СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

9 - 4318

Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

# ВИНТОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

## Часть II

1969

9 - 4318



Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков

# ВИНТОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

## Часть II

*Распространение и возбуждение волн внутри и снаружи бесконечного круглого волновода*

а) Распространение волн при $v \neq 0$.

При отсутствии внешних источников поля внутри и вне волновода возбуждаются только токами на стенках волновода, то есть

$$[r, b_э] = -i[r, a] F_э , [r, b_\phi] = [r, a'] F_\phi . \tag{2-1}$$

Граничные условия при $v \neq 0$ приобретают вид:

$$[a, a] F_э = J_p(va) H_p(va) F_э = 0, \tag{2-2}$$

$$[a', a'] F_\phi = J'_p(va) H'_p(va) F_\phi = 0. \tag{2-3}$$

Эти уравнения допускают следующие ненулевые решения:

$$J_p(va) = 0, \quad F \neq 0, \quad F_\phi = 0 \tag{2-4}$$

для волны электрического типа и

$$J'_p(va)=0, \quad F_\phi \neq 0, \quad F_Э = 0 \tag{2-5}$$

для волны магнитного типа. Функции $H_p(va)$ и $H'_p(va)$ обращаться в нуль не могут.

При $r > a$ будет выполняться условие

$$[r, a]F_Э = [r', a]F_Э = [r, a']F_\phi = [r', a']F_\phi = 0. \tag{2-6}$$

Физически это означает, что все волны электрического и магнитного типов, распространяющиеся при $v \neq 0$, сосредоточены внутри волновода. Вне волновода такие волны распространяться не могут.

Обозначим буквами $\mu_i^{(p)}$ корни уравнения $J_p(\mu) = 0$ и буквами $\nu_i^{(p)}$ – корни уравнения $J'_p(\nu) = 0$.

Волны электрического типа распространяются при условии

$$v = \frac{\mu_i^{(p)}}{a}, \quad w = \pm \beta_i^{(p)}, \quad \text{где} \quad \beta_i^{(p)} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_i^{(p)}}{a}\right)^2}. \tag{2-7}$$

Волны магнитного типа распространяются при условии

$$v = \frac{\nu_i^{(p)}}{a}, \quad w = \pm \alpha_i^{(p)}, \qquad \text{где} \quad \alpha_i^{(p)} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu_i^{(p)}}{a}\right)^2}. \tag{2-8}$$

Выражения для полей получаются подстановкой в формулы (1–43) и (1–44) выражений (2–1).

Условие распространения накладывается не на $k$ и $w$ по отдельности, а на их функцию $v$.

$$k^2 - w^2 = v^2. \tag{2-9}$$

Поэтому при одном и том же $v$ может существовать несколько разновидностей волн. Значения $v$ для волн электрического и магнитного типов внутри волновода получались действительными. Это приводит к следующему:

Волны с действительными $k$ и $v$, то есть обыкновенные бегущие волны, могут распространяться внутри волновода при $k^2 > v^2$. Направление распространения таких волн определяется по знаку потока энергии $S_z$. Волны, для которых $kw > 0$, распространяются в положительном направлении оси $z$ (направо); волны, для которых $kw < 0$, – в обратном направлении. Так как для определения направления волны важно знать знак $kw$, а не знаки $k$ и $w$ по отдельности, мы в дальнейшем будем считать, что либо $k > 0$, либо $\operatorname{Re} k > 0$. Фазовая скорость таких волн равна $c\frac{k}{w}$, групповая скорость $c\frac{w}{k} = c\left|\frac{\partial k}{\partial w}\right|$.

При $k^2 < v^2$ проекция волнового вектора на ось $z$, то есть $w$, будет чисто мнимой и поля таких волн будут убывать вдоль оси $z$ как $e^{-\left|z\sqrt{v^2-k^2}\right|}$.

При $k^2 = v^2$ мы получим волны $w = 0$. Поля таких волн не будут зависеть от $z$, и поток энергии $S_z$ для них будет равным нулю.

В идеальном волноводе могут также существовать волны с комплексными значениями $k$ и $w$, такими, что $v^2$ остается действительным.

Рассмотрим случай, когда $k$, $w$ мало отличаются от действительных значений $k_0$, $w_0$ волны, распространяющейся направо. В этом случае с точностью до малых второго порядка $k$ и $w$ имеют вид

$$k = k_0 + i w_0 \delta, \qquad w = w_0 + i k_0 \delta, \tag{2-10}$$

где $\delta$ – малая величина. Поля зависят от $z$ и $t$ как

$$e^{i(w_0 z - k_0 ct) + \delta(w_0 ct - k_0 z)}. \tag{2-11}$$

При $\delta > 0$ получаются поля, убывающие вдоль $z$ и возрастающие со временем, при $\delta < 0$ – возрастающие по $z$ и убывающие по $t$. Других сочетаний возрастания и убывания по $z$ и $t$ для идеального волновода не существует.

