

И-289

16/IV-69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

9 - 4317



Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков

ВИНТОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Часть I

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

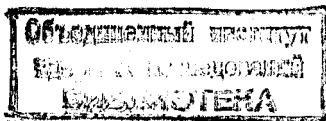
9 - 4317

Л.П.Игушкин, Э.И.Уразаков

ВИНТОВЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Часть I

7771/2 ч.



П р е д и с л о в и е

В последнее время проблема коллективных методов ускорения становится актуальнейшей проблемой в развитии ускорителей заряженных частиц. При экспериментальном осуществлении предложенного В.И.Векслером^{/1/} когерентного принципа ускорения заряженных частиц возникает необходимость в процессе ускорения использовать различные поля волноводных устройств^{/2,3/}, в которых находятся сгустки частиц и, в частности, плазменные сгустки.

Изучение динамики отдельных конкретных сгустков частиц в СВЧ-полях представляет собой самостоятельную физическую задачу при создании ускорителей, основанных на когерентном методе ускорения. Несмотря на разнообразие видов полей и сгустков частиц возможно выявить общие физические закономерности, имеющие место в электромагнитных СВЧ- полях со сгустками частиц.

Решение общей задачи взаимодействия электромагнитных полей волноводных линий (мы будем называть их "винтовые электромагнитные поля") и сгустков частиц проливает свет на возможности ускорения заряженных частиц когерентными методами.

В данной работе предложен и использован метод расчёта электромагнитного поля при помощи электрических и магнитных инвариантов. Все изучаемые величины - поля, токи, граничные условия - как для открытого пространства внутри и вне круглых волновода и коаксиальной линии разделены на две группы величин - электрического и магнитного типов. Доказательство справедливости такого разделения в волноводе дано в работе^{/4/}.

Математический аппарат, учитывающий это разбиение и его инвариантность и использующий преобразование Фурье, оказался более наглядным и удобным, чем метод непосредственного интегрирования уравнений Максвелла^{1,2,5/}.

Это позволило сравнительно легко решить многие задачи, считавшиеся ранее недоступными из-за громоздкости вычислений. Кроме того, были рассмотрены ранее упущенные резонансные эффекты. Возможности предложенного метода не исчерпываются решенными задачами.

В первой части исходя из выражений для запаздывающих потенциалов выведены основные соотношения, связывающие поля и возбуждающие их токи. Получены выражения для плотности энергии, компонент вектора Пойнтинга и силы Лоренца для величин электрического и магнитного типов. Показан вид преобразования Лоренца для электрических и магнитных инвариантов при движении вдоль оси z . Сформулированы граничные условия на идеально проводящей стенке волноводных линий в терминах электрических и магнитных инвариантов.

Во второй части проведен анализ распространения и возбуждения волн сторонними источниками внутри и снаружи идеально проводящего круглого волновода для а) волноводных волн и б) плоских волн.

Этот анализ проведен также для волноводных устройств с анизотропно проводящими границами. Детально рассмотрен резонанс в волноводе.

Рассмотрены явления, связанные с возбуждением волн в направленных волноводных системах движущимися с постоянной скоростью источниками полей.

Изучено взаимодействие источников полей (покоящихся и движущихся) внутри и вне волновода.

Часть I

Поля токов и зарядов, заданных в цилиндрической системе

координат

Все функции цилиндрических координат и времени представляются в виде:

$$f(r, \phi, z, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\phi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iwz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} f(r, w, \omega). \quad (1-1)$$

Для дальнейшего нужны следующие формулы:

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-n)\phi} = 2\pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(w-w_1)z} = 2\pi \delta(w-w_1). \quad (1-2)$$

а) Вывод соотношений между Фурье-компонентами полей и токов.

