ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

9 - 4732

Ю.Л.Обухов

1. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

Дубна 1969

9 - 4732

Ю.Л.Обухов

I. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

Рассмотрим движение релятивистской частицы в электромагнитном поле, постоянном во времени и однородном в пространстве.

В прямоугольной лоренцевой системе координат уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = F_{ik} \frac{d x_k}{d\tau} . \tag{1.1}$$

В рассматриваемом здесь случае, очевидно, мы можем записать (1.1) в соответствующей матричной форме:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = F \frac{dX}{d\tau} , \tag{1.2}$$

где F – антисимметричная матрица с постоянными матричными элементами F_{ik}.

Будем искать решение уравнения (1.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$X|_{\tau=0} = X_0 , \quad \left(\frac{dX}{d\tau}\right)\Big|_{\tau=0} = \left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 . \tag{1.3}$$

Если временно положить $\frac{dX}{d\tau} = Y$, то (1.2) приводится к известному матричному уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dY}{d\tau} = FY, \tag{1.4}$$

решением которого является функция $e^{F\tau} Y_0$ x/. Отсюда легко получаем матрицу X в виде следующего интеграла:

$$X = \int e^{F\tau} Y_0 \, d\tau + X_0 \quad , \tag{1.5}$$

Перейдем теперь к более удобной записи уравнения (1.2). Для этого, воспользовавшись преобразованием вращения в четырехмерном пространстве, приведем антисимметричную матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & iF_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & iF_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & iF_{34} \\ -F_{14} & -iF_{24} & -iF_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

к более простому виду.

Обозначим ортогональные матрицы вращений вокруг соответствующих пространственных осей через $T_{(k)}$, тогда

$$F''' = T'^{-1}_{(3)} \, T^{-1}_{(2)} \, T^{-1}_{3} \, F \, T_{(3)} \, T_{(2)} \, T'_{(3)} \quad . \tag{1.7$^{xx/}$}$$

---

x/ По определению функции от матрицы $Ff(F) = f(F)F$ (см. /1/).

xx/ Очевидно, лишнее преобразование получается из-за того, что мы не вводим здесь углов Эйлера.

Напишем матрицы $T_{(k)}$ в явном виде:

$$T_{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_{13} = F_{23} \operatorname{tg}\phi; \tag{1.8}$$

$$T_{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = F_{12} \operatorname{tg}\psi_0; \tag{1.9}$$

$$T'_{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F''_{14} = F''_{24} \operatorname{tg}\theta; \tag{1.10}$$

(здесь матричные элементы без штрихов относятся к начальной матрице F). В результате получаем

$$F''' = \begin{pmatrix} 0 & F'''_{12} & 0 & 0 \\ -F'''_{12} & 0 & 0 & iF'''_{24} \\ 0 & 0 & 0 & iF'''_{34} \\ 0 & -iF'''_{24} & -iF'''_{34} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

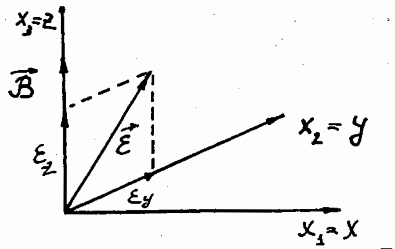
что соответствует специальному выбору системы координат. Нетрудно видеть, что матрицы $T_{(k)}$ позволяют, по существу, привести к виду (1.11) любую матрицу вида F. Предположим, например, что отсутствует компонента F_{13}, тогда достаточно, положив $T_{(3)} = E$ [x/], взять $F_{23} = F_{12}\,\mathrm{tg}\,\psi$, и преобразование (1.7) будет иметь вид

$$F''' = T'^{-1}_{(3)}\, T^{-1}_{(2)}\, EFET_{(2)} T'_{(3)} . \tag{1.7a}$$

Поскольку F есть матрица, соответствующая антисимметричному тензору поля, то запишем (1.11) через составляющие электромагнитного поля и рассмотрим выбранную систему координат:

$$F''' = \frac{e}{mc}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B}''' & 0 & 0 \\ -\mathcal{B}''' & 0 & 0 & i\,\mathcal{E}''' \\ 0 & 0 & 0 & i\,\mathcal{E}''' \\ 0 & -i\,\mathcal{E}''' & -i\,\mathcal{E}''' & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.11a}$$

Таким образом, в выбранной системе координат ось $x_3 = z$ направлена вдоль направления вектора напряженности магнитного поля, а вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости $(x_3\, x_2) = (z\, y)$, ось $x_1 = x$ перпендикулярна плоскости векторов $\vec{\mathcal{B}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$.



Исходя из вида F''', рассмотрим характеристическое уравнение

$$| F - \lambda E | = 0 \tag{1.12}$$

(штрихи везде далее опускаем).

x/ Здесь и далее E – единичная матрица.

