S(-\Delta n)$ , где  $S$  - площадь центральной области устойчивости.

### ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЫ

Полученные результаты позволяют сделать приближенные численные оценки основных параметров резонансной системы и получить некоторые характеристики пучка на входе в FM.

Рассмотрим вначале возмущение вида  $b_2 x^2 \sin 2\theta$ . Вторую азимутальную гармонику квадратичной зависимости  $\Delta B_z(x)$  можно создать с помощью системы полюсных проводников, расположенных на координатах  $x = \pm 20$  см и  $x = \pm 40$  см /обмотка P2/. Обратные витки обмотки замкнуты так, что дипольная компонента на центральном радиусе ускорителя  $R_0$  отсутствует<sup>8</sup>. Из разложения  $\Delta B_z(x)$  в степенной ряд при различных значениях токов в обмотке следует, что зависимость возмущения от  $x$  наиболее точно аппроксимируется кривой  $\Delta B_z(x) = b_2 x^2$  /для  $-55$  см  $< x < 55$  см/, если отно-

шение токов  $\frac{i(x = \pm 20 \text{ см})}{i(x = \pm 40 \text{ см})}$  в проводниках обмотки P2

равно 0,42, причем выполняется соотношение

$$b_2 = 3,587 I_2 \cdot 10^{-5}, \quad /29/$$

где  $I_2 = i / x = \pm 20$  см / +  $i / x = 40$  см / в амперах, а  $b_2$  выражается в гс / см<sup>2</sup> .

Чтобы иметь минимальный угол отклонения пучка в FM, положение септума должно быть выбрано возможно дальше от центрального радиуса  $R_0$ , но при этом рабочая апертура магнита должна находиться внутри области, где зависимость возмущения от  $x$  еще можно аппроксимировать параболой. В нашем случае рабочая апертура магнита составляет  $\sim 17$  см<sup>9</sup>, и это определяет положение септума  $x_s = 35$  см. Полагая  $\Delta x_s = 17$  см, из /19/ получаем  $k_2 = 3,93 \cdot 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>. При индукции  $B_0 = 10$  кэс это соответствует  $b_2 = 7,89 \cdot 10^{-3}$  гс / см<sup>2</sup>, что дает следующие значения токов:  $i / x = \pm 20$  см / = 65 а,  $i / x = \pm 40$  см / = 155 а. Распределение  $\Delta B_z(x)$  при этих значениях токов приведено на рис. 9. Следует

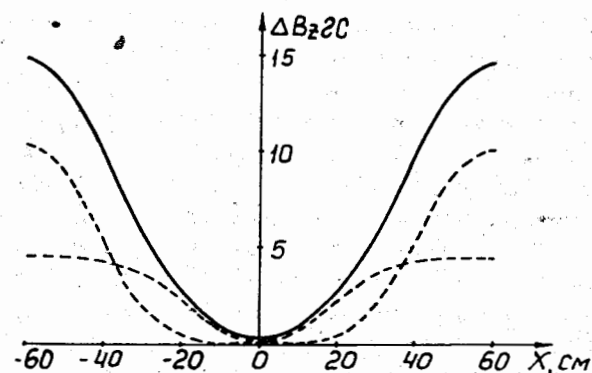


Рис. 9. Распределение возмущения  $\Delta B_z(x)$ , создаваемого токами системы P2. Пунктирными кривыми показан вклад в это распределение тока в каждом проводнике. Значения токов составляют:  $i / x = \pm 20$  см / = 65 а,  $i / x = \pm 40$  см / = 155 а.

отметить, что реальное поле ускорителя спадает по радиусу быстрее, чем при  $n = \text{const}$ , поэтому полученные оценки токов в системе P2 являются завышенными. Более точные значения получаются из численных расчетов <sup>10/</sup> с использованием измеренной карты магнитного поля.