За основу возьмем формулы запаздывающих потенциалов:

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{e^{ikR}}{R} \vec{j}(\vec{r}', \omega) \quad (1-3)$$

$$\vec{\phi}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{e^{ikR}}{R} c\rho(\vec{r}', \omega)$$

в цилиндрических координатах

$$\vec{r} = \{r, \phi, z\}, \quad \vec{r}' = \{b, \psi, \zeta\}, \quad dV' = b db d\zeta d\psi \quad (1-4)$$

$$R = \sqrt{(z - \zeta)^2 + [r^2 + b^2 - 2rb \cos(\phi - \psi)]}.$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{e^{ik\sqrt{D^2 + z^2}}}{\sqrt{D^2 + z^2}} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iwz} H_0^{(1)}(vD), \quad (1-5)$$

где $H_0(x) = H_0^{(1)}(x)$ - функция Ханкеля, $v = \sqrt{k^2 - w^2}$, $\text{Im } v > 0$, и теоремой сложения бesselевых функций:

$$H_0(\sqrt{v\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\phi}}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\phi} \begin{cases} J_s(vr)H_s(vb) & \text{при } r < b \\ J_s(vb)H_s(vr) & \text{при } r > b \end{cases} \quad (1-6)$$

Получим:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iw(z-\zeta)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s. \quad (1-7)$$

Здесь введено обозначение:

$$[r, b]_s = \begin{cases} J_s(vr)H_s(vb) & \text{при } r < b \\ H_s(vr)J_s(vb) & \text{при } r > b \end{cases} \quad (1-8)$$

В дальнейшем будут использоваться и такие обозначения:

$$[r', b] = \frac{\partial}{\partial vr} [r, b]_s, \quad [r', b'] = \frac{\partial^2}{\partial vr \partial vb} [r, b]_s \quad (1-9)$$

$$[r, b']_s = \frac{\partial}{\partial vb} [r, b]_s.$$

Подставив выражение (1-7) в формулы для запаздывающих потенциалов, проделав Фурье-преобразование по z и воспользовавшись второй из формул (1-2), получим:

$$\vec{A}(r, w, \phi, \omega) = \frac{i\pi}{c} \int_0^\infty b db \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s \vec{j}(b, w, \psi, \omega). \quad (1-10)$$

В результате Фурье-преобразования по z и ζ исчезло интегрирование по ζ , формула (1-10) связывает Фурье-компоненты токов и полей с одинаковыми w . Интегрирование по b будет входить во все дальнейшие формулы, и дальше мы везде будем подразумевать знак $\int_0^\infty b db$, но выписывать его мы не будем. Все компоненты потенциалов и полей будут функциями r, w и ω , все компоненты зарядов и токов — функциями b, w, ω . Поэтому дальше для краткости этих аргументов выписывать не будем. В этих обозначениях

$$\vec{A}(\phi) = \frac{i\pi}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s \vec{j}(\psi), \quad (1-11)$$

$$\vec{\phi}(\phi) = \frac{i\pi}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s c\rho(\psi).$$

Формулу для векторного потенциала напомним для компонент:

$$A_z(\phi) = \frac{i\pi}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s j_z(\psi).$$

$$A_\phi(\phi) = \frac{i\pi}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s \{ j_\phi(\psi) \cos(\phi-\psi) - j_r(\psi) \sin(\phi-\psi) \}, \quad (1-12)$$

$$A_r(\phi) = \frac{i\pi}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\psi)} [r, b]_s \{ j_r(\psi) \cos(\phi-\psi) + j_\phi(\psi) \sin(\phi-\psi) \}.$$

Проделив преобразования Фурье по углу ϕ , воспользовавшись формулами Эйлера

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (1-13)$$

и первой из формул (1-2), получим:

$$\phi_p = -\frac{2\pi^2 i}{c} [r, b]_p c \rho_p, \quad (1-14)$$

$$A_{pz} = \frac{2\pi^2 i}{c} [r, b]_p j_{pz}$$

Из рекуррентных соотношений для функций Бесселя и Ханкеля

$$Z_{p-1}(x) + Z_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} Z_p(x) \quad (1-15)$$

$$Z_{p-1}(x) - Z_{p+1}(x) = 2Z'_p(x)$$

следуют такие соотношения:

$$[r, b]_{p-1} + [r, b]_{p+1} = 2 \left\{ [r', b']_p + \frac{p}{v^2 r b} [r, b]_p \right\}, \quad (1.16)$$

$$[r, b]_{p-1} - [r, b]_{p+1} = \frac{2p}{v} \left\{ \frac{1}{r} [r, b']_p + \frac{1}{b} [r', b]_p \right\}.$$

