СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

9 - 4420

Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков

РАССЕЯНИЕ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН ПЛАЗМЕННЫМ СГУСТКОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

9 - 4420

Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков

РАССЕЯНИЕ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН ПЛАЗМЕННЫМ СГУСТКОМ

Решим задачу о рассеянии волноводных волн на ограниченном сгустке плазмы, находящемся внутри волновода или коаксиальной линии.

Из результатов работы /1/ следует, что поля внутри волновода при $k \neq v_i$ x/ можно задать в виде суммы волн, каждая из которых задается выражением:

$$[r_1 b \supset]^k_{i\pm} = (0,r)_i \, f_{i\pm}(z), \quad (0,a) = 0, \quad w_i = \pm\sqrt{k^2 - v_i^2}\,; \tag{1}$$

$$[r_1 b \phi]^k_{i\pm} = (0,r)_i \, g_{i\pm}(z), \quad (0,a') = 0, \quad w_i = \pm\sqrt{k^2 - v_i^2}\,.$$

(Знаком плюс помечены волны, идущие направо, знаком минус – идущие налево).

Поля в волне определяются так:

$$E_z = -v\,[r, b \supset]^k \, e^{i(wz + p\phi - kct)}, \tag{2}$$

$$H_z = -v\,[r, b\phi]^k \, e^{i(wz + p\phi - kct)}.$$

Остальные компоненты полей выражаются через E_z и H_z.

Амплитуды волн $f_{i\pm}(z), g_{i\pm}(z)$ задаются выражениями вида:

$$f_{i\pm}(z) = \pm \frac{2}{\pi w_{i\pm}} \, \frac{1}{a^2 (0, a')_i^2} \int_{z_{min}, z}^{z, z_{max}} dz_1 \, e^{-i w_i z_1} (0, b\supset(z_1)) + C \tag{3}$$

---

x/ Обозначения, принятые в этой статье, совпадают с обозначениями работы /1/.

Последнее слагаемое - произвольная постоянная - соответствует свободной волне, возбужденной другими токами. Производная по z от этой амплитуды имеет вид:

$$f'_{i+}(z) = \frac{2}{\pi w_{i+}} \frac{(0, b\supset(z))_{i+}}{a^2(0, a')_i^2} e^{-iw_{i+}z} . \tag{4}$$

Производные по z от других амплитуд находятся так же и задаются выражениями:

$$f'_{i-}(z) = -\frac{2}{\pi w_{i-}} \frac{(0, b\supset(z))_{i-}}{a^2(0, a')_i^2} e^{iw_{i-}z},$$

$$g'_{i\pm}(z) = \pm\frac{2}{\pi w_{i\pm}} \frac{(0, b\phi(z))_{i\pm}}{(a^2 - \frac{p^2}{v^2})(0, a)_i^2} e^{\mp i w_{i\pm} z} . \tag{5}$$

В этих формулах всюду подразумевается $\frac{2\pi^2 i}{c}\int b\,db$

Токи, возбужденные в сгустке плазмы, выражаются через электрические и магнитные поля следующим образом:

$$\vec{j} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{эп} + \vec{j}_{мп} ,$$

где

$$\vec{j}_{пр} = \sigma \vec{E} ,$$

$$\vec{j}_{эп} = -\frac{i\omega}{4\pi}(1-\epsilon)\vec{E} , \tag{6}$$

$$\vec{j}_{мп} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\vec{H} .$$

Здесь $j_{пр}$ - ток проводимости, $j_{эп}$ и $j_{мп}$ - токи электрической и магнитной поляризации. Эти токи введены для того, чтобы можно было пользоваться уравнениями Максвелла для вакуума, которые положены в основу применяемого здесь метода расчётов.

Дальше мы будем считать, что σ , ϵ и μ не зависят от поперечных координат r и ϕ и что μ не зависит от z . Зависимость всех полей от z дается множителями вида $e^{iwz} f(z)$. Поэтому дифференцирование по z при вычислении $\mathrm{rot}(1-\frac{1}{\mu})\vec{H}$ сведется к умножению на $(iw+\frac{f'}{f})$.