Запишем решение (1.12):

$$\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega , \qquad \lambda_{3,4} = \pm \kappa , \tag{1.13}$$

где

$$\omega = \Big\{ \frac{1}{2}[F^2_{12} - (F^2_{24} + F^2_{34})] + \frac{1}{2}\sqrt{[F^2_{12} - (F^2_{24} + F^2_{34})]^2 + 4F^2_{12}F^2_{34}} \Big\}^{1/2} ,$$
$$\kappa = \Big\{ -\frac{1}{2}[F^2_{12} - (F^2_{24} + F^2_{34})] + \frac{1}{2}\sqrt{[F^2_{12} - (F^2_{24} + F^2_{34})]^2 + 4F^2_{12}F^2_{34}} \Big\}^{1/2} . \tag{1.14}$$

Напишем (1.14) с использованием векторных обозначений:

$$\omega = \frac{e}{mc}\Big\{ \frac{1}{2}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)^2 + 4(\vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{E}})^2} \Big\}^{1/2} ,$$
$$\kappa = \frac{e}{mc}\Big\{ -\frac{1}{2}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)^2 + 4(\vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{E}})^2} \Big\}^{1/2} . \tag{1.14a}$$

Приступим теперь к изучению полученных выражений.

1. Параллельные поля

Предположим сначала, что поля $\vec{\mathcal{B}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ параллельны и что $|\vec{\mathcal{B}}| \neq |\vec{\mathcal{E}}|$. Если $\vec{\mathcal{B}} \parallel \vec{\mathcal{E}}$, то $\mathcal{E}_y = F_{24} = 0$ и мы получаем:

$$\omega = \frac{e}{mc}\,\mathcal{B} , \quad \kappa = \frac{e}{mc}\,\mathcal{E} \tag{1.15}$$

(здесь величины ω, κ, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ берутся с одинаковыми знаками так, чтобы выполнялось соотношение (1.15)). Предполагаем, что величины $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ не равны друг другу и, следовательно, мы имеет четыре различных корня. Матрица (1.11) в разбираемом случае будет иметь вид:

$$F_{||} = \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ -\mathcal{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\mathcal{E} \\ 0 & 0 & -i\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix} . \qquad (1.16)$$

Нетрудно проверить, что решением уравнения (1.2), удовлетворяющим начальным условиям (1.3), в случае различных корней и постоянной матрицы F будет

$$X = F^{-1}(e^{F\tau} - E)\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0 \equiv f(F,\tau)\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0 . \qquad (1.17)$$

(здесь матрица F – невырожденная, E – единичная матрица). Введем матрицу полного преобразования от вида (1.6) к виду (1.16) и обратную ей:

$$\Theta = T_{(3)}\, T_{(2)}\, T'_{(3)} \;, \quad \Theta^{-1} = T^{-1}_{(3)}\, T^{-1}_{(2)}\, T^{-1}_{(3)} . \qquad (1.18)$$

Тогда решение (1.17) будет иметь следующий вид:

$$X = \Theta\, f(F_{||};\tau)\, \Theta^{-1} \left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0 . \qquad (1{,}19^{x/})$$

Применим, далее, к функции $f(F_{||}\tau)$ формулу Лагаранжа-Сильвестра для случая, когда все корни различны. Рассмотрим функцию $e^{F\tau}$:

[x/] По определению функции от матрицы

$$f(\Theta F_{||} \Theta^{-1}) = \Theta f(F_{||})\, \Theta^{-1} .$$

$$e^{F\tau} = \{ [(F - i\omega E)e^{-i\omega\tau} - (F + i\omega E)e^{i\omega\tau}]\, \frac{F^2 - \kappa^2 E}{2i\omega(\omega^2 + \kappa^2)} +$$

$$+ [(F + \kappa E)e^{\kappa\tau} - (F - \kappa E)e^{-\kappa\tau}]\, \frac{F^2 + \omega^2 E}{2\kappa(\omega^2 + \kappa^2)} . \qquad (1.20)$$

Заметим, что полученное выражение допускает дифференцирование и интегрирование, но необходимо помнить, что при этом нужна некоторая осторожность.