Допуск на величину коэффициента  $k_4$  находим из /26/, подставляя найденное значение  $k_2 = 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ . Получаем  $|k_4| \ll 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-3}$ , что соответствует при индукции  $B_0 = 10 \text{ кгс}$   $|b_4| \ll 3 \cdot 10^{-4} \text{ гс/см}^4$ . При отноше-

нии токов  $\frac{i(x = \pm 20 \text{ см})}{i(x = \pm 40 \text{ см})} = 0,42$  из разложения в ряд кривой

$\Delta B_z(x)$  находим  $b_4 = -1 \cdot 10^{-6} \text{ гс/см}^4$ .

Значение показателя поля в точном резонансе определяется из условия  $\sqrt{(1-n_r)} = 2/3$  и составляет  $n_r = 0,624$ . Рабочее значение показателя поля составляет 0,67. Из /16/ находим расстройку  $\Delta n_b$  и показатель поля  $n_b$ , соответствующие началу вывода  $a_0 = 8 \text{ см}$ :  $\Delta n_b = 0,010$ ,  $n_b = 0,634$ . Угол на входе в септум-магнит уменьшается в процессе вывода от 1,3 мрад до 0, а эффективность при толщине септума  $\delta = 0,5 \text{ см}$  изменяется от 0,965 до 0,969.

Приведем для сравнения некоторые оценки для случая, когда при выводе используется возмущение вида  $b_4 x^4 \sin 2\theta$ . При положении септума  $x_s = 35 \text{ см}$  и максимальной амплитуде циркулирующего пучка  $a_0 = 8 \text{ см}$  изменение угла на входе в FM составляет  $\approx 0,08 \text{ мрад}$  и практически отпадает необходимость его коррекции. Величина  $k_4$  определяется из формулы /23/ и составляет  $2,04 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}$ . Значение начальной расстройки можно оценить из /24/. Получаем  $\Delta n_b < 0,001$ . Таким образом, если для вывода применяется возмущение  $b_4 x^4 \sin 2\theta$ , то требование к точности поддержания закона изменения  $n_0$  во времени возрастает на порядок, особенно при подходе к точному резонансу /область малых амплитуд/, как это следует из /21/. Значение начальной расстройки можно увеличить, приближая FM к  $R_0$ , но это приведет к увеличению требуемого угла отклонения в FM, увеличению толщины септума и снижению эффективности вывода. К тому же изменение угла на входе в FM в тече-

ние вывода возрастает с приближением септума к  $R_0$ . Указанную трудность можно обойти, если в центре камеры увеличить величину возмущения, как предложено в <sup>11/</sup>, но создание требуемой формы возмущения потребует прокладки большого числа полюсных проводников. Из этих соображений решено было при выводе использовать секступольное возмущение.

Изменение показателя поля от рабочего значения к резонансному можно осуществить с помощью системы полюсных проводников, расположенных на  $x = \pm 10$  и  $x = \pm 30$  /обмотка P1/. Обратные витки этой обмотки замкнуты аналогично обмотке P2, чтобы не создавать дипольной компоненты поля на центральном радиусе  $R_0$ . На рис. 10 приведены зависимость изменения показателя

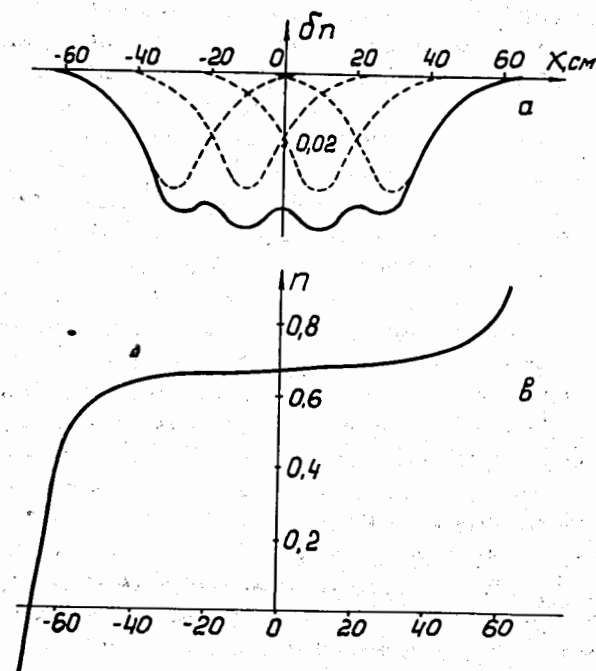


Рис. 10. Зависимость изменения показателя поля от  $x$ , создаваемая токами 40 а в проводниках обмотки P1 при индукции  $B_0 = 10 \text{ кгс}$  (а) и распределение показателя поля при  $B_0 = 10 \text{ кгс}$  в отсутствие возмущения (б).