Подставив выражения (1-16) в формулы (1-14), мы получим формулы, связывающие величины с одинаковым индексом p . Поэтому дальше мы везде этот индекс будем только подразумевать, и не будем выписывать множитель $\frac{2\pi^2 i}{c}$. В итоге получим:

$$\bar{\phi} = [r, b] c p,$$

$$A_z = [r, b] j_z, \quad (1-17)$$

$$A_\phi = \left\{ [r', b'] + \frac{p^2}{v^2 r b} [r, b] \right\} j_\phi + \frac{i p}{v} \left\{ \frac{1}{r} [r, b'] + \frac{1}{b} [r', b] \right\} j_r,$$

$$A_r = \left\{ [r', b'] + \frac{p^2}{v^2 r b} [r, b] \right\} j_r - \frac{i p}{v} \left\{ \frac{1}{v} [r, b'] + \frac{1}{b} [r', b] \right\} j_\phi.$$

Фурье-компоненты полей выражаются через Фурье-компоненты потенциалов следующим образом:

$$E_z = i k A_z - i w \bar{\phi}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{i p}{r} A_r, \quad (1-18)$$

$$E_\phi = i k A_\phi - \frac{i p}{r} \bar{\phi}, \quad H_\phi = i w A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z,$$

$$E_r = i k A_r - \frac{\partial}{\partial r} \bar{\phi}, \quad H_r = \frac{i p}{r} A_z - i w A_\phi.$$

Подставив в формулы (1-18) выражения (1-17), получим следующие формулы для полей:

$$E_z = -v [r, b \partial], \quad H_z = -v [r, b \phi],$$

$$E_\phi = \frac{p w}{v r} [r, b \partial] + i k [r', b \phi], \quad H_\phi = -i k [r', b \partial] + \frac{p w}{v r} [r, b \phi],$$

$$E_r = -i w [r', b \ni] + \frac{pk}{vr} [r, b \phi], \quad H_r = -\frac{pk}{vr} [r, b \ni] - i w [r', b \phi]. \quad (1-19)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$[r, b \phi] = [r, b'] j_\phi + \frac{ip}{vb} [r, b] j_r, \quad (1-20)$$

$$[r, b \ni] = [r, b] i \frac{(w c \rho - k j_z)}{v}, \quad (1-21)$$

$$[r', b \ni] = \frac{\partial}{\partial vr} [r, b \ni], \quad [r', b \phi] = \frac{\partial}{\partial vr} [r, b \phi]. \quad (1-22)$$

Опускаемые нами повсюду знаки $\frac{2\pi^2 i}{c} \int b db$ следует считать входящими в выражения $[r, b \phi]$, $[r', b \phi]$, $[r, b \ni]$, $[r', b \ni]$. При $k \neq 0$ будет удобнее плотность заряда ρ выразить через токи, воспользовавшись уравнением непрерывности. Для Фурье-компонент оно имеет вид:

$$i w j_z + \frac{ip}{b} j_\phi + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} (b j_r) - i k c \rho = 0. \quad (1-23)$$

Найдя отсюда $c \rho$ и подставив его в выражения для $[r, b \ni]$, мы получим:

$$[r, b \ni] = -i [r, b] j_\ni - \frac{w}{k} [r, b'] j_r, \quad (1-24)$$

где

$$j_{\ominus} = \frac{v}{k} j_z - \frac{pw}{kvb} j_{\phi} \quad (1-25)$$

Дальше мы будем пользоваться для нахождения $[r, b\ominus]$ обоими выражениями: (1-21) и (1-24). Величины $[r, b\phi]$, $[r', b\phi]$, j_{ϕ} назовем величинами магнитного типа, величины $[r, b\ominus]$, $[r', b\ominus]$, j_{\ominus} — величинами электрического типа. Поля, в которых будут отличны от нуля только величины электрического типа. $[r, b\ominus]$ и $[r', b\ominus]$, называются полями электрического типа, поля, в которых отличны от нуля только $[r, b\phi]$ и $[r', b\phi]$, — полями магнитного типа. Следует отметить, что такое разделение носит у нас всеобщий характер и будет применяться не только к полям внутри волноводов.

В формулах (1-19, 20, 21, 24 и 25) v содержится в знаменателе. Поэтому мы должны исследовать поведение фурье-компонент полей при $v \rightarrow 0$. Фактически это соответствует волнам, распространяющимся в линиях со скоростью света. Нам удобно не пользоваться формулами (1-16), приводящими к появлению v в знаменателе.