Используя (1.20), напишем теперь решение (1.17) в виде

$$X = \{ [F(\cos\omega\tau - 1) - \omega\sin\omega\tau]\, \frac{F^2 - \kappa^2}{\omega^2(\omega^2 + \kappa^2)} +$$

$$+ [F(\mathrm{ch}\,\kappa\tau - 1) + \kappa\,\mathrm{sh}\,\kappa\tau]\, \frac{F^2 + \omega^2}{(\kappa^2 + \omega^2)\kappa^2} \} \left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0 . \qquad (1.21)$$

Для того, чтобы далее привести решение к выражению в канонической форме (1.19), применим преобразование (1.18) к матрицам

$$\frac{F^2 - \kappa^2}{\omega^2(\omega^2 + \kappa^2)} \quad \text{и} \quad \frac{F^2 + \omega^2}{\kappa^2(\omega^2 + \kappa^2)} .$$

Получим:

$$\frac{F_{||}^2 - \kappa^2}{\omega^2(\omega^2 + \kappa^2)} = -\frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{F_{||}^2 + \omega^2}{\kappa^2(\omega^2 + \kappa^2)} = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \qquad (1.22)$$

где E_2 – единичные матрицы второго порядка (в дальнейшем индекс 2 мы будем опускать).

Введем теперь следующие переменные ортогональные матрицы второго порядка:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix},$$

$$S_h = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\kappa\tau & i\operatorname{sh}\kappa\tau \\ -i\operatorname{sh}\kappa\tau & \operatorname{ch}\kappa\tau \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Замечая, что

$$\frac{1}{\omega}\frac{dS}{d\tau}J^{-1} = S, \quad \frac{1}{i\kappa}\frac{dS}{d\tau}J^{-1} = S_h, \tag{1.25}$$

напишем искомые решения в виде:

$$\begin{cases} X = \Theta\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(S-E) & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\kappa}(S_h-E)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1}\end{pmatrix}\Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0, \\ \frac{dX}{d\tau} = \Theta\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S_h\end{pmatrix}\Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Нетрудно видеть, что полученные решения удовлетворяют начальным условиям (1.3). Преобразование Θ означает переход в систему координат, где матрица F равна матрице $F_{||}$. Полагаем:

$$X' = \Theta^{-1}(X - X_0), \tag{1.27}$$

$$U = \Theta^{-1}\frac{dX}{d\tau},$$

где X' и U – матрицы координат и 4-скорости в системе, где $F = F_{||}$. Решения (1.26) в выбранной системе координат будут иметь вид

$$\begin{cases} X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(S-E) & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\kappa}(S_h-E)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1}\end{pmatrix}U_0, \\ U = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S_h\end{pmatrix}U_0, \end{cases} \tag{1.28}$$

причем

$$U_0 = \Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0.$$

Рассмотрим далее физическую постановку задачи. Выберем в качестве U_0 произвольный 4-вектор начальной скорости, который мы можем задать в виде некоторого столбца.

Сопряженную матрицу или вектор мы, очевидно, должны записать в виде

$$U^* = U_0^*\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ 0 & S_h^* \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

где вектор U_0^* изображается соответствующей строкой. Решение U согласно (1.28) может быть написано в виде следующего столбца:

$$U = \begin{pmatrix} u_{01}\cos\omega\tau + u_{02}\sin\omega\tau \\ -u_{01}\sin\omega\tau + u_{02}\cos\omega\tau \\ u_{03}\operatorname{ch}\kappa\tau + i u_{04}\operatorname{sh}\kappa\tau \\ -iu_{03}\operatorname{sh}\kappa\tau + u_{04}\operatorname{ch}\kappa\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0\cos(\omega\tau-\phi_0) \\ -\xi_0\sin(\omega\tau-\phi_0) \\ \zeta_0\operatorname{ch}(\kappa\tau+\alpha_0) \\ -i\zeta_0\operatorname{sh}(\kappa\tau+\alpha_0) \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Используя (1.30), интересно построить следующие инвариантные произведения:

$$U^*U = U_0^*U_0 = \xi_0^2 + \zeta^2 = -c^2 ,$$

$$[X' + \begin{pmatrix} \frac{J^{-1}}{\omega} & 0 \\ 0 & \frac{J^{-1}}{i\kappa} \end{pmatrix} U_0]^* [X' + \begin{pmatrix} \frac{J^{-1}}{\omega} & 0 \\ 0 & \frac{J^{-1}}{i\kappa} \end{pmatrix} U_0] = \qquad (1.31)$$

$$= U_0^* \begin{pmatrix} \frac{E}{\omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{E}{\kappa^2} \end{pmatrix} U_0 = \frac{\xi_0^2}{\omega^2} + \frac{\zeta_0^2}{\kappa^2} .$$

Таким образом, радиусы "вращений", которые мы можем определить как

$$r_0 = \frac{\xi_0}{\omega} \quad \text{и} \quad \ell_0 = \frac{\zeta_0}{\kappa}, \qquad (1.32)$$

будут связаны соотношением

$$r_0^2 \omega^2 + \ell_0^2 \kappa^2 = -c^2 . \qquad (1.33)$$

Нетрудно написать, исходя из общего вида преобразования Θ, ковариантное решение в виде

$$x_1 = r_0 e_{11} \cos(\omega\tau - \phi_0) - r_0 e_{21} \sin(\omega\tau - \phi_0) +$$
$$+ \ell_0 e_{31} \operatorname{ch}(\kappa\tau + a_0) + \ell_0 e_{41} \operatorname{sh}(\kappa\tau + a_0) + x_{01} . \qquad (1.34^{x/})$$