теля поля от  $x$ , создаваемая токами  $40 \text{ а}$  в проводниках обмотки P1 /рис. 10а/, и распределение показателя поля при индукции  $10 \text{ кгс}$  в отсутствие возмущения /рис. 10в/. Чтобы изменить  $n$  в центре камеры на величину  $\delta n$ , значения токов в проводниках обмотки P1 должны составлять

$$I_1 = 0,1075 B_0 \delta n, \quad /30/$$

где  $B_0$  - индукция /гс/,  $I_1$  - ток /а/. При индукции  $10 \text{ кгс}$  начало вывода соответствует значению тока  $I_1 = 39 \text{ а}$ . Точный резонанс достигается при  $I_1 = 49,5 \text{ а}$ .

Из рис. 10а видно, что при изменении показателя поля токами обмотки P1 полученное распределение  $n$  в окрестности  $R_0$  можно представить в виде  $n(x) = n_0 + n_2 x^2 + \dots$ . Для значений  $|x| \approx 6 \text{ см}$  в начале вывода / $I_1 = 39 \text{ а}$ / из анализа кривой распределения  $n(x)$  получаем:  $n_2 = -0,000125 \text{ см}^{-2}$ . Используя /27/ и /28/, находим координату особой точки  $F_1$ , которая является центром одного из "островов" стабильности /см. рис. 8/  $x_1 = 13,2$ . Из рис. 10 видно, что при  $x \approx 10 \text{ см}$  среднее значение  $n_2$  уменьшается и даже изменяет знак на противоположный, следовательно, стабилизация не наступает. В конце вывода / $I_1 = 49,5 \text{ а}$ / значение  $n_2$ , найденное для интервала  $-6 \text{ см} \cdot x \cdot 6 \text{ см}$ , составляет  $n_2 = -0,000156 \text{ см}^{-2}$  что дает  $x_1 = 5,8 \text{ см}$ . Таким образом, в конце вывода будет наблюдаться эффект стабилизации роста амплитуд и частицы с достаточно малыми начальными амплитудами выводиться не будут. Граничное значение начальной амплитуды, при котором наступает стабилизация, может быть получено численным интегрированием с учетом реальной зависимости  $n(x)$ .

Используя /4/, /16/, /29/, /30/ и соотношение  $\rho c = c B_0 R_0$ , получаем, что диапазон амплитуд радиальных бетатронных колебаний частиц, находящихся в области устойчивости, следующим образом зависит от токов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$a_s = \frac{2I_1 \sqrt{27}}{k_2 \sqrt{\pi}} (\delta n_r - \delta n) \approx \frac{2192 e B_0^2}{\rho c I_2} \left(1 - \frac{202 I_1}{B_0}\right), \quad /31/$$

где  $\delta n_r = 0,67 - n_r$ ,  $\delta n = 0,67 - n_0$ ,  $a_s$  - максимальная

устойчивая амплитуда. Число частиц, находящихся в условиях устойчивого движения, равно

$$N = \int_0^{a_s} N_0 f(a) da, \quad /32/$$

где  $N_0$  - число частиц в циркулирующем пучке,  $f(a)$  - функция распределения по амплитудам радиальных бетатронных колебаний /12/. Из /31/ и /32/ получаем выражение для тока выведенного пучка:

$$j = - \frac{dN}{dt} = -N_0 f(a_s) \left( \frac{da_s}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{da_s}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} + \frac{da_s}{dB_0} \frac{dB_0}{dt} \right) =$$

$$= \frac{2192 N_0 f(a_s)}{B_0 R_0 I_2} \left[ 202 B_0 \frac{dI_1}{dt} + \frac{B_0^2}{I_2} \left(1 - \frac{202 I_1}{B_0}\right) \frac{dI_2}{dt} - \right. \quad /33/$$

$$\left. - (2B_0 - 202 I_1) \frac{dB_0}{dt} \right].$$

Размерность коэффициентов 2192 и 202, входящих в /31/ и /33/, составляет  $\text{а} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{гс}^{-1}$  и  $\text{гс} \cdot \text{а}^{-1}$  соответственно.