Воспользовавшись формулами (1-14, 18) и (1-23) и перейдя к пределу при $v \rightarrow 0$, мы получим (при конечных r и b) при $p = 0$

$$E_z = \frac{i}{\pi} \frac{w}{kb} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} j_r, \quad H_z = -\frac{i}{\pi b} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} j_{\phi};$$

$$E_{\phi} = \frac{k}{\pi} \begin{Bmatrix} r \\ b \end{Bmatrix}_1 j_r; \quad H_{\phi} = -\frac{i}{\pi r} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} j_z + \frac{w}{\pi} \begin{Bmatrix} r \\ b \end{Bmatrix}_1 j_r; \quad (1-26)$$

$$E_r = -\frac{2iw}{\pi kr} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} j_z + \frac{k}{\pi} \begin{Bmatrix} r \\ b \end{Bmatrix}_1 j_r; \quad H_r = -\frac{w}{\pi} \begin{Bmatrix} r \\ b \end{Bmatrix} j_r;$$

при $p = 1$

$$E_z = -\frac{w}{\pi b k} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_1 j_\phi + \frac{i w}{\pi k b} \left[\begin{matrix} r \\ -b \end{matrix} \right]_1 j_r; \quad H_z = -\frac{i}{\pi b} \left[\begin{matrix} r \\ -b \end{matrix} \right]_1 j_\phi - \frac{1}{\pi b} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_1 j_r, \quad (1-27)$$

$$E_\phi = -\frac{w}{\pi k r} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_1 j_z - \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{\ln v b}{\ln v r} \right\} (j_\phi + i j_r); \quad H_\phi = \frac{i}{\pi r} \left[\begin{matrix} r \\ -b \end{matrix} \right]_1 j_z + \frac{i w}{\pi} \left\{ \frac{\ln v b}{\ln v r} \right\} (j_\phi + i j_r);$$

при $p > 1$

$$E_z = -\frac{w}{\pi k b} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right] j_\phi + \frac{i w}{\pi k b} \left[\begin{matrix} r \\ -b \end{matrix} \right] j_r,$$

$$E_\phi = -\frac{w}{\pi k r} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right] j_z + \left\{ \frac{k}{2\pi(p-1)} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_{p-1} + \frac{k}{2\pi(p+1)} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_{p+1} - \right. \quad (1-28)$$

$$\left. -\frac{p}{\pi k b r} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right] \right\} j_\phi + i \left\{ \frac{k}{2\pi(p-1)} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_{p-1} - \frac{k}{2\pi(p+1)} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_{p+1} + \right. \\ \left. + \frac{p}{\pi k b r} \left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right] \right\} j_r.$$

Здесь мы ввели обозначения:

$$\left[\begin{matrix} r \\ b \end{matrix} \right]_i = \left\{ \begin{matrix} (\frac{r}{b})^i \\ (\frac{b}{r})^i \end{matrix} \right\}, \quad \left[\begin{matrix} r \\ -b \end{matrix} \right]_i = \left\{ \begin{matrix} (\frac{r}{b})^i \\ -(\frac{b}{r})^i \end{matrix} \right\}. \quad (1-29)$$

Во всех скобках верхняя строка берется при $r > b$, нижняя - при $r < b$. В выражениях (1-26, 27 и 28) не проводилось деления величины на электрический и магнитные типы. Часто необходимо находить поля токов на стенках волновода. Плотности токов на стенке волновода радиуса a имеют вид:

$$bj_z(b) = F_z \delta(b-a), \quad bj_\phi(b) = F_\phi \delta(b-a), \quad j_r = 0. \quad (1-30)$$

В выражениях для полей этих токов исчезает последний интеграл, но b и поля вычисляются при помощи выражений

$$[r, b_\Omega] = -i[r, a] F_\Omega, \quad [r, b_\phi] = [r, a'] F_\phi, \quad (1-31)$$