Найдем выражения $(0, b\ni(z))_{i\pm}$ и $(0, b\phi(z))_{i\pm}$ для токов, возбужденных волнами вида (1). Проделав ряд простых преобразований, получим:

При возбуждении n-й волной электрического типа с точностью до слагаемого, обращающего в нуль при интегрировании по $b\,db$

$$(0, b\ni(z))_{i\pm} = \frac{i}{k}[v^2+(\pm w_i)(\pm w_n)]\sigma''(0,b)_i (0,b)_n e^{\pm i w_n z} f_{n\pm}(z) +$$

$$+\frac{(\pm w_i)}{4\pi} ic(\frac{1}{\mu}-1)(0,b)_i (0,b)_n e^{\pm i w_n z} \frac{d}{dz} f_{n\pm}(z),$$

$$(0, b\phi(z))_{i\pm} = 0,$$

где

$$\sigma''(z) = \sigma(z) + \frac{ikc}{4\pi}(\frac{1}{\mu} - \epsilon(z)).$$

При возбуждении n-й волной магнитного типа:

$$(0, b\phi(z))_{i\pm} = ik\sigma''(0,b)_i (0,b)_n e^{\pm i w_n z} g_{n\pm}(z) +$$

$$+\frac{ic}{4\pi}(\pm w_n)(\frac{1}{\mu}-1)(0,b)_i (0,b)_n e^{\pm i w_n z} \frac{d}{dz} g_{n\pm}(z), \qquad (8)$$

$$(0, b\ni(z))_{i\pm} = 0.$$

Из этих формул видно, что волны электрического типа возбуждают в таком сгустке только токи электрического типа, волны магнитного –

токи магнитного типа. Так как $(0,b)_i$ и $(0,b)_n$ ортогональны при интегрировании по $b\,db$ при $i \neq n$, в однородном по r и ϕ сгустке волны любого типа могут возбуждать только токи, влияющие на волны того же типа с теми же v_i, короче говоря, в этом сгустке сохраняется разделение не только на волны электрического и магнитного типов, но и с заданными v_i. Волны с одинаковыми v_i, идущие в разные стороны, могут влиять друг на друга внутри сгустка.

Проинтегрировав по $b\,db$, получим, что при возбуждении всеми волнами

$$\int_0^a b\,dn\,(0, b\ni(z))_{i\pm} = \frac{a^2}{2}(0, a')^2 \{ ik\,\sigma''[f_{i\pm}(z)e^{\pm iw_i z} + (1-\frac{2w_i^2}{k^2})f_{i\mp}(z)e^{\mp iw_i z}]$$

$$\pm \frac{iw_i c}{4\pi}(\frac{1}{\mu}-1)[e^{\pm iw_i z}\frac{d}{dz}f_{i\pm}(z) + e^{\mp iw_i z}\frac{d}{dz}f_{i\mp}(z)]\},$$

$$\int_0^a b\,db(0, b\,\phi(z))_{i\pm} = (\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{2v_i^2})(0,a)^2\{ik\sigma''[g_{i\pm}(z)e^{\pm iw_i z} +$$

$$+ g_{i\mp}(z)e^{\mp iw_i z}] \pm \frac{iw_i c}{4\pi}(\frac{1}{\mu}-1)[e^{\pm iw_i z}\frac{d}{dz}g_{i\pm}(z) - \qquad (9)$$

$$- e^{\mp iw_i z}\frac{d}{dz}g_{i\mp}(z)]\}.$$

Подставив выражения (9) и (10) в формулы (4) и учтя множители $\frac{2\pi^2 i}{c}$, получим, что внутри плазменного сгустка, однородного по r и ϕ, амплитуды волны подчиняются уравнениям:

$$e^{\pm iwz} f_{i\pm}(z) = \mp\frac{2\pi k}{wc}\sigma''(z)[e^{\pm iwz} f_{i\pm}(z) +$$

$$+\left(1-\frac{2w^2}{k^2}\right)e^{\mp iwz} f_{\mp}(z)] + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)[e^{\pm iwz}\frac{d}{dz}f_{i\pm}(z)+$$

$$+e^{\mp iwz}\frac{d}{dz}f_{i\mp}(z)].$$

$$\tag{11}$$

$$e^{\pm iwz} g_{i\pm}(z) = \mp\frac{2\pi k}{wc}\sigma''(z)[e^{\pm iwz} g_{i\pm}(z)+e^{\mp iwz} g_{i\mp}(z)]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)[e^{\pm iwz}\frac{d}{dz}g_{i\pm}(z)-e^{\mp iwz}\frac{d}{dz}g_{i\mp}(z)]. \tag{12}$$

Рассеяние любой волны электрического или магнитного типа сводится к взаимодействию двух волн того же типа, идущих направо и налево с теми же v_i .