Здесь e_{11} и т.д. – соответствующие направляющие косинусы, появляющиеся в результате преобразования координат. В разобранном выше случае

x/ Очевидно, всегда можно определить e_{41} так, чтобы было

$$x_1 = \ldots + e_{41} \ell_0 \operatorname{sh}(\kappa\tau + a_0) + x_{01} .$$

Решение (1.34) написано для произвольного движения, задаваемого уравнением (1.1), в случае, когда все корни λ_i различны.

преобразование Θ не затрагивает временной координаты (пространственное вращение). Первое соотношение (1.31) в этой записи будет иметь вид

$$\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 = u_1^2 = u_{01}^2 = -c^2 . \qquad (1.35)$$

Итак, если поля $\vec{\mathfrak{B}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$ направлены вдоль оси $x_3 = z$, то частица, ускоряясь вдоль общего направления полей, будет вращаться по окружности постоянного радиуса r_0. Напишем далее, чему равны r_0 и ℓ_0, если заданы начальные импульсы. Имеем:

$$r_0 = \frac{c}{e\mathfrak{B}} \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2} ,$$
$$\qquad (1.36)$$
$$\ell_0 = \frac{c}{e\mathcal{E}} \sqrt{p_{0z}^2 - \frac{W_0^2}{c^2}} ,$$

где $p_{0i} = m\gamma v_i$ (здесь v_i – обычная скорость), W_0 – начальная кинетическая энергия.

2. Параллельные, равные по абсолютной величине поля

Рассмотрим тот же случай, но при условии $|\mathfrak{B}| = |\mathcal{E}|$. Возвращаясь к (1.4а), напишем:

$$\omega = \frac{e}{mc}\sqrt{\mathfrak{B}\mathcal{E}} ,$$
$$|\omega| = |\kappa| . \qquad (1.37)$$
$$\kappa = \frac{e}{mc}\sqrt{\mathfrak{B}\mathcal{E}} ,$$

Все λ_i снова различны, и, следовательно, полученные выражения остаются в силе.

3. Движение в магнитном поле

Рассмотрим здесь случай, когда электрическое поле отсутствует, $\mathcal{E}=0$, тогда в формуле (1.14) $F_{24}=F_{34}=0$ и, следовательно,

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{e}{mc}\,\mathcal{B}\,, \\ \kappa = 0 \end{cases} \qquad (1.38)$$

В этом случае корни λ_3 и λ_4 равны, $\lambda_3=\lambda_4=0$. Воспользуемся снова формулой Лагранжа-Сильвестра, осуществив предварительно предельный переход к случаю равных корней $\lambda_3=\lambda_4$. Функция $e^{F\tau}$ будет иметь следующий вид:

$$e^{F\tau} = -(\cos\omega\tau + \frac{F}{\omega}\sin\omega\tau)\,\frac{F^2}{\omega^2} + \frac{F^2+\omega^2}{\omega^2}\,. \qquad (1.39)$$

Используя (1.5), напишем решение в виде

$$X = \{[F(\cos\omega\tau - 1) - \omega\sin\omega\tau]\frac{F^2}{\omega^4} + \frac{F^2+\omega^2}{\omega^2}\,\tau\}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0\,. \qquad (1.40)$$

В разбираемом случае $F_{||}$ будет равно:

$$F_{||} = \frac{e}{mc}\begin{pmatrix} \mathcal{B}J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.41)$$

где J – матрица, определенная в (1.24).

Приведем полученное решение снова к каноническому виду (1.20). Поскольку

$$\frac{F_{||}^2}{\omega^4} = -\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{F^2+\omega^2}{\omega^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E. \end{pmatrix}, \qquad (1.42)$$

то получаем:

$$\begin{cases} X = \Theta \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(S-E) & 0 \\ 0 & \tau J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{pmatrix} \Theta^{-1}\left(\dfrac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0\,, \\ \dfrac{dX}{d\tau} = \Theta \begin{pmatrix} \dot{S} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Theta^{-1}\left(\dfrac{dX}{d\tau}\right)_0. \end{cases} \qquad (1.43)$$

Заметим, что полученное решение (1.43) соответствует предельному переходу в решении (1.26) для случая $\kappa=0$. Таким образом, все сказанное относительно (1.26) можно повторить для (1.43). Выбрав U_0 в форме, соответствующей (1.30), напишем:

$$U = \begin{pmatrix} \xi_0\cos(\omega\tau-\phi_0) \\ -\xi_0\sin(\omega\tau-\phi_0) \\ \zeta_0\,\mathrm{ch}\,\alpha_0 \\ -i\,\zeta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 \end{pmatrix}, \qquad (1.44)$$