Но на самом деле идеальный волновод – предельный случай реального волновода, и в нем должны существовать волны, не меняющие амплитуды со временем и убывающие по $z$. Это означает, что мы должны допустить у $v$ существование бесконечно малой мнимой отрицательной части.

$$\operatorname{Jm} v < 0 . \tag{2-12}$$

При $w = 0$ и $k = v$ условие (2–12) приводит к убыванию полей во времени. Следует отметить, что условие (2–12) не противоречит условию, используемому в формуле (1–5). Как видно дальше, значения $v$ для волноводных волн совпадают с полюсами фурье-компонент полей. Формула (2–12) относится к положению полюсов при условии, что контур интегрирования в формуле (2–6) и во всех формулах перехода от фурье-компонент полей к координатным выражениям проходит при $\operatorname{Jm} v = 0$. Условие в формуле (1–5) показывает направление обхода полюсов подинтегральных выражений, если для полюсов $\operatorname{Jm} v = 0$. Взаимное положение полюсов и контура интегрирования в обоих случаях одно и то же. Дальше используется формула (2–12).

б) Распространение волн при $v = 0$

Граничные условия (2–2) и (2–3) справедливы только для $v \neq 0$. При $v = 0$ используем условия (1–60) и формулы (1–33). Уравнения для токов на стенках волновода:

$$\text{при} \quad p = 0 \qquad E_\phi = \frac{k}{\pi} F_\phi = 0, \qquad E_z = 0 \; ; \tag{2-13}$$

$$\text{при} \quad p = 1 \qquad E_\phi = -\frac{w}{\pi k a} F_z - \frac{k}{\pi} \ln va\, F_\phi = 0, \;\; E_z = -\frac{w}{\pi k a} F_\phi = 0 \; ; \tag{2-14}$$

при $p > 1$ $\quad E_\phi = -\frac{w}{\pi ka} F_z - \frac{p}{\pi} \frac{(1+k^2a^2-p^2)}{ka^2(p^2-1)} F_\phi = 0,$ (2-15)

$$E_z = -\frac{w}{\pi ka} F_\phi = 0 \ .$$

При $p = 0$ должен быть равен нулю $F_\phi$, а ток $F_z$ может быть произвольным. Поля этого тока имеют вид

$$E_r = -\frac{2iw}{\pi kr} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} F_z \ , H_\phi = \frac{k}{w} E_r \ , E_z = E_\phi = H_z = H_r = 0 . \qquad (2\text{-}16)$$

Верхняя строчка в скобках берется при $r < a$, нижняя – при $r > a$. Итак, существует волна, распространяющаяся при $v = 0$ и $p = 0$ снаружи волновода.

Определители систем уравнений (2-14) и (2-15) отличны от нуля (они оба равны $\frac{1}{\pi^2 a^2}$ ), и эти уравнения не допускают ненулевых решений. Волн с $p \neq 0$ и $v = 0$ не существует ни внутри, ни снаружи волновода.

Координатные выражения, соответствующие формулам (2-16), получаются из этих формул умножением на $e^{iw(z-ct)}$, где

$$w = \pm k \ . \qquad (2\text{-}17)$$

## в) Решение задачи о возбуждении волновода в фурье-представлениях

При наличии внешних источников суммарные поля источников и токов на стенках волновода находятся при $v \neq 0$ с помощью выражений

$$[r, b_Э]^s = -i[r, a]F_Э - i[r, b]j_Э - \frac{w}{k}[r, b']j_r \ , \qquad (2\text{-}18)$$

$$[r, b\,\phi]^{s} = [r, a'] F_{\phi} + [r, b'] j_{\phi} + \frac{ip}{vb}[r,b] j_{r} \,. \tag{2-19}$$

Граничные условия на стенках:

$$[a, b\,э]^{s} = 0, \tag{2-20}$$

$$[a', b\,\phi]^{s} = 0 \,. \tag{2-21}$$

После подстановки выражений (2-18,19) в формулы (2-20,21) получаются уравнения для нахождения $F_{э}$ и $F_{\phi}$. Подставив найденные из этих уравнений $F_{э}$ и $F_{\phi}$ в выражения (2-18) и (2-19), придем к таким равенствам:

$$[r, b\,э]^{s} = -i\left\{[r,b] - \frac{[r,a][a,b]}{[a,a]}\right\} j_{э} - \frac{w}{k}\left\{[r,b'] - \frac{[r,a][a,b]}{[a,a]}\right\} j_{r} \,, \tag{2-22}$$

$$[r, b\,\phi]^{s} = \left\{[r,b'] - \frac{[r,a'][a',b']}{[a',a']}\right\} j_{\phi} + \frac{ip}{vb}\left\{[r,b] - \frac{[r,a'][a',b]}{[a',a']}\right\} j_{r} \,. \tag{2-23}$$

Выражения (2-22,23) получены независимо друг от друга.