Рассмотрим вначале  $I_2 = \text{const}$ ,  $B_0 = \text{const}$ . Из /33/ видно, что ток выведенного пучка можно поддерживать постоянным с помощью обратной связи, изменяя величину  $\frac{dI_1}{dt}$  пропорционально сигналу ошибки  $\Delta U = \gamma(j - j_0)$ , где  $j_0$  - требуемая величина тока выведенного пучка.

Оценим допуск на величину амплитуды пульсаций в системе P1. Такие пульсации приводят к неравномерности во времени тока выведенного пучка. Представим зависимость тока в P1 от времени в виде:

$$I_1 = I_1^{(0)} + \frac{\Delta I}{\tau} t + A_1 \sin 2\pi f t, \quad \text{где } I_1^{(0)} - \text{ток в P1 в момент}$$

начала вывода,  $\tau$  - длительность вывода,  $\Delta I = I_1^{(r)} - I_1^{(0)}$ ,  $I_1^{(r)}$  - ток в P1 при точном резонансе,  $A_1$  - амплитуда пульсаций в P1,  $f$  - частота пульсаций /гц/,  $t$  - отсчитывается от момента начала вывода. Тогда для определения коэффициента модуляции получаем выражение

$$m = \frac{2\pi f A_1 \tau}{\Delta I}$$

Рассмотрим частоту пульсаций 600 гц и  $\tau = 0,5$  сек. При индукции  $B_0 = 10$  кгс  $\Delta I$  составляет 10,5 а. Требуя, чтобы коэффициент модуляции интенсивности не превышал 30%, находим  $A_1 < 1,7$  ма.

Теперь оценим допуск на амплитуду пульсаций в системе P2. Зависимость от времени тока в системе P2 представим в виде  $I_2 = I_2^{(0)} + A_2 \sin 2\pi f t$ , а в системе P1:

$I_1 = I_1^{(0)} + \frac{\Delta I}{\tau} t$ . Подставляя эти выражения в /33/, находим, что коэффициент модуляции равен:

$$m = \frac{2\pi f A_2 \frac{B_0}{I_2} \left(1 - \frac{202 I_1}{B_0}\right)}{202 \frac{\Delta I}{\tau}}$$

При индукции  $B_0 = 10$  кгс,  $f = 600$  гц,  $\Delta I = 10,5$  а,  $\tau = 0,5$  сек,  $I_2 = 220$  а и  $I_1 = 39$  а /начало вывода/ коэффициент модуляции не превосходит 30%, если  $A < 35$  ма.

При  $I_1 = 49,5$  а /конец вывода/ величина  $\left(1 - \frac{202 I_1}{B_0}\right)$  близка к нулю и влияние пульсаций в P2 незначительно.

Аналогично можно оценить допуск на пульсации основного магнитного поля. Индукцию представим в виде  $B_0 = B_0^{(0)} + A_B \sin 2\pi f t$ , а ток в P1:  $I_1 = I_1^{(0)} + \frac{\Delta I}{\tau} t$ . Используя /33/, находим

$$m = \frac{(2B_0 - 202 I_1) 2\pi f A_B \tau}{202 B_0 \Delta I}$$

При  $B_0 = 10$  кгс,  $\tau = 0,5$  сек и  $f = 600$  гц коэффициент модуляции интенсивности не превосходит 30%, если  $A_B < 0,3$  гс в момент начала вывода / $I_1 = 39$  а/ и  $A_B < 0,4$  гс в конце вывода / $I_1 = 49,5$  а/.