Тогда соотношение (1.33) будет иметь вид

$$\omega^2 r_0^2 + \frac{1}{m^2}\left(p_{0z}^2 - \frac{W_0^2}{c^2}\right) = -c^2\,. \qquad (1.45)$$

Наконец,

$$x_1 = r_0 e_{11} \cos(\omega\tau - \phi_0) - r_0 e_{21} \sin(\omega\tau - \phi_0) + \frac{p_{0z}}{m} e_{31}\tau + \frac{iW_0}{mc} e_{41}\tau + x_{01}, \tag{1.46}$$

где

$$r_0 = \frac{c}{e\mathcal{B}}\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}.$$

4. Движение в электрическом поле

Следующий случай соответствует $\mathcal{B}=0$, тогда в выражении (1.14) $F_{12}=0$ и мы получаем:

$$\begin{cases} \omega = 0, \\ \kappa = \dfrac{e}{mc}\mathcal{E}. \end{cases} \tag{1.47}$$

В этом случае равны корни $\lambda_1=\lambda_2=0$. Инвариант $\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2 = -\mathcal{E}^2 < 0$. Выполняя в (1.26) предельный переход, получим решение в виде

$$X = \Theta \begin{pmatrix} \tau J & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\kappa}(S_h - E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{pmatrix} \Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0, \tag{1.48}$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \Theta \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S_h \end{pmatrix} \Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0.$$

Сравнивая (1.48) с (1.43), видим, что выражения похожи друг на друга, что и следовало ожидать.

Напишем снова вектор U:

$$U = \begin{pmatrix} \xi_0 \cos\phi_0 \\ \xi_0 \sin\phi_0 \\ \zeta_0 \operatorname{ch}(\kappa\tau + a_0) \\ -i\zeta_0 \operatorname{sh}(\kappa\tau + a_0) \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

Соотношение (1.33) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}{m^2} + \kappa^2 \ell_0^2 = -c^2 \tag{1.50}$$

и решение X_i запишется следующим образом:

$$x_1 = \frac{p_{0x}}{m} e_{11}\tau + \frac{p_{0y}}{m} e_{21}\tau + \ell_0 e_{31} \operatorname{ch}(\kappa\tau + a_0) + \ell_0 e_{41} \operatorname{sh}(\kappa\tau + a_0) + x_{01} \tag{1.51}$$

(здесь, как и раньше, полагаем $x_1 = x$, $x_2 = y$),

где

$$\ell_0 = \frac{c}{e\mathcal{E}}\sqrt{p_{0z}^2 - \frac{W_0^2}{c^2}}.$$

5. Взаимно перпендикулярные поля, приведенные к случаю магнитного поля

Рассмотрим далее случай перпендикулярных, но не равных друг другу полей ($|\mathfrak{B}| \neq |\mathfrak{E}|$, $\vec{\mathfrak{B}} \perp \vec{\mathfrak{E}}$). Будем считать $|\mathfrak{B}| > |\mathfrak{E}|$, т.е. $\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2 > 0$. Возвращаясь к (1.14), мы видим, что в этом случае

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{e}{mc}\sqrt{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2}\,, \\ \kappa = 0 \end{cases} \tag{1.52}$$

и можно выбрать систему координат, в которой имеется лишь одно магнитное поле $\mathfrak{B}$. Полагая $\operatorname{th}\alpha = \dfrac{F_{24}}{F_{12}}$ (F_{12} здесь не равно нулю), матрицу

$$F_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & 0 & 0 \\ -F_{12} & 0 & 0 & iF_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iF_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

с помощью преобразования

$$T_{h_1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 & i\operatorname{sh}\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

приводим к виду

$$F = T_{h_1}\begin{pmatrix} \dfrac{F_{12}}{\operatorname{ch}\alpha}J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}_{h_1}\,, \tag{1.55}$$

т.е. задача сводится к задаче о движении частицы лишь в магнитном поле. Решение (1.43) будет иметь, следовательно, следующий вид:

$$\begin{cases} X = \Theta T_{h_1}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}(S-E) & 0 \\ 0 & \tau J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{pmatrix} T^{-1}_{h_1}\Theta^{-1}\left(\dfrac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0\,, \\ \dfrac{dX}{d\tau} = \Theta T_{h_1}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} T^{-1}_{h_1}\Theta^{-1}\left(\dfrac{dX}{d\tau}\right)_0. \end{cases} \tag{1.56}$$

Напишем решения в системе координат, соответствующей решению (1.44):

$$X' = T_{h_1}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}(S-E) & 0 \\ 0 & \tau J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{pmatrix} T^{-1}_{h_1}U_0\,, \tag{1.56'}$$

$$U = T_{h_1}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} T^{-1}_{h_1}U_0\,.$$