где

$$F_\Omega = \frac{v}{k} F_z - \frac{pw}{kva} F_\phi. \quad (1-32)$$

При $v \rightarrow 0$ и при $r=a$ выражения для полей токов на стенках волноводов имеют вид:

$$\text{при } p=0 \quad E_z = 0, \quad E_\phi = \frac{k}{\pi} F_\phi,$$

$$\text{при } p=1 \quad E_z = -\frac{w}{\pi ka} F_\phi, \quad E_\phi = -\frac{k}{\pi} \ln va F_\phi - \frac{w}{\pi ka} F_z,$$

$$\text{при } p > 1 \quad E_z = -\frac{w}{\pi ka} F_\phi,$$

$$E_\phi = -\frac{w}{\pi ka} F_z - \frac{p}{\pi} \frac{(1+k^2 a^2 - p^2)}{k a^2 (p^2 - 1)} F_\phi. \quad (1-33)$$

б) Преобразование Лоренца полей и токов для движения вдоль оси

При переходе в систему координат, движущуюся вдоль оси z с постоянной скоростью βc , координаты и время преобразуются следующим образом:

$$z' = \frac{(z - \beta ct)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct' = \frac{ct - \beta z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad r' = r, \quad \phi' = \phi. \quad (1-34)$$

Частоты и волновые векторы полей преобразуются по закону:

$$w' = \gamma(w - \beta k), \quad k' = \gamma(k - \beta w), \quad v' = v, \quad p' = p. \quad (1-35)$$

$$w'z' - k'ct' = wz - kct, \quad dw'dk' - \text{инв.} \quad (1-36)$$

Компоненты полей преобразуются по закону:

$$E'_z = E_z, \quad H'_z = H_z,$$

$$E'_\phi = \gamma(E_\phi + \beta H_r), \quad H'_\phi = \gamma(H_\phi - \beta E_r), \quad (1-37)$$

$$E'_r = \gamma(E_r - \beta H_\phi), \quad H'_r = \gamma(H_r + \beta E_\phi).$$

Подставив в формулы (1-37) выражения для полей (1-19), получим:

$$E'_z = -v[r, b\varepsilon], \quad H'_z = -v[r, b\phi],$$

$$E'_\phi = \frac{pw'}{vr} [r, b\varepsilon] + ik'[r', b\phi], \quad H'_\phi = -ik'[r', b\varepsilon] + \frac{pw'}{vr} [r, b\phi],$$

$$E'_r = -iw'[r', b_\theta] + \frac{pk'}{vr}[r, b_\phi], \quad H'_r = -\frac{pk'}{vr}[r, b_\theta] - iw'[r', b_\phi]. \quad (1-38)$$

Как мы видим, при преобразованиях Лоренца остаются неизменными выражения $[r, b_\theta]$, $[r', b_\theta]$, $[r, b_\phi]$ и $[r', b_\phi]$, а во всех множителях перед ними w и k заменяются на w' и k' .

Токи преобразуются при переходе в новую систему координат по закону:

$$j_z = \gamma(j'_z - \beta c\rho'), \quad c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_z), \quad j'_\phi = j_\phi, \quad j'_r = j_r. \quad (1-39)$$

$$k'j'_z - c\rho'w' = kj_z - w c\rho. \quad (1-40)$$

Воспользовавшись формулами (1-25), (1-23) и (1-39), мы получим:

$$j'_\theta = j_\theta + \frac{iv\beta}{bk(k-\beta w)} \frac{\partial}{\partial b} (bj_r) \quad \text{при } k', k \neq 0. \quad (1-41)$$

В случае, когда выражение bj_r не зависит от b или равно нулю (как, например, на стенках волновода), электрическая компонента тока является инвариантной. В этом случае все используемые нами компоненты плотности тока j_θ , j_ϕ и j_r являются инвариантными.

в) Потоки энергии полей, возбужденных токами.

Найдем потоки энергии для полей электрического и магнитного типов, Фурье-компоненты которых отличны от нуля только при заданных w , k и r .

В этом случае их зависимость от координат дается выражениями для полей электрического типа:

$$E_z = -v [r, b \vartheta] \cdot X \quad H_z = 0$$

$$E_\phi = \frac{pw}{vr} [r, b \vartheta] \cdot X, \quad H_\phi = -ik [r', b \vartheta] X, \quad (1-43)$$

$$E_r = -iw [r', b \vartheta] \cdot X, \quad H_r = -\frac{pk}{vr} [r, b \vartheta] X.$$

Для полей магнитного типа

$$E_z = 0, \quad H_z = -v [r, b \phi] X,$$

$$E_\phi = ik [r', b \phi] X, \quad H_\phi = \frac{pw}{vr} [r, b \phi] X, \quad (1-44)$$

$$E_r = \frac{pk}{vr} [r, b \phi] \cdot X, \quad H_r = -iw [r', b \phi] X,$$

$$X = \exp \{ i [wz + p\phi - kct] \}.$$

Выражения для $[r, b \vartheta]$ и $[r, b \phi]$ таких полей будут различными в разных конкретных случаях.