Поля внутри коаксиальной линии с $k \neq v_i$, можно задать в виде суммы волн, каждая из которых задается выражением:

$$[r,b\ni]^k_{i\pm} = (a_1,r) f_{i\pm}(z), \qquad (a_1, a_2) = 0.$$

$$\tag{13}$$

$$[r,b\phi]^k_{i\pm} = (a'_1,r) g_{i\pm}(z), \qquad (a'_1, a'_2) = 0.$$

Проделав такие же вычисления, как и для волновода, в результате получим, что и в коаксиальной линии при рассеянии в сгустке плазмы, однородном по r и ϕ, амплитуды волн подчиняются тем же уравнениям (11), (12), что и внутри круглого волновода. Кроме волн вида (13), в коаксиальной линии могут существовать ТЕМ - волны, для которых

$$E^0_{r\pm} = \frac{1}{r} h_{\pm}(z), \quad E^0_{\phi} = H^0_r = E^0_z = H^0_z = 0, \tag{14}$$

$$H^0_{\phi\pm} = \pm E_{r\pm}, \quad w = \pm k, \quad p = 0.$$

Проделав для этих волн вычисления, аналогичные вычислениям для волн с $v \neq 0$, получим, что их амплитуды в сгустке плазмы, однородном по r и ϕ, подчиняются уравнениям:

$$e^{\mp ikz}\frac{d}{dz}h_{\pm}(z) = -\frac{2\pi}{c}\sigma''(z)\left[e^{\pm ikz}h_{\pm}(z) + e^{\mp ikz}h_{\mp}(z)\right] + \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left[e^{\pm ikz}\frac{d}{dz}h_{\pm}(z) - e^{\mp ikz}\frac{d}{dz}h_{\mp}(z)\right].$$

Уравнения для ТЕМ получаются из уравнений для волн магнитного типа заменой w на k.

Разрешив уравнения для амплитуд относительно их производных по z, получим:

для волн электрического типа в круглом волноводе и в коаксиальной линии

$$e^{\mp iwz}\frac{d}{dz}f_{i\pm}(z) = \mp\frac{2\pi k}{wc}\sigma''(z)\left[\frac{(v^2+\mu w^2)}{k^2}e^{\pm iwz}f_{i\pm}(z) + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{(v^2-\mu w^2)}{k^2}e^{\mp iwz}f_{i\mp}(z)\right],$$

для волн магнитного типа в круглом волноводе и в коаксиальной линии

$$e^{\mp iwz}\frac{d}{dz}g_{i\pm}(z) = \mp\frac{2\pi k}{wc}\sigma''(z)\mu\left[e^{\pm iwz}g_{i\pm}(z) + e^{\mp iwz}g_{i\mp}(z)\right], \tag{17}$$

$$e^{\mp ikz}\frac{d}{dz}h_{i\pm}(z) = \mp\frac{2\pi}{c}\sigma''(z)\mu\left[e^{\pm ikz}h_{\pm}(z) + e^{\mp ikz}h_{\mp}(z)\right]. \tag{18}$$

Отметим интересную особенность: при $v^2 - \mu w^2 = 0$ уравнения (16) распадаются на два независимых уравнения для $f_+(z)$ и $f_-(z)$. Физически это означает, что при выполнении условия

$$v^2 - \mu w^2 = 0 \tag{19}$$

волны электрического типа, распространяющиеся влево и вправо, не взаимодействуют друг с другом в сгустке. Это приводит к тому, что волны электрического типа, удовлетворяющие условию (19), падающие на однородный по r и ϕ плазменный сгусток, находящийся в круглом волноводе или в коаксиальной линии, не отражаются от него.

Физически это вызвано следующим. В выражении $\frac{v^2 - \mu w^2}{k^2}$ первое слагаемое связано с взаимодействием волн, идущих направо и налево (с их отражением) посредством продольного тока j_z, второе описывает отражение посредством поперечных токов. Волны, отраженные посредством продольных и поперечных токов, имеют разные знаки, и при выполнении условия (19) взаимно гасят друг друга.

Можно дать и другое объяснение этому эффекту. Волноводные волны можно считать волнами, многократно отражающимися от стенок волновода под углом к оси z с $tg\,\alpha = \frac{v}{w}$. В свободном пространстве плоские волны, падающие на плоскую преломляющую поверхность под углом, перестают отражаться от этой поверхности, когда угол между преломленной и отраженной волнами становится равным $\frac{\pi}{2}$, если эти волны поляризованы в плоскости падения, то есть имеют составляющую электрического поля, перпендикулярную поверхности (угол Брюстера). В волноводе волнами с такой поляризацией являются волны электрического типа, а условие перпендикулярности отраженной и преломленной волны заменяется на условие (19). Физически разбираемый эффект сходен с явлением Брюстера.