Раскрыв выражения (2-22) и (2-23), мы получим, что при $r > a > b$ и при $r < a < b$

$$[r, b\,э]^{s} = [r, b\,\phi]^{s} = 0 \,. \tag{2-24}$$

Физически это означает, что источники, расположенные с одной стороны стенки волновода, не могут возбудить полей с другой стороны.

Задача о возбуждении волновода делится на две задачи: внутреннюю и внешнюю. Введем обозначения:

$$(a,b) = H_p(va)\,J_p(vb) - J_p(va)\,H_p(vb), \tag{2-25}$$

$$(0,b) = J_p(vb), \quad (a,\infty) = H_p(va),$$

$$(a',b) = \frac{\partial}{\partial va}(a,b), \quad (a,b') = \frac{\partial}{\partial vb}(a,b), \tag{2-26}$$

$$(a',b') = \frac{\partial}{\partial va\;\partial vb}(a,b), \; (0,b') = \frac{\partial}{\partial vb}(0,b), (a',\infty) = \frac{\partial}{\partial va}(a,\infty).$$

Равенство нулю $(0,b)$ – это условие распространения волн электрического типа внутри волновода при $0<r<b$, равенство нулю $(a,b)$ – условие распространения волн такого же типа между стенками коаксиальной линии при $a<r<b$, равенство нулю величины $(a,\infty)$ – условие распространения волн электрического типа вдоль оси $z$ вне волновода при $a<r<\infty$. (Для нас сейчас неважно, что последнее условие никогда не выполняется).

Для волн магнитного типа такую же роль играют функции

$$(0,b'), \; (a',b'), \; (a',\infty).$$

Введение функций (областей) позволит упростить и сделать единообразной запись всех дальнейших формул.

Кроме того. полезны такие обозначения:

$$[a\,|\,r,b\,|\,c] \equiv \left\{ \begin{array}{ll} (a_1,r)(b,c) & \text{при } a<r<b<c \\ (a,b)(r,c) & \text{при } a<b<r<c \end{array} \right\}; \tag{2-27}$$

$$[a' \mid r\,,b \mid c\,] = \frac{\partial}{\partial va}[a \mid r,b \mid c] \quad \text{и т.д.} \tag{2-28}$$

В этих обозначениях поля источников, расположенных внутри волновода, задаются выражениями:

$$[\,r\,,b\phi]^{s} = \frac{[0 \mid r,b' \mid a']j_{\phi} + \frac{ip}{vb}[0 \mid r,b \mid a']j_{r}}{(0,a')}, \tag{2-29}$$

$$[r,b_{э}\,]^{s} = \frac{-i[\,0 \mid r,b \mid a\,]j_{э} - \frac{w}{k}[0 \mid r\,,b' \mid a]j_{r}}{(0,a)}. \tag{2-30}$$

Вместо выражения (2-30) мы можем использовать следующее:

$$[\,r,b_{э}\,]^{s} = \frac{i\,[\,0 \mid r,b \mid a\,]\,(Wc\rho - k\,j_{z}\,)}{v\,(0,a)}. \tag{2-31}$$

г) Возбуждение волн внутри волновода при $v \neq 0$

Внутри волновода фурье-компоненты полей выражаются через фурье-компоненты токов формулами вида

$$E\,(w) = \frac{P(w)}{Q(v)}\,j\,(w\,), \tag{2-32}$$

где $P(w)$ и $Q(v)$ - конечные аналитические функции от $w$ и $v$.

Перейдя к функции координат $E(z)$ от выражения $E(w)$ и выразив $j(w)$ через $j(z)$, мы получим:

$$E(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz_1\, j(z_1) \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iw(z-z_1)} \frac{P(w)}{Q(v)}, \tag{2-33}$$

где $z_{min}$ и $z_{max}$ – границы источника по оси $z$. Дальше мы формально начнем писать вместо $z_{min}$ и $z_{max}$ величины $-\infty$ и $+\infty$.