## ВЛИЯНИЕ ИМПУЛЬСНОГО РАЗБРОСА

Уравнение движения в окрестности резонанса  $\nu_x = 2/3$  для частицы с импульсом  $p_0 + \Delta p$  имеет вид

$$x'' + [1 - n_0 - n_2 (x + \Delta x)^2] \dot{x} = -\frac{4}{\pi} \frac{R_c}{B_c} \frac{1 - n_0 + \frac{\Delta p}{p_0}}{1 - n_0 - n_0 \frac{\Delta p}{p_0}} b_2 (x + \Delta x)^2 \sin 2\theta. \quad /34/$$

Уравнение /34/ записано в предположении, что частице с импульсом  $p_0$  соответствует сглаженный радиус  $R_c$ ,  $x$  - отклонение от сглаженного радиуса  $R_{cp} = R_c + \Delta x =$

$$= R_c + \frac{R_c \Delta p}{(1 - n_0) p_0}, \quad \text{соответствующего частице с им-}$$

пульсом  $p_0 + \Delta p$ . Сохраняя лишь члены, ответственные за резонанс, получим:

$$x'' + [1 - n_0 - n_2 \Delta x^2] \dot{x} = -(k_{op} + k_{2p} x^2) \sin 2\theta + n_2 \dot{x}^3. \quad /35/$$

Присутствие в /35/ дипольной компоненты  $k_{op} = k_2 \frac{1 - n_0 + \Delta p/p_0}{1 - n_0 - n_0 \Delta p/p_0} \left(\frac{R_c \Delta p}{(1 - n_0) p_0}\right)^2$  приводит к искажению равновесной орбиты, описываемому /4/, где вместо  $k_0$  следует подставить  $k_{op}$ , и к сдвигу эффективного значения  $n_0$  на величину

$$\delta n = -\frac{k_{op} k_{2p}}{[4 - (1 - n_0) I] I}, \quad \text{где } k_{2p} = k_2 \frac{1 - n_0 + \Delta p/p_0}{1 - n_0 - n_0 \Delta p/p_0}.$$

Таким образом, расстройка в показателе поля для частиц с импульсом  $p_0 + \Delta p$  равна:

$$\Delta_p n = \Delta n - \frac{k_{2p} k_{op}}{[4 - (1 - n_0) I] I} + n_2 \left[\frac{R_c \Delta p}{(1 - n_0) p_0}\right]^2, \quad /36/$$

где  $\Delta n$  - расстройка для частиц с импульсом  $p_0$ .

Координаты особых точек на фазовой плоскости в этом случае равны:

$$x_{op} = 0, u_{op} = \frac{2k_{op}}{4-(1-n_0)l}; \quad x_{1p} = 0, u_{1p} = -\frac{4\Delta_p n l}{k_{2p}} + \frac{2k_{op}}{4-(1-n_0)l};$$

$$x_{2p,3p} = \pm 2\sqrt{3} \frac{\Delta_p n l}{k_{2p}}, \quad u_{2p,3p} = \frac{2\Delta_p n l}{k_{2p}} + \frac{2k_{op}}{4-(1-n_0)l}.$$

Величина мгновенного углового разброса на входе в ФМ определяется разностью  $\Delta u = u_{2p} - u_2$ , где  $u_2$  - координата особой точки для частицы с импульсом  $p_0$ , определяемая по формуле /13/. При  $\Delta p/p_0 = \pm 2 \cdot 10^{-4}$  индукции 10 кГс и определенных ранее параметрах угловой разброс  $\Delta a$  составляет 0,09 мрад в начале вывода и 0,1 мрад в конце.

Из /19/ получаем максимальную глубину заброса в ФМ для частицы с импульсом  $p_0 + \Delta p$ :

$$\Delta x_s(p_0 + \Delta p) = \frac{\frac{9}{8} \pi k_{2p} \left[ x_s - \frac{R_c \Delta p}{(1-n_0) p_0} \right]^2}{\frac{9}{8} \pi k_{2p} x_s^2} \Delta x_s(p_0).$$

При  $\Delta p/p_0 = \pm 2 \cdot 10^{-4}$  и индукции 10 кГс глубина заброса изменяется на  $\pm 10\%$ .