Для волн магнитного типа и ТЕМ-волн, которые связаны только с поперечными токами, и в которых $E_z = 0$, коэффициент отражения не может обращаться в нуль при $\sigma''(z) \neq 0$.

Уравнения (16), (17) и (18) решаются особенно просто, когда сгусток имеет резкие границы при $z=0$ и $z=z_0$ и однороден по z x/. Тогда вне сгустка амплитуды волн $f_{i\pm}$, $g_{i\pm}$ и $h_{i\pm}$ не будут зависеть от z, а поведение их внутри него определяется уравнениями вида:

$$e^{iwz}\frac{d}{dz}\phi_+^1 = -R(me^{iwz}\phi_+^1 + ne^{-iwz}\phi_-^1),$$
$$e^{-iwz}\frac{d}{dz}\phi_-^1 = R(me^{-iwz}\phi_-^1 + ne^{iwz}\phi_+^1). \tag{20}$$

Здесь $\phi_\pm^1$ – общее обозначение для $f_{i\pm}$, $g_{i\pm}$ и $h_\pm$, R,m,n – постоянные. Для всех волн $R = \frac{2\pi k}{wc}\sigma''$, для волн электрического типа $m = \frac{v^2+\mu w^2}{k^2}$, $n = \frac{v^2-\mu w^2}{k^2}$, для волн магнитного типа и ТЕМ-волны $m=n=1$.

Решения уравнений (20) ищем в виде:

$$e^{iwz}\phi_+^1 = C_+ e^{iaz}, \quad e^{-iwz}\phi_-^1 = C_- e^{iaz}, \tag{21}$$

здесь C_+, C_- и a – постоянные. Подставив эти выражения в (20), получим следующие уравнения:

$$[i(a-w)+Rm]C_+ = -RnC_-,$$
$$[i(a+w)-Rm]C_- = RnC_+. \tag{22}$$

Величину a находим из условия совместимости этих уравнений:

$$a^2 = (w+iRm)^2 + (Rn)^2. \tag{23}$$

---

x/ Результаты, полученные для данного конкретного случая при малой глубине проникновения волны в плазму, согласуются с данными работ /2-4/.

Уравнение для a имеет два корня, что дает два частных решения. Дальше мы будем обозначать a_1 – решение с положительной действительной частью. Второе решение будет равно $a_2 = -a_1$.

Общее решение уравнений (20) можно записать в виде:

$$e^{\pm iwz}\phi^1_{\pm} = K_{\pm} e^{\pm i a_1 z} + SK_{\mp} e^{\mp i a_1 z} . \tag{24}$$

Здесь K_+ и K_- – постоянные.

$$S = \frac{Rn}{i(a_1 + w) - Rm} . \tag{25}$$

Величины K_+ и K_- находятся из граничных условий.

Обычно задаются амплитуды волн, падающих на сгусток, то есть $\phi^1_+(0)$ и $\phi^1_-(z_0)$.

В случае, когда $\phi^1_+(0) = 1$, $\phi^1_-(z_0) = 0$, величину $\phi^1_+(z_0)$ называют коэффициентом пропускания, величину $\phi^1_-(0)$ – коэффициентом отражения.

В нашем случае коэффициент пропускания равен

$$\Pi = e^{i(a_1 - w)z_0} \frac{1 - S^2}{1 - S^2 e^{2 i a_1 z_0}} . \tag{26}$$

Коэффициент отражения равен

$$0 = S \frac{1 - e^{2 i a_1 z_0}}{1 - S^2 e^{2 i a_1 z_0}} . \tag{27}$$

Перейдем теперь к конкретным типам волн. Начнем с волн электрического типа. Для таких волн

$$a^2 = \mu v^2 (\epsilon + i\sigma')^2 + (\mu w^2 - v^2)(\epsilon + i\sigma'). \qquad (28)$$

Здесь $\sigma' = \dfrac{4\pi}{k c}\sigma$.