Окончательное выражение для $E(z)$ примет вид:

$$E(z) = -\sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} dz_1\, j(z_1) \frac{iP(w_{i+})}{Q'(v_i)} \frac{v_i}{w_i} e^{iw_{i+}(z-z_1)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{z}^{\infty} dz_1\, j(z_1) \frac{iP(w_{i-})}{Q'(v_i)} \frac{v_i}{w_{i-}} e^{iw_{i-}(z-z_1)}. \tag{2-34}$$

Здесь $v_i$ – нули знаменателя $Q(v)$,

$$w_{i+} = \sqrt{k^2 - v_i^2}, \quad Jm\, w_{i+} > 0, \quad w_{i+} = -w_{i-}. \tag{2-35}$$

Первое слагаемое в формуле (2-34) – это возбужденные волны, распространяющиеся (при действительных $w_{i+}$) или затухающие (при мнимых $w_{i+}$) вправо от источника, второе – волны, распространяющиеся или затухающие налево от него.

Отметим, что при $z > z_{max}$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{z} dz_1\, j(z_1) e^{-iw_{i+} z}$$

перестает зависеть от $z$ и поля такой волны зависят от $r$ и $z$ как

$$c P(w_{i+})\, e^{i w_{i+} z}. \tag{2.36}$$

Это означает, что выражения для полей свободных волн можно получить из выражений для полей возбужденных волн. Волны, распространяющиеся внутри волновода, найдены, и соотношением (2-36) воспользуемся при рассмотрении других систем.

Применив разобранную методику к выражениям для полей внутри волновода, мы получим, что поля в возбужденной волне, например, магнитного типа, распространяющейся или затухающей направо, имеют вид, задаваемый формулами (1-44), в которые надо подставить

$$[r,b\,\phi] = -\int_{-\infty}^{z} dz_1\, e^{-iwz_1} \frac{\left(\frac{iv}{w}[0\,|\,r,b'\,|\,a'\,|\,j_\phi(z_1)\right) - \frac{p}{wb}[0\,|\,r,b\,|\,a'\,]\,j_r(z_1))}{a(0,a)\left(\frac{p^2}{v^2a^2} - 1\right)}, \tag{2-37}$$

где

$$v = \frac{\nu_i^{(p)}}{a}, \quad w = \alpha_i^{(p)} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\nu_i^{(p)}}{a}\right)^2}.$$

Аналогично находятся выражения для магнитных волн, распространяющихся в обратном направлении, и для волн электрического типа.

## д) Резонансные явления внутри бесконечного волновода

В формуле (2-37) мы получили величину $w$ в знаменателе. Поэтому возбуждение волн с $w=0$ надо рассмотреть особо.

Как мы уже знаем, фурье-компоненты полей токов внутри волновода будут иметь вид (мы пишем подробнее):

$$E(w,\omega) = \frac{P(w,\omega)}{Q(v)} j(w,\omega). \tag{2-38}$$

В окрестности точки $v_o$, $Q(v_o) = 0$ мы можем положить

$$Q(v) = -Q'(v)(w - w_o)\frac{w}{v}.$$

Пусть ток зависит от $z$ и $t$ следующим образом:

$$j(z,t) = j(z)e^{-i\omega_0 t}. \tag{2-39}$$

Если же $\omega_o = kc$, то $w_o = 0$ и фурье-компонента поля примет вид

$$E(w,\omega) = -\frac{P(w,\omega)v}{Q'(v)\,w^2}\sqrt{2\pi}\, j(w)\,\delta(\omega - vc). \tag{2-40}$$

Перейдем к координатному временному представлению:

$$E(z,t) = \frac{c}{4\pi}\,\frac{P(0,vc)}{Q'(v_0)}\, it\, e^{-ivct}\, j(z). \tag{2-41}$$

Видно, что амплитуда поля возрастает линейно со временем. Физически это означает, что при $\omega = v_0 c$ наблюдается резонансное усиление колебаний источника, бесконечный волновод ведет себя подобно закрытому резонатору.

Кроме того, мы видим, что поле возрастает только при $z$, для которых отличен от нуля ток $j(z)$, то есть при $\omega = v_0 c$ поле не распространяется в направлении оси $z$.

Оба эти эффекта обусловлены тем, что при $w = 0$ поток энергии волны в направлении $z$ обращается в нуль и волновод становится запертым.

Если колебания источника начались в момент $t = t_0$, то в формуле (2–41) следует заменить $t$ на $t - t_0$.