Или, если взять в качестве начального условия U'_0, соответствующее решению (1.44), то получим:

$$X' = \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{ch}\alpha}{\omega}[a(\alpha;\phi_0)\operatorname{ch}\alpha\sin\omega\tau - (\cos\omega\tau - 1)\xi_0\sin\phi_0] - \tau b(\alpha;\phi_0)\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha \\ \dfrac{\operatorname{ch}\alpha}{\omega}a(\alpha;\phi_0)(\cos\omega\tau - 1) + \dfrac{\sin\phi_0}{\omega}\xi_0\sin\omega\tau \\ \tau\zeta_0\operatorname{ch}\alpha_0 \\ -i\dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{\omega}[a(\alpha;\phi_0)\operatorname{ch}\alpha\sin\omega\tau - (\cos\omega\tau - 1)\xi_0\sin\phi_0] + i\tau b(\alpha;\phi_0)\operatorname{ch}^2\alpha \end{pmatrix}, \tag{1,57}$$

где $a(\alpha;\phi_0)$ и $b(\alpha;\phi_0)$ равны:

$$\begin{cases} a(\alpha;\phi_0) = \xi_0 \cos\phi_0 - \zeta_0 \,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 , \\ b(\alpha;\phi_0) = \xi_0 \cos\phi_0 \,\mathrm{th}\,\alpha - \zeta_0 \,\mathrm{sh}\,\alpha_0 . \end{cases} \tag{1.58}$$

Мы не будем здесь писать решения, соответствующие общему виду, поскольку они получаются в результате указанного преобразования Θ, чтобы не писать слишком громоздких выражений. В данной системе координат взаимно перпендикулярные поля направлены по осям $x_3 = z$ и $x_2 = y$. Обратим внимание на решение, соответствующее направлению $x_1 = x$, здесь, кроме членов, описывающих вращение, присутствует еще следующий член:

$$D = -\tau\, b(\alpha;\phi_0)\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha = -\tau\left(\omega r_0 \cos\phi_0 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} - \frac{W_0}{mc}\right)\frac{\mathcal{E}\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2}, \tag{1.59}$$

где
$$\omega r_0 \cos\phi_0 = \frac{p_{0x}}{m}.$$

D соответствует дрейфу частицы в направлении, перпендикулярном как полю $\vec{\mathcal{B}}$, так и полю $\mathcal{E}$.

6. Взаимно перпендикулярные поля, приведение к случаю электрического поля

Случай взаимно перпендикулярных и не равных друг другу полей при условии, когда $|\mathcal{E}| > |\mathcal{B}|$ ($|\mathcal{B}| \neq |\mathcal{E}|$; $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{E}}$), приводится, как известно, к случаю одного электрического поля $\mathcal{E}$. Действительно, инвариант $\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2 < 0$ будет отрицательной величиной и мы получаем:

$$\omega = 0, \qquad \kappa = \frac{e}{mc}\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2}. \tag{1.60}$$

Очевидно, мы можем снова использовать преобразование T_{h_1}, положив

$$\mathrm{th}\,\alpha' = \frac{F_{12}}{F_{124}},$$

и матрица $F_\perp$ приведется к виду

$$F_\perp = T'_{h_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{iF_{24}}{\mathrm{ch}\,\alpha'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{iF_{24}}{\mathrm{ch}\,\alpha'} & 0 & 0 \end{pmatrix} T'^{-1}_{h_1}. \tag{1.61}$$

Следовательно, задача действительно сводится к задаче о движении частицы в электрическом поле. Напишем сразу решение:

$$\begin{cases} X = \Theta T'_{h_1}\begin{pmatrix} \tau J & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\kappa}(S_h - E)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1}\end{pmatrix} T'^{-1}_{h_1}\Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0, \\ \frac{dX}{d\tau} = \Theta T'_{h_1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S_h \end{pmatrix} T'^{-1}_{h_1}\Theta^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 . \end{cases} \tag{1.62}$$

Выберем снова вектор U_0, соответствующий решению (1.44), и напишем решение в выбранной системе координат, где матрица $F_\perp$ имеет канонический вид (1.53).