Подставив действительные части выражений (1-43,44) в формулу (1-42) и воспользовавшись тем, что $[r, b \phi]$ и $[r, b \vartheta]$ удовлетворяют уравнению Бесселя относительно переменной vr , получим с точностью до ротора произвольного вектора средние значения по времени плотностей потоков энергии.

Для полей электрического типа:

$$S_z = \frac{c}{8\pi} wk [r, b \vartheta] [r, b \vartheta]^*, \quad (1-45)$$

$$S_\phi = \frac{c}{8\pi} \frac{pk}{r} [r, b \vartheta] [r, b \vartheta]^*,$$

$$S_r = \frac{c}{8\pi} vk \operatorname{Re} (i [r, b \vartheta] [r', b \vartheta]^*);$$

для полей магнитного типа

$$S_z = -\frac{c}{8\pi} w k [r, b\phi] [r, b\phi]^* \quad (1-46)$$

$$S_\phi = -\frac{c}{8\pi} \frac{pk}{r} [r, b\phi] [r, b\phi]^* ,$$

$$S_r = -\frac{c}{8\pi} v k \operatorname{Re} (i [r, b\phi] [r', b\phi]^*) .$$

Между компонентами плотностей потоков существует соотношение:

$$S_\phi = -\frac{p}{wr} S_z .$$

При переходе в движущуюся систему координат S_z , S_ϕ , S_r преобразуются соответственно как wk , k , k .

В случае, когда поля задаются суммой выражений (1-43) и (1-44), потоки энергии будут задаваться суммами выражений (1-45) и (1-46). Это означает, что интерференция между полями электрического и магнитного типов даже при одинаковых k и w отсутствует (мы не учитываем члены, обращающиеся в нуль при вычислении полных потоков через поверхности).

Точно так же с точностью до величин, обращающихся в нуль при интегрировании по объему, мы получим следующее выражение для плотности энергии в поле, заданной суммой выражений (1-43) и (1-44)

$$\bar{w} = \operatorname{Re} \frac{k^2}{8\pi} \{ [r, b\phi] [r, b\phi]^* + [r, b\phi] [r, b\phi]^* \} . \quad (1-47)$$

Вид этого выражения говорит об отсутствии интерференции между полями электрического и магнитного типов.

г) . Силы Лоренца

Мы найдем величины сил, действующих на сгусток с зарядом и током в волне, заданной суммой выражений (1-43) и (1-44). Воспользовавшись формулой для плотности силы Лоренца

$$c \vec{f} = c \rho \vec{E} + [\vec{j} \times \vec{H}] \quad (1-48)$$

и учтя комплексность выражений для зарядов и токов, мы получим, например,

$$c f_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ c \rho^x E_z + j_r^x H_\phi - j_\phi^x H_r \}. \quad (1-49)$$

В дальнейших выкладках мы не будем писать знака $\frac{1}{2} \operatorname{Re}$.

Все слагаемые в формуле (1-49) после подстановки выражений (1-43) и (1-44) будут иметь вид:

$$j^x(r, \phi, z) e^{i\omega_{cr} t} f(r) \exp \{ i [w z + p \phi - k c t] \}, \quad (1-50)$$

где ω_{cr} - частота колебаний тока в сгустке. Среднее значение такого слагаемого по времени будет отлично от нуля только при условии $\omega = kc$. Далее мы будем считать, что это условие выполняется.

В дальнейшем мы не будем писать знака $(2\pi)^{3/2} \int_0^\infty r dr$.