Проделав разобранную процедуру над конкретными выражениями фурье-компонент полей внутри волновода, мы получим, что поля задаются формулами (1–43) и (1–44), в которые надо подставить:

$$[r, b_э] = \frac{ct}{4\pi a} \frac{[0|r, b|a]}{(0, a')} j_z(z), \qquad (2\text{–}42)$$

$$[r, b\phi] = \frac{ict}{4\pi a} \frac{[0|r, b'|a'] j_\phi(z) + \frac{ip}{v\, b}[0|r, b|a'] j_p(z)}{(0, a)\left(\frac{p^2}{v^2 a^2} - 1\right)} . \qquad (2\text{–}43)$$

## е) Возбуждение внутри волновода волн с $v = 0$

Прежде всего следует сказать, что раз такие волны не могут распространяться, значит, не будет и их возбуждения. Но для дальнейшего нам будет необходимо знать, как ведут себя слагаемые электрического и магнитного типов вблизи точки $v = 0$. Анализ показывает:

1. При $p = 0$ выражения для фурье-компонент полей электрического и магнитного типов конечны (при $v = 0$) даже по отдельности;

2. При $p \neq 0$ выражения для фурье-компонент полей электрического и магнитного типов имеют полюсы при $v \to 0$, взаимно уничтожающие друг друга в полных выражениях для полей

$$E_z = 0\ ,$$

$$E_\phi = -\frac{pk}{\pi v^2 br}\left[\{{}^{-}_{-}\} j_\phi + i\{{}^{+}_{-}\} j_r\right],$$

$$E_r = \frac{ikp}{\pi v^2 br}\left[\{{}^{-}_{+}\} j_\phi + i\{{}^{+}_{+}\} j_r\right],\tag{2-44}$$

$$H_z = 0\ ,$$

$$H_\phi = \frac{w}{k} E_r\ , \qquad H_r = -\frac{w}{k} E_\phi\ ,$$

Для полей магнитного типа

$$E_z = 0\ ,$$

$$E_\phi = \frac{kp}{\pi v^2 br}\left[\{{}^{-}_{-}\} j_\phi + i\{{}^{+}_{-}\} j_r\right],$$

$$E_r = \frac{ikp}{\pi v^2 br}\left[\{{}^{-}_{+}\} j_\phi + i\{{}^{+}_{+}\} j_r\right],\tag{2-45}$$

$$H_z = 0\ ,$$

$$H_\phi = \frac{w}{k} E_r\ , \qquad H_r = -\frac{w}{k} E_\phi\ .$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\{{}^{-}_{+}\} = \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{r}{a}\right)^p \left[\left(\frac{b}{a}\right)^p - \left(\frac{a}{b}\right)^p\right] \\ \\ \left(\frac{b}{a}\right)^p \left[\left(\frac{r}{a}\right)^p + \left(\frac{a}{r}\right)^p\right] \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ {+ \atop +} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{r}{a}\right)^p \left[\left(\frac{b}{a}\right)^p + \left(\frac{a}{b}\right)^p\right] \\ \\ \left(\frac{b}{a}\right)^p \left[\left(\frac{r}{a}\right)^p + \left(\frac{a}{r}\right)^p\right] \end{matrix} \right\}. \tag{2-46}$$

Из полученных формул следует, что можно получить внутри волновода волны со световой скоростью, если сумеем изменить соотношение между волнами электрического и магнитного типов при $p \neq 0$. При $p = 0$ мы не сможем получить волн со световой скоростью даже таким способом.

### ж) Возбуждение волн снаружи волновода вдали от его поверхности

Введем следующие обозначения:

$$(a,b\phi) = (a,b')j_{\phi} + \frac{ip}{v\,b}(a,b)j_r \,, \tag{2-47}$$

$$(a,b\text{э}) = -i(a,b)j_{\text{э}} - \frac{w}{k}(a,b')j_r \,, \tag{2-48}$$

или

$$(a,b\text{э}) = i(a,b)\frac{(wc\rho - kj_z)}{v}. \tag{2-49}$$

Точно так же вводятся $(a',b\phi)$, $(b\text{э}\,a)$ и т.д.

Кроме того, введем такие обозначения:

$$[a\,|\,r.\,b\text{э}\,|\,c] = \left\{ \begin{matrix} (a,r)(b\text{э},c) & \text{при} & a<r<b<c\,, \\ (a,b\text{э})(r,c) & \text{при} & a<b<r<c\,; \end{matrix} \right. \tag{2-50}$$

точно так же вводятся $[a'\,|\,r,b_{\text{э}}\,|\,c]$, и т.д.