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{sh}\,\alpha'}{\kappa}\left[b(\alpha;\phi_0)\,\mathrm{ch}\,\alpha'\,\mathrm{sh}\,\kappa\tau - \zeta_0\,\mathrm{ch}\,\alpha_0(\mathrm{ch}\,\kappa\tau - 1)\right] + \tau a(\alpha;\phi_0)\,\mathrm{ch}^2\kappa\tau \\ \tau\xi_0 \sin\phi_0 \\ -\frac{\mathrm{ch}\,\alpha'}{\kappa} b(\alpha;\phi_0)(\mathrm{ch}\,\kappa\tau - 1) + \frac{\mathrm{ch}\,\alpha_0}{\kappa}\zeta_0\,\mathrm{sh}\,\kappa\tau \\ i\frac{\mathrm{ch}\,\alpha'}{\kappa}\left[b(\alpha;\phi_0)\,\mathrm{ch}\,\alpha'\,\mathrm{sh}\,\kappa\tau - \zeta_0\,\mathrm{ch}\,\alpha_0(\mathrm{ch}\,\kappa\tau - 1)\right] - i\tau a(\alpha;\phi_0)\,\mathrm{sh}\,\alpha'\,\mathrm{ch}\,\alpha' \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

где $a(\alpha;\phi_0)$ и $b(\alpha;\phi_0)$ определены в (1.58).

Выделим снова дрейф в направлении, перпендикулярном обоим полям ($\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{B}}$), для этого необходимо снова рассмотреть решение, соответствующее направлению $x_1 = x$.

$$D = \tau a(\alpha; \phi_0)\, \mathrm{ch}^2\, \kappa\tau = \tau\left(\frac{p_{0x}}{m} - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}}\kappa \ell_0\, \mathrm{sh}\, \alpha_0\right)\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2}\,. \tag{1.64}$$

Очевидно, если $\vec{\mathcal{B}} \neq 0$, то вместо $\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2}$ можно написать выражение, соответствующее (1.59), а именно:

$$D = \tau\left(\frac{p_{0x}}{m}\,\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} - \kappa\,\ell_0\, \mathrm{sh}\, \alpha_0\right)\frac{\mathcal{E}\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2}\,,$$

где

$$\kappa\,\ell_0\, \mathrm{sh}\,\alpha_0 = \frac{W_0}{mc}\,.$$

7. Взаимно перпендикулярные, равные по абсолютной величине поля

Рассматриваем теперь случай взаимно перпендикулярных и равных друг другу по абсолютной величине полей ($|\mathcal{B}| = |\mathcal{E}|$; $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{E}}$). В этом случае оба инварианта равны нулю и все четыре корня совпадают друг с другом,

$$\omega = \kappa = 0. \tag{1.65}$$

Будем снова исходить из формулы Лагранжа-Сильвестра, взятой в форме (1.21), и совершим предельный переход $\omega \to 0$, $\kappa \to 0$. Для этого разложим тригонометрические и гиперболические функции в ряды и оставим неисчезающие члены. В результате получим:

$$e^{F\tau} = E + F\tau + \frac{F^2\tau^2}{2} + \frac{F^3\tau^3}{6}\,, \tag{1.66}$$

и решение (1.17) примет вид:

$$X = \left\{E\tau + \frac{F\tau^2}{2} + \frac{F^2\tau^3}{6}\right\}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 + X_0\,,$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \left\{E + F\tau + \frac{F^2\tau^2}{2}\right\}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0\,. \tag{1.67}$$

Рассмотрим далее систему координат, где матрица $F_\perp$ имеет вид (1.53).

$$F = \phi\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2 = \phi^2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.68}$$

Здесь ϕ – число, равное $\phi = F_{12} = F_{24}$. Выбирая начальные условия в виде вектора U_0 , получаем следующие решения:

$$X' = \begin{pmatrix} \tau\xi_0\cos\phi_0 + \frac{\phi\tau^2}{2}\,\xi_0\sin\phi_0 - \frac{\phi^2\tau^3}{6}(\xi_0\cos\phi_0 + \zeta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0) \\ \tau\xi_0\sin\phi_0 - \frac{\phi\tau^2}{2}(\xi_0\cos\phi_0 - \zeta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0) \\ \tau\zeta_0\,\mathrm{ch}\,\alpha_0 \\ -i\tau\zeta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 - i\frac{\phi\tau^2}{2}\,\xi_0\cos\phi_0 - i\frac{\phi^2\tau^3}{6}(\xi_0\cos\phi_0 - \zeta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0) \end{pmatrix}, \tag{1.69}$$

где начальные условия взяты в виде

$$\xi_0 \cos\phi_0 = \frac{p_{0x}}{m}, \quad \xi_0 \sin\phi_0 = \frac{p_{0y}}{m},$$

$$\zeta_0 \operatorname{ch} a_0 = \frac{p_{0z}}{m}, \quad -i\zeta \operatorname{sh} a_0 = -i\frac{W_0}{mc}$$

и

$$\phi = \frac{e|\mathfrak{B}|}{mc} = \frac{e|\mathcal{E}|}{mc}.$$

Отметим, что наибольшее возрастание скорости происходит в направлении, перпендикулярном обоим полям, т.е. в направлении $x_1 = x$. Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи движения частицы в постоянных однородных полях. Остается рассмотреть общий случай скрещенных полей, который, очевидно, сводится к уже рассмотренным.