В случае, когда $\mu w^2 = v^2$, получится

$$a_1 = \mu w(\epsilon + i\sigma'). \qquad (29)$$

В случае, когда $\sigma = 0$, величина a_1 становится действительной и играет роль волнового вектора

$$a^2 = \epsilon[(1-\epsilon)\mu w^2 + \mu\epsilon k^2 - v^2]. \qquad (30)$$

Кроме того, при $\sigma = 0$

$$R = \frac{i k^2}{2w}\left(\frac{1}{\mu} - \epsilon\right),$$
$$S = \frac{\left(\frac{1}{\mu} - \epsilon\right)(v^2 - \mu w^2)}{2w(a_1 + w) - \left(\frac{1}{\mu} - \epsilon\right)(v^2 + \mu w^2)}. \qquad (31)$$

Для волн магнитного типа получим

$$a^2 = \frac{1}{\mu}[(\mu - 1)w^2 + \mu\epsilon k^2 - v^2] + i k^2 \sigma'. \qquad (32)$$

При $\sigma = 0$ для волн магнитного типа коэффициенты примут вид:

$$a^2 = \frac{1}{\mu}[(\mu - 1) w^2 + \mu\epsilon k^2 - v^2],$$

$$R=\frac{ik^2}{2w}\left(\frac{1}{\mu}-\epsilon\right),\qquad S=\frac{k^2\left(\frac{1}{\mu}-\epsilon\right)}{2w\,(\alpha_1+w)-k^2\left(\frac{1}{\mu}-\epsilon\right)}. \tag{33}$$

Для ТЕМ-волн

$$\alpha^2=\frac{1}{\mu}(\mu-1+\mu\epsilon)\,k^2+ik^2\sigma'. \tag{34}$$

При $\sigma=0$

$$\alpha^2=\frac{1}{\mu}(\mu-1+\mu\epsilon)k^2,$$

$$R=\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\epsilon\right),\qquad S=\frac{k\left(\frac{1}{\mu}-\epsilon\right)}{2(\alpha_1+k)-k\left(\frac{1}{\mu}-\epsilon\right)}. \tag{35}$$

Выражения для квадратных корней из комплексных выражений (28), (32) и (34) громоздки, и мы в общем виде приводить их не будем. В случае, когда плазменный сгусток разрежен настолько, что $R\ll 1$, мы можем воспользоваться следующими приближенными формулами:

$$\alpha_1=w+iRm,\qquad S=-\frac{iRn}{2w},$$

$$\Pi=e^{-Rmz_0},\qquad 0=S. \tag{36}$$

Условие полного внутреннего отражения волн от сгустка плазмы реализуется при

$$\sigma=0,\quad w^2>0,\quad \alpha^2<0. \tag{37}$$

Для волн электрического типа это условие превращается в

$$\left.\begin{array}{l} v^2(\mu\epsilon - 1) + \mu w^2 < 0 \\ \epsilon > 0 \end{array}\right\} \quad \text{при высоких частотах} \tag{38а}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} v^2(\mu\epsilon - 1) + \mu w^2 > 0 \\ \epsilon < 0 \end{array}\right\} \quad \text{при низких частотах} \tag{38б}$$

Для волн магнитного типа условие полного внутреннего отражения имеет вид:

$$(1 - \mu\epsilon) v^2 > w^2 (2\mu - 1), \tag{39}$$

выполняющееся обычно при высоких частотах.

Волна ТЕМ отразится полностью от сгустка плазмы при условии

$$-\mu\epsilon > \mu - 1. \tag{40}$$

Полная сила, включая силу непосредственного взаимодействия падающей волны со сгустком плазмы и силу отдачи при испускании плазмой излучения, действующая на сгусток, движущийся со скоростью βc со стороны волны с потоком энергии P_z, равна

$$cF_z = P_z\gamma^2 \left(1 - \frac{\beta}{\beta_{гр}}\right) \left|1 - \frac{\beta}{\beta_{гр}}\right| \left(1 - |\Pi|^2 + |0|^2\right|. \tag{41}$$

Здесь w, k, P_z берутся в системе координат волновода, Π и 0 – в системе координат сгустка, $\beta_{гр}$ – групповая скорость волны.

Энергия, которую в единицу времени получает сгусток в собственной системе координат, определяется формулой:

$$\frac{dE}{dt} = P_z\gamma^2 \left(1 - \frac{\beta}{\beta_{гр}}\right)(1 - \beta\beta_{гр})(1 - |\Pi|^2 - |0|^2). \tag{42}$$

Авторы благодарят участников семинара ОНМУ ЛВЭ ОИЯИ за замечания.

Литература

1. *Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков. Винтовые электромагнитные поля. Препринты ОИЯИ 9-4317, 9-4318, Дубна 1969.*
2. *М.А.Левин, Р.З.Муратов. Отчёт РАИАН № 637, Москва 1963 г.*
3. *А.Н.Кондратенко, В.И.Мирошниченко. ЖТФ 35, 2154 (1965).*
4. *А.Н.Кондратенко. ЖТФ 38, 1835 (1968).*

Рукопись поступила в издательский отдел

15 апреля 1969 года.