В этих обозначениях поля источников, расположенных вне волновода, задаются выражениями

$$[r, b_Э]^s = \frac{[a \mid r, b_Э \mid \infty]}{(a, \infty)}, \quad [r, b\phi]^s = \frac{[a' \mid r, b\phi \mid \infty]}{(a', \infty)}. \tag{2-51}$$

При достаточно больших $r$ все поля, возбужденные источником, находящимся вне волновода (если этот источник конечен по $r$), задаются выражениями

$$[r, b_Э]^s = (r, \infty)\frac{(a, b_Э)}{(a, \infty)}, \quad [r, b\phi]^s = (r, \infty)\frac{(a', b\phi)}{(a', \infty)}. \tag{2-52}$$

Зависимость всех полей от радиуса задается либо множителем $(r, \infty)$, либо множителем $(r', \infty)$. При больших $r$ в системе координат $R$, $\theta$ и $\phi$ компоненты полей будут иметь вид (поля распространяются вдоль радиуса $R$ со световой скоростью):

$$E_R = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{p}{R^2}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{(a', b\phi)}{(a', \infty)}\,e^{i(kR - p\pi/2)},$$

$$H_R = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{p}{R^2}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{(a, b_Э)}{(a, \infty)}\,e^{i(kR - p\pi/2)},$$

$$E_\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{k}{R}\,\frac{(a, b_Э)}{(a, \infty)} + \frac{p}{R^2}\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{(a', b\phi)}{(a', \infty)}\right\} e^{i(kR - p\pi/2)},$$

$$H_\phi = E_\theta,$$

$$E_\phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{p\cos\theta}{R^2\sin^2\theta} \frac{(a, b э)}{(a, \infty)} - \frac{k}{R} \frac{(a', b\phi)}{(a', \infty)} \right\} e^{i(kR - p\pi/2)}, \tag{2-53}$$

$$H_\theta = -E_\phi .$$

В этих формулах в выражения $(a, bэ)$ и $(a', b\phi)$ надо подставить $v = k \sin \theta$, $w = k\cos\theta$.

Плотность потока энергии в направлении радиуса $R$ для таких волн имеет к вид:

$$S_R = \frac{c}{4\pi^2}\left(\frac{k^2}{R^2} + \frac{p^2}{R^4}\right) \left[ \frac{(a, b э)(a, bэ)^x}{(a, \infty)(a, \infty)^x} + \frac{(a', b\phi)(a', b\phi)^x}{(a', \infty)(a', \infty)^x} \right]. \tag{2-54}$$

Волны электрического и магнитного типов не интерферируют друг с другом.

Формулы вида (2-53) для открытого пространства выводятся таким же путем и получаются из формул (2-53) и (2-54) заменой:

$$\frac{(a, bэ)}{(a, \infty)} \to (0, bэ), \quad \frac{(a', b\phi)}{(a', \infty)} \to (0, b\phi). \tag{2-55}$$

Волны электрического типа поляризованы в плоскости $r, z$. Волны магнитного типа поляризованы перпендикулярно плоскости $r, z$.

з) Возбуждение волновода движущимся источником

Как было доказано в части I данной работы, в системе координат, связанной с источником, движущимся вдоль оси волновода, поля имеют тот же вид, что и для неподвижного источника в неподвижной системе координат.

Неинвариантные величины в системе источника помечены штрихом. Например, $z'$, $t'$, $k'$ и $w'$.

В системе волновода обозначения оставим прежними.

Скорость источника обозначим $\beta c$.

При заданных $k'$ и $v$ величина $w'$ имеет вид

$$w' = \pm \beta'_{гр} k', \qquad \beta'_{гр} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{k'}\right)^2} . \tag{2-56}$$

Здесь и дальше плюс относится к волне, движущейся направо относительно источника, минус – к волне, движущейся налево относительно источника. $c\beta'_{гр}$ – групповая скорость этих волн относительно источника.

Поток и плотность этих волн в системе координат источника имеют вид:

$$S'_z = \pm \beta'_{гр} \frac{k'^2}{8\pi} \{ [r, b\phi][r, b\beta\phi]^x + [r, bэ][r, bэ]^x \},$$

$$\bar{W}' = \frac{k'^2}{8\pi} \{ [r, b\phi][r, b\phi]^x + [r, bэ][r, bэ]^x \} . \tag{2-57}$$

Отношение $S'_z$ к $W'$ равно $\pm c\beta'_{гр}$ – групповой скорости волн. В системе координат волновода

$$w = w'\gamma(\beta \pm \beta'_{гр}), \qquad k = k'(1 \pm \beta\beta'_{гр})\gamma . \tag{2-58}$$

$$\beta = \frac{w}{k} = \frac{\beta \pm \beta'_{гр}}{1 \pm \beta\beta'_{гр}}, \qquad (2\text{-}59)$$

$$S_z = c\,\frac{(\beta \pm \beta'_{гр})(1 \pm \beta\beta'_{гр})}{1-\beta^2}\,\frac{k'^2}{8\pi}\{[r, b\phi][r, b\phi]^x + [r, bэ][r, bэ]^x\}, \qquad (2\text{-}60)$$

$$\overline{W} = \frac{(1+\beta\beta'_{гр})^2}{1-\beta^2}\,\frac{k'^2}{8\pi}\{[r, b\phi][r, b\phi]^x + [r, bэ][r, bэ]^x\}. \qquad (2\text{-}61)$$

Групповая скорость волны в системе волновода равна релятивистской сумме групповой скорости этой волны относительно источника и скорости источника.