8. Скрещенные поля

Рассмотрим общий случай скрещенных полей. Как было показано в выражении (1.7), произвольная матрица F может быть приведена к виду (1.11) с помощью лишь преобразований вращения. Следовательно, всегда можно выбрать систему координат, в которой будут присутствовать лишь три отличных от нуля компоненты векторов $\vec{\mathfrak{B}}$ и $\vec{\mathcal{E}}$, если в качестве одной из осей взять либо вектор $\vec{\mathfrak{B}}$, либо вектор $\vec{\mathcal{E}}$. В произвольном случае, вообще говоря, ω и κ не равны нулю; если одна из этих величин равна нулю, то мы приходим к уже рассмотренным случаям взаимно перпендикулярных полей. В общем случае выражение (1.14а) необходимо понимать в смысле (1.14), поскольку мы не можем приравнять ω и κ к выражениям (1.15), что легко проверить. Однако всегда выражение под корнем больше разности F_{12}^2 и $(F_{24}^2 + F_{34}^2)$:

$$|F_{12}^2 - (F_{24}^2 + F_{34}^2)| \leq |\sqrt{[F_{12}^2 - (F_{24}^2 + F_{34}^2)]^2 + 4F_{12}^2 F_{34}^2}, \tag{1.70}$$

и для не равных нулю произведений $(F_{12}^2 F_{34}^2)$ мы имеем случай четырех различных корней.

Покажем, что в этом случае мы всегда можем привести матрицу F к каноническому виду (1.16):

$$F_y = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\kappa \\ 0 & 0 & -i\kappa & 0 \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

(т.е. физически это означает выбор системы координат, где поля параллельны).

Рассмотрим преобразование

$$T_{h,1} T_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\beta & 0 & 0 & i\operatorname{sh}\beta \\ 0 & \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ 0 & -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ -i\operatorname{sh}\beta & 0 & 0 & \operatorname{ch}\beta \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

(очевидно, что здесь участвует преобразование во времени). С помощью преобразования (1.72) произвольную матрицу (1.11) в случае различных корней $\pm i\omega$ и $\pm\kappa$ всегда можно привести к виду (1.71). Полагая

$$\operatorname{th}\beta = \frac{F_{24}\,\omega}{F_{34}\,\kappa + F_{12}\,\omega}, \quad \operatorname{tg}\Omega = \frac{F_{24}\,\kappa}{F_{34}\,\kappa + F_{12}\,\omega}, \tag{1.73}$$

получаем нужный вид матрицы F. Таким образом,

$$F=\Theta\left(T_{h_1}\;T_1\right)F_j\;\left(T_{h_1}\;T_1\right)^{-1}\Theta^{-1} \qquad (1.74)$$

Запишем еще следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned} F_{12}\,F_{34} &= F'_{12}\,F'_{34} = \omega\kappa\,, \\ \omega^2-\kappa^2 &= F_{12}^2-\left(F_{24}^2+F_{34}^2\right). \end{aligned} \qquad (1.75)$$

Введем определение полного оператора преобразования в произвольном случае скрещенных полей:

$$Q=T_{(3)},T_{(2)},T_{(3)}\left(T_{h_1}\;T_1\right)=\Theta\left(T_{h_1}\;T_1\right) \qquad (1.76)$$

Решение в указанном случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= Q\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}(S-E) & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\kappa}(S_h-E) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0+X_0\,, \\ \frac{dX}{d\tau} &= Q\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S_h \end{pmatrix} Q^{-1}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_0 . \end{aligned} \qquad (1.77)$$

Заметим, что случай равных по абсолютной величине корней, или точнее, случай равного нулю инварианта

$$F_{12}^2-\left(F_{24}^2+F_{34}^2\right)=0 \qquad (1.78)$$

не выпадает из рассмотренной выше схемы, поскольку

$$\begin{cases} \omega=F_{12}\;F_{34}\,, \\ \kappa=F_{12}\;F_{34}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{1,2}=\pm i\,\omega\,, \\ \lambda_{3,4}=\pm\kappa\,. \end{cases} \qquad (1.79)$$

Мы не будем здесь рассматривать дрейфовое движение самого центра ларморовской окружности, которое, очевидно, будет присутствовать в общем случае движения частицы в скрещенных полях.

В заключение автор выражает благодарность товарищам, принимавшим участие в обсуждении данной работы: Э.А.Перельштейну, Е.Д.Федюнькину, И.Н.Иванову и А.Б.Швачке. Автор выражает благодарность Н.Б.Рубину, стимулировавшему данное рассмотрение, за ряд полезных замечаний.

Литература

1. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц., М., 1954.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, М., 1967.
3. Б.Ленерт. Динамика заряженных частиц., М., 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 октября 1969 года.