Полные выражения для F_z будут иметь вид:

$$c F_z = i w [r \phi^x, b \phi] + i w [r \varepsilon^x, b \varepsilon]. \quad (1-51)$$

Здесь введены обозначения:

$$[r \phi^x, b \phi] = j^x_{p \phi} (r, w, \omega) [r', b \phi] - \frac{i p}{v r} j^x_{p r} (r, w, \omega) [r, b \phi], \quad (1-52)$$

$$[r \varepsilon^x, b \varepsilon] = i j^x_{p \varepsilon} (r, w, \omega) [r, b \varepsilon] - \frac{w}{k} j^x_{p r} (r, w, \omega) [r', b \varepsilon]. \quad (1-53)$$

Вместо первого члена справа формулы (1-53) можно воспользоваться таким:

$$-\frac{i}{v} [w c \rho^x (r, w, \omega) - k j^x_z (r, w, \omega)] [r, b \varepsilon]. \quad (1-54)$$

Силы, действующие на часть сгустка, можно вычислить таким же способом, если при интегрировании для вычисления фурье-компонент токов и зарядов брать соответствующие пределы^{x/}.

Момент сил относительно оси z , действующий на весь сгусток, вычисляется точно так же. Он равен

$$c M_z = i p [r \phi^x, b \phi] + i p [r \varepsilon^x, b \varepsilon]. \quad (1-55)$$

M_z и F_z связаны соотношением:

$$M_z = \frac{p}{w} F_z. \quad (1-56)$$

^{x/} Как известно, фурье-компоненты силы определяются интегрированием по всему сгустку. Для определения силы, действующей на часть сгустка при переходе от формул (1-49) и (1-50), необходимо интегрировать по соответствующей части сгустка.

Это характерно для волны, зависящей от ϕ и z как $\exp\{i(wz + p\phi)\}$, т.е. для волны винтового типа.

Выражения для остальных компонент силы, действующей на ступок имеют вид:

$$cF_{\phi} = \frac{ip}{r} \{ [r\phi^x, b\phi] + [r\phi^x, b\phi] + (\frac{w}{vkr} [r, b\phi] + \frac{i}{p} [r', b\phi]) j_{pr}^x(r, w, k) \} \quad (1-57)$$

$$cF_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r[r\phi^x, b\phi] + r[r\phi^x, b\phi]) + [r\phi^x, b\phi]' + [r\phi^x, b\phi]' - \quad (1-58)$$

$$- \frac{w}{kr} [r', b\phi] j_{pr}^x(r, w, k).$$

Здесь введены обозначения:

$$[r\phi^x, b\phi]' = [r', b\phi] \frac{\partial}{\partial r} j_{pr}^x(r, w, k) - \frac{ip}{vr} [r, b\phi] \frac{\partial}{\partial r} j_{pr}^x(r, w, k),$$

$$[r\phi^x, b\phi]' = i[r, b\phi] \frac{\partial}{\partial r} j_{pr}^x(r, w, k) - \frac{w}{k} [r', b\phi] \frac{\partial}{\partial r} j_{pr}^x(r, w, k).$$

В формулах (1-51, 57, 58) подразумевается

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (2\pi)^{3/2} \int_0^{\infty} r dr.$$

д) Граничные условия на проводящих цилиндрических поверхностях

На идеально-проводящей цилиндрической поверхности

$$r = a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \quad (1-59)$$

должны выполняться условия

$$E_z(a, \phi, z, t) = 0, \quad E_{\phi}(a, \phi, z, t) = 0 \quad -\infty < z < \infty. \quad (1-60)$$

Поскольку эти условия справедливы при любых ϕ, z, t , над ними можно проделать преобразование Фурье по этим переменным. В результате получим:

$$E_{pz}(a, w, k) = E_{p\phi}(a, w, k) = 0. \quad (1-61)$$

При $v \neq 0$ эти равенства равносильны следующим:

$$[a, b\varepsilon] = 0, [a', b\phi] = 0. \quad (1-62)$$

Граничные условия для полей электрического и магнитного типов оказались независимыми друг от друга. Ранее было замечено, что токи электрического типа возбуждают только поля электрического типа и взаимодействуют только с полями электрического типа и что то же самое справедливо для токов и полей магнитного типа. Из равенств (1-62) следует, что это положение сохранится и в присутствии любого количества бесконечных идеально-проводящих цилиндрических поверхностей с осями, совпадающими с осью z , то есть для пространства внутри и вне круглого волновода и между стенками круглой коаксиальной линии. Сгустки с радиальными токами могут возбуждать оба вида полей.