1. При $\beta < \beta'_{гр}$ волны движутся относительно волновода в том же направлении, что и относительно источника.

2. При $\beta \geq \beta'_{гр}$ обе волны, испущенные источником, движутся в том же направлении, что и источник.

3. При $\beta = \beta'_{гр}$ волна, испущенная назад, превращается в нераспространяющуюся волну с $w = 0$ и $S_z = 0$.

Плотность энергии в такой волне будет равна

$$\overline{W} = \frac{v^2}{8\pi}\{[r, b\phi][r, b\phi]^x + [r, bэ][r, bэ]^x\}. \qquad (2\text{-}62)$$

4. При $k' = v$ $\beta'_{гр} = 0$ и в системе координат сгустка будет наблюдаться резонанс. При резонансе в системе координат волновода

$$w = \gamma v \beta, \quad k = \gamma v, \quad \beta_{гр} = \beta, \qquad (2\text{-}63)$$

$$S_z = \frac{c\beta}{1-\beta^2}\frac{v^2}{8\pi}\{[r,b\phi][r,b\phi]^x + [r,b_э][r,bэ]^x\}, \qquad (2\text{-}64)$$

$$\bar{W} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{v^2}{8\pi}\{[r,b\phi][r,b\phi]^x + [r,bэ][r,bэ]^x\}. \qquad (2\text{-}65)$$

Двигая источник с $k' = v$, мы можем получить волны с заданной групповой скоростью.

Формулы (2-63-65) можно интерпретировать по-другому.

Источник, движущийся со скоростью, которая совпадает с групповой скоростью допустимой в волноводе волны, и имеющий в системе координат волновода одинаковую с ней частоту, возбуждает такую волну резонансным образом.

Этот эффект можно использовать для отбора высокочастотной энергии у источников, имеющих строго определенную собственную частоту.

5. Рассмотрим поля вне волновода вблизи его поверхности. В этой области могут существовать только волны с $v = 0$, для которых выполняются соотношения

$$E'_z = H'_z = 0, \quad H'_\phi = \pm E'_r, \quad H'_r = -(\pm E'_\phi). \qquad (2\text{-}66)$$

Подставив эти соотношения в формулы (1-37), мы получим, что при $v = 0$ преобразование Лоренца имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}'\gamma(1\pm\beta), \quad \vec{H} = \vec{H}'\gamma(1\pm\beta). \qquad (2\text{-}67)$$

Все поля умножаются на один и тот же множитель. Частоты и волновые векторы преобразуются по закону

$$w = w'\gamma(1 \pm \beta), \quad k = \pm w . \tag{2-68}$$

6. Формулы для лоренцевских преобразований полей вдали от волновода имеют более сложный вид и нам в дальнейшем не потребуются.

### и) Взаимодействие двух источников внутри волновода и снаружи вблизи от поверхности волновода

Источники (или сгустки плазмы с зарядами и токами) взаимодействуют друг с другом посредством полей, возбужденных ими.

При достаточно больших расстояниях между источниками мы можем в выражениях для полей оставить только распространяющиеся волны. Величины, относящиеся к первому источнику, мы будем помечать индексом "1", ко второму – индексом "2".

Силы, действующие на 1-й источник, находятся по формулам, выведенным в части I настоящей работы .

$$c F_{z_1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} iw \left( [r\phi_1^x, b\phi_2] + [rэ_1^x, bэ_2] \right). \tag{2-69}$$

Здесь

$$[r, \phi_1^x, b\phi_2] = j_{\phi_1}^x(r)[r', b\phi_2]^s - \frac{ip}{vr} j_{r_1}^x(r)[r, b\phi_2]^s,$$
$$(2-70)$$
$$[rэ_1^x, bэ_2] = -\frac{i}{v}\{wc\rho_1^x(r) - kj_{z_1}^x(r)\}[r, bэ_2]^s,$$

$j_{\phi_1}^x(r)$, $j_{r_1}^x(r)$, $j_{z_1}^x(r)$, $\rho_1^x(r)$ – величины, комплексно сопряженные фурье-компонентам зарядов и токов 1-го источника. $[r, b\phi_2]^s$ и $[r, bэ_2]^s$