#### УЧЕТ НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТОВ, СВЯЗАННЫХ С НЕСТАЦИОНАРНОСТЬЮ ПРОЦЕССА

Ранее полученные характеристики пучка на входе в ФМ в различные моменты вывода определялись как функция независимого параметра  $\Delta n$ , принимающего соответствующие данному моменту вывода значения. Такое приближение обосновано тем, что при медленном выводе изменение показателя поля происходит адиабатически. В данной работе учет эффектов, связанных с зависимо-

стью  $\Delta n$  от времени, был выполнен численными методами. Система уравнений /12/ решалась методом Рунге-Кутты. При этом принималось, что расстройка изменяется во времени по линейному закону:  $\Delta n = \Delta n_0 - \gamma \theta$ .

Для сокращения времени счета в качестве начальных условий брались точки на фазовой плоскости, лежащие вблизи границы области устойчивости. Значения скорости изменения показателя поля  $\gamma$  принимались равными  $0,185 \cdot 10^{-8}$  и  $0,926 \cdot 10^{-8}$ , что соответствует длительностям вывода 0,5 сек и 0,1 сек. В качестве начальных расстроек  $\Delta n_0$  при интегрировании брались значения  $\Delta n_0 = 0,01$  /начало вывода/ и  $\Delta n_0 = 0,0005$ . Расчеты показали, что в отличие от стационарного приближения фазовые траектории наклонены к оси  $u=0$  ( $\frac{da}{dx} < 0$ ), причем этот наклон увеличивается при  $\Delta n_0 \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \infty$ . Частицы, попадающие в зазор ФМ, имеют угловой разброс  $\Delta a$ , увеличивающийся к концу вывода, и величина этого углового разброса возрастает с увеличением  $\gamma$ . Полученные данные сведены в таблицу.

$\gamma$	$\Delta n_0$	$\frac{da}{dx}(x_s)$ , мрад/см	$\Delta a(x_s)$ , мрад
$0,185 \cdot 10^{-8}$	0,01	$-0,15 \cdot 10^{-4}$	$0,16 \cdot 10^{-5}$
$0,185 \cdot 10^{-8}$	0,0005	$-0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,14 \cdot 10^{-4}$
$0,926 \cdot 10^{-8}$	0,01	$-0,21 \cdot 10^{-4}$	$0,78 \cdot 10^{-5}$
$0,926 \cdot 10^{-8}$	0,0005	$-0,18 \cdot 10^{-3}$	$0,82 \cdot 10^{-4}$

Из сравнения величин  $\Delta a$  из таблицы со значениями  $\Delta a$ , полученными при оценке влияния импульсного разброса, можно сделать вывод, что для длительностей вывода  $\tau \sim 100 \div 500$  мсек величина мгновенного углового разброса частиц на входе в ФМ определяется, в основном, разбросом частиц циркулирующего пучка по импульсам.



Из системы /10/ видно, что скорость нарастания амплитуд стремится к нулю при  $a_0 \rightarrow 0$ . Так как при линейном изменении показателя поля время нахождения частицы в области неустойчивости пропорционально амплитуде, то частицы с достаточно малыми амплитудами выведены не будут.

Предположим, что при величине расстройки  $\Delta n_0$  частица с амплитудой  $a_0$  находится на границе области устойчивости, и вне этой области движение частицы описывается системой /18/, в которой из-за малости расстройки опущен член  $x_2$ . Интегрируя, получаем:

$$x = \frac{16 x_0}{16 - 3k_2 x_0^2} \quad /37/$$

В качестве начального условия возьмем координату особой точки  $x_2$  при расстройке  $\Delta n_0$ :

$$x_0 = x_2 = \frac{2\sqrt{3} \Delta n_0 I}{k_2}$$

Предположим, что расстройка уменьшается по линейному закону  $\Delta n = \Delta n_0 - \gamma \theta$ .  $\Delta n = 0$  при  $\theta = \frac{\Delta n_0}{\gamma}$  и координата  $x$  рассматриваемой частицы равна:

$$x = \frac{16 \sqrt{3} I \Delta n_0 \gamma}{k_2 (8\gamma - 3\sqrt{3} I \Delta n_0^2)} \quad /38/$$