Из того, что в уравнение (1-62) входят только инвариантные относительно преобразования Лоренца для движения вдоль оси z величины, следует, что поля движущегося вдоль идеального волновода внутри или снаружи его или между стенками коаксиальной линии источника в связанной с ним системе координат будут такими же, как для неподвижного относительно волновода источника в неподвижной системе координат ($k \neq 0$).

Рассмотрим теперь анизотропно проводящие цилиндрические поверхности с круглым поперечным сечением.

На поверхности, идеальной вдоль оси z и непроводящей в перпендикулярном направлении ($\sigma_z \rightarrow \infty, \sigma_\phi = 0$), будут выполняться условия:

$$F_{\phi} = 0, \quad [a, b_{\varepsilon}] = 0 \quad (E_z = 0), \quad (1-63)$$

σ — проводимость граничной поверхности.

Граничные условия для поверхности электрического типа будут такими же, как на сплошной изотропной поверхности. С полями магнитного типа такая поверхность совсем не будет взаимодействовать и поэтому ее можно будет использовать как фильтр, пропускающий поля магнитного типа и отражающий поля электрического типа.

Кроме того, такая поверхность не нарушает разделения величин на электрический и магнитный типы. Уравнения (1-63) содержат инвариантные для движения вдоль оси z величины и справедливы для любой движущейся системы координат. Вблизи от такой поверхности поля движущегося источника вычисляются так же, как для неподвижного.

На поверхности, не проводящей вдоль оси z и идеально проводящей в перпендикулярном направлении (по ϕ), граничные условия имеют вид:

$$F_{z} = 0, \quad E_{\phi} = 0. \quad (1-64)$$

Эти условия равносильны следующим:

$$\frac{k}{v} F_a + \frac{p w}{v^2 a} F_{\phi} = 0, \quad \frac{p w}{v a} [a, b_{\varepsilon^x}] + i k [a_1', b_{\phi}] = 0. \quad (1-65)$$

При $p \neq 0$ эти условия нарушают разделение величины на электрический и магнитный типы и не являются инвариантными для движения вдоль оси z .

При $p=0$ условия (1-65) имеют вид:

$$F_{\ominus} = 0 \quad [a', b\phi] = 0. \quad (1-66)$$

При $p=0$ такая поверхность сохраняет разделение величины на электрический и магнитный типы, пропускает волны электрического типа и отражает волны магнитного типа и одинаково влияет на поля движущихся и неподвижных источников ($k \neq 0$).

На поверхности, идеально проводящей в направлении под углом α к оси z и не проводящей в перпендикулярном направлении, будут выполняться условия:

$$F_{\phi} \cos \alpha - F_z \sin \alpha = 0, \quad E_z \cos \alpha + E_{\phi} \sin \alpha = 0 \quad (1-67)$$

$$-F_{\ominus} \sin \alpha + F_{\phi} \frac{v}{k} \left(\cos \alpha - \frac{pw}{v^2 a} \sin \alpha \right) = 0, \quad (1-68)$$

$$-v [a, b\ominus] \left(\cos \alpha - \frac{pw}{v^2 a} \sin \alpha \right) + ik [a', b\phi] \sin \alpha = 0.$$

При условии $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{pw}{v^2 a}$ такую поверхность можно использовать как фильтр, пропускающий волны электрического типа с заданными p, w, k и отражающий поля магнитного поля с теми же p, w, k . Действительно, в этом случае, условия (1-67) и (1-68) примут вид:

$$-F_{\ominus} \sin \alpha = 0, \quad ik [a', b\phi] \sin \alpha = 0. \quad (1-69)$$

При $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ такая поверхность нарушит разделение величин на электрический и магнитный типы и будет по-разному влиять на поля движущихся и неподвижных источников.

Л и т е р а т у р а

1. В.И.Векслер. Атомная энергия 5, 427, 1957 г.
2. Луи Де-Бройль. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, Москва, Госиздат. Инлит. 1948 г.
3. Л.А.Вайштейн. Электромагнитные волны. Изд. "Советское радио", Москва, 1957 г.
4. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Вестник МГУ, 7, 1948 год.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Госиздат. тех.-теор. лит. Москва, 1957 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

12 февраля 1969 года.