определяют поля второго источника и вычисляются при помощи формул (2-37). На больших расстояниях от источника

$$[r, b\phi_2]^s = \mp\sqrt{2\pi}\,\frac{[0\,|\,r, b\phi_2\,|\,a']\,iv}{a(0,a)\left(\frac{p^2}{v^2a^2}-1\right)w},\tag{2-71}$$

$$[r, b\,\text{э}_2]^s = \mp\sqrt{2\pi}\,\frac{[0\,|\,r, b\,\text{э}_2\,|\,a]}{a(0,a')w}\,iv\,.$$

Верхний знак относится к волне, идущей направо от источника, нижний – к волне, идущей налево от него.

Подставив формулы (2-70) и (2-71) в формулу (2-69), мы получим величину силы, действующей на первый источник со стороны второго посредством возбужденной им волны.

Для волны магнитного типа

$$cF_{z_1} = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{v}{a(0,a)\left(\frac{p^2}{v^2a^2}-1\right)}\,\mathrm{Re}\,[0\,|\,r\phi_1^x, b\phi_2\,|\,a'].\tag{2-72}$$

Для волны электрического типа

$$cF_{z_1} = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{v}{a(0,a')}\,\mathrm{Re}\,[0\,|\,r\,\text{э}_1^{*}, b\,\text{э}_2\,|\,a].\tag{2-73}$$

Плюс берется, если первый источник находится справа от второго, минус – если слева. Здесь введены следующие обозначения:

$$[0\,|\,r\phi_1^x, b\phi_2\,|\,a'] = \begin{cases} (0, r\phi_1)^x\,(b\phi_2, a') & \text{при } 0<r<b<a, \\ (0, b\phi_2)(r\phi_1, a')^x & \text{при } 0<b<r<a; \end{cases}\tag{2-74}$$

$$[0,|r\mathfrak{Э}_1^{*},b\mathfrak{Э}_2|a] = \left\{ \begin{array}{ll} (0,r\mathfrak{Э}_1)^{x}(b\mathfrak{Э}_2,a) & \text{при } 0<r<b<a, \\ (0,b\mathfrak{Э}_2)(r\mathfrak{Э}_1,a)^{x} & \text{при } 0<b<r<a. \end{array} \right\} \qquad (2\text{-}75)$$

В формулах (2-72-73) подразумевается $i\frac{(2\pi)^{5/2}}{2c}\int_0^a r\,dr\int_0^a b\,db$.

В $(0,r\phi_1)(r,\phi_1,a')(0,r\mathfrak{Э}_1),(r\mathfrak{Э}_1a)$ входят фурье-компоненты токов первого источника, в $(0,b\phi_2)(b\phi_2 a)(0,b\mathfrak{Э}_2)(b\mathfrak{Э}_2 a)$ входят фурье-компоненты токов второго источника, взятые с теми же $k$ и $w$.

Формулы (2-72-73) применимы не только к неподвижным источникам, но и к движущимся.

В силу инвариантности полей в системе источника мы можем считать второй источник неподвижным. Скорость первого источника мы обозначим $\beta_1 c$.

$w$ и $k$ первого и второго источников должны удовлетворять равенствам

$$w_1=\gamma(w_2-\beta k_2),\ k_1=\gamma(k_2-\beta w_2);\quad k_1^2-w_1^2=k_2^2-w_2^2=v^2. \qquad (2\text{-}76)$$

Силы взаимодействия источников вне волновода и внутри коаксиальной линии находятся аналогичным образом.

## *Выводы*

1. Разделение всех величин на электрические и магнитные имеет универсальный физический смысл. При рассмотрении

а) возбуждения и распространения полей,

б) потоков и плотности энергии полей и силы взаимодействий между сгустками частиц,

в) граничных условий

поля и токи электрического и магнитного типов не влияют друг на друга.

2. Проведенное в работе разбиение величин на электрические и магнитные инвариантно относительно преобразования Лоренца при движении источников переменных полей с постоянной скоростью.

3. Приведенный здесь аппарат расчёта позволяет решить полную неоднородную задачу о возбуждении волноводных устройств сторонними источниками (в частности, сгустками частиц) при наличии собственных волноводных полей.

4. Расчёт резонансных явлений в круглых волноводных линиях показал возможность аккумуляции энергии в заданном участке волноводной системы подобно накоплению энергии в резонаторе. Такие процессы осуществляются при возбуждении полей неподвижными источниками.

Авторы благодарят участников семинара ОНМУ Лаборатории высоких энергий за стимулирующие обсуждения и ценные замечания.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1969 года.