Принимая в этот момент  $\theta = 0$  и подставив в /37/ в качестве  $x_0$  значение  $x$  из /38/, получим

$$x = \frac{16 \sqrt{3} I \Delta n_0 \gamma}{k_2 (8\gamma - 3\sqrt{3} I \Delta n_0^2 - 3\sqrt{3} I \Delta n_0 \gamma \theta)} \quad /39/$$

В дальнейшем расстройка меняет знак, увеличивается по абсолютной величине, и область устойчивости возрастает. Предполагая, что движение рассматриваемой

частицы происходит на фазовой плоскости по прямой  $u = \frac{2\Delta n_0 I}{k_2}$ , получим, что частица будет "перезахвачена" в область устойчивости, когда

$$\frac{4\gamma \theta I - 2I \Delta n_0}{k_2 \sqrt{3}} = \frac{16 \sqrt{3} I \Delta n_0 \gamma}{k_2 (8\gamma - 3\sqrt{3} I \Delta n_0^2 - 3\sqrt{3} I \Delta n_0 \gamma \theta)}$$

Полученное уравнение относительно  $\theta$  имеет действительные корни, если

$$\Delta n_0 \leq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma \sqrt{3} (4 - \sqrt{15})}{I}}$$

Этому значению  $\Delta n_0$  соответствует по формуле /16/ предельное значение амплитуды

$$a_{\text{пред.}} = \frac{12}{k_2} \sqrt{\frac{I \gamma (4 - \sqrt{15})}{\pi}} \quad /40/$$

Частицы с начальными амплитудами  $a_0 < a_{\text{пред.}}$  выведены не будут. В нашем случае при длительности вывода  $\tau = 0,5$  сек. /  $\gamma = 0,185 \cdot 10^{-8}$  / значение  $a_{\text{пред.}}$  найденное из /42/, составляет:  $a_{\text{пред.}} = 2,9$  мм.

Формула /40/ дает несколько заниженное значение  $a_{\text{пред.}}$ . Точные значения  $a_{\text{пред.}}$  были найдены численным интегрированием системы /12/ и составили 4,9 мм при  $\tau = 0,5$  сек и 10 мм при  $\tau = 0,1$  сек.

Потери частиц при выводе складываются из потерь на септуме и потерь за счет невыведенной части пучка. Используя распределение частиц по амплитудам радиальных бетатронных колебаний /12/, находим, что общая эффективность вывода составляет 0,957 при  $\tau = 0,5$  и 0,915 при  $\tau = 0,1$ .

### Литература

1. В.И.Котов, А.Б.Кузнецов, Н.Б.Рубин. Препринт ОИЯИ, Р-1331, Дубна, 1963.
2. A.Schoch. CERN-Report, 57-21, Geneve, 1958.
3. M.Conte. JINR Preprint, E9-4925, Dubna, 1970.
4. M.R.Harold. RHEL/R173, 1968.
5. M.Conte. Nucl. Instr. and Meth., 62. 269 (1968).
6. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, Москва, 1958.
7. M.Conte. JINR Preprint, E9-6538, Dubna, 1972.
8. Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова, В.А.Михайлов. ОИЯИ, Б1-9-6536, Дубна, 1972.
9. Л.П.Зиновьев, И.Б.Иссинский, В.С.Миронов, С.А.Новиков, В.И.Черников. Препринт ОИЯИ, 9-6537, Дубна, 1972.
10. Б.В.Василишин, Е.М.Кулакова. Препринт ОИЯИ, 9-6537, Дубна, 1972.
11. А.Б.Кузнецов, К.П.Мызников. АЭ, 12, 373 /1962/.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 октября 1973 года.