ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

9-3395-2

М.Л. Иовнович

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

1967.

9-3395-2

М.Л. Иовнович

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

Устойчивость слабонеоднородной нерелятивистской плазмы, удерживаемой магнитным полем, изучалась многими авторами [1,2]. Обобщение этих результатов при произвольном соотношении между размерами слоя и ларморовским радиусом частиц получено в [3]. Имеется ряд исследований по колебаниям однородной релятивистской плазмы [4]. Отметим, в частности, статью [5], в которой рассмотрена устойчивость однородной релятивистской плазмы в магнитном поле с анизотропным распределением частиц по скоростям. Следуя известному методу, рассмотрим потенциальные колебания цилиндрического слоя релятивистской плазмы с малой амплитудой. Частицы плазмы удерживаются однородным магнитным полем величины H_0, направленным вдоль OZ. Движение частицы в равновесном состоянии разреженной плазмы описывается уравнением

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{e}{mc^2}\,\vec{v}\times\vec{H}_0 , \qquad (1)$$

где $\vec{v}$ –скорость, $\vec{p} = mc\vec{u}$ –импульс частиц. Уравнения движения приводят к следующим интегралам движения:

$$a^2 = u_1^2 + u_2^2 ,\ u_3 ,\ a_1 = u_1 - \frac{\Omega}{c} y ,\ a_2 = u_2 + \frac{\Omega}{c} x \quad \left(\Omega = \frac{eH_0}{mc}\right).$$

Два последних интеграла движения являются обобщением соответствующих нерелятивистских выражений. Сохраняется также полная энергия частицы, пропорциональная величине $\epsilon = \sqrt{1+u^2}$.

Выберем равновесную функцию распределения частиц в виде

$$f_0 = A f\left(\frac{a^2}{u_p^2}\right) e^{-u_3^2/u_0^2}\,\delta(a_1)\,\delta(a_2),$$

где A выражается через линейную плотность частиц в слое n_0 с помощью нормировки $\int f_0\, d^3u\, dx\, dy = n_0$. Плотность частиц в равновесном состоянии равна $\dfrac{n_0 f(s)}{\pi R^2 b}$, где размер слоя $R = \dfrac{c u_p}{|\Omega|}$, $s = \dfrac{r^2}{R^2}$, $b = \int_0^\infty f(s)\, ds$.

Возмущение потенциала электрического поля ϕ приводит к изменению функции распределения, которое определяется в результате решения линеаризованного кинетического уравнения в виде

$$f_1 = \frac{e}{mc}\int_0^\infty dt\, \vec{\nabla}\phi\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{u}(t)}. \tag{2}$$

В этом выражении координаты и импульс частицы находятся с помощью уравнения движения (1)

$$x(t) = \frac{c}{\Omega}\left[a_2 - a \operatorname{Sin}\left(\frac{\Omega}{\epsilon}t + \alpha\right)\right],$$

$$y(t) = \frac{c}{\Omega}\left[a \operatorname{Cos}\left(\frac{\Omega t}{\epsilon} + \alpha\right) - a_1\right], \tag{3}$$

$$z(t) = z - \frac{c u_3 t}{\epsilon}!$$

и т.д., где a и α определяются соотношениями $u_1 = a \operatorname{Cos}\alpha$, $u_2 = a \operatorname{Sin}\alpha$. Подставим в выражение (2) разложение потенциала в интеграл Фурье

$$\phi = \int \phi(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\, d^3k\, d\omega$$

Представим изменение функции распределения в виде суммы по гармоникам циклотронной частоты. Используем для этого известное разложение

$$e^{i\frac{ck a}{\Omega}\sin\left(\beta - \frac{\Omega t}{\epsilon} - \alpha\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{ck a}{\Omega}\right) e^{in\left(\beta - \frac{\Omega t}{\epsilon} - \alpha\right)}, \tag{4}$$

где k и β находятся из соотношений $k_1 = k \operatorname{Cos}\beta$, $k_2 = k \operatorname{Sin}\beta$.

Проинтегрировав по времени, получим

$$f_1(x,y,k_3,\omega,\vec{u}) = -\frac{2e\epsilon}{mc^2u_0^2}\Big(f_0\phi(x,y,k_3,\omega) + \int dk_1 dk_2\, \phi(\vec{k},\omega)\sum_{-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{cka}{\Omega}\right). \tag{5}$$

$$\frac{e^{in(\beta-\alpha)}}{\epsilon\omega - ck_3u_3 - n\Omega}\left[n\Omega\left(u_0^2\frac{\partial}{\partial a^2} + 1\right) - \omega\epsilon - \frac{u_0^2c^2}{2\Omega}\left(k_1\frac{\partial}{\partial y} - k_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] f_0\, e^{i\frac{c}{\Omega}(k_1a_2 - k_2a_1)}\Big).$$

Вычислим изменение плотности частиц $n_1 = \int f_1 \, d^3 u$. Интегрирование по поперечным импульсам проводится с помощью δ –функций. В результате этого интегрирования величина α выражается через полярный угол θ с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}\alpha &= \frac{\Omega}{|\Omega|}\operatorname{Sin}\theta, \\ \operatorname{Sin}\alpha &= -\frac{\Omega}{|\Omega|}\operatorname{Cos}\theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение имеет вид $\alpha = \theta - \frac{\Omega}{|\Omega|}\frac{\pi}{2}$. Два последних члена в (5) после интегрирования по поперечным импульсам представим с помощью соотношений

$$k J_n = \frac{n_\pm}{r} J_{n_\pm} \pm \frac{d J_{n_\pm}}{d r},$$

где $J_n = J_n(kr)$, $n_\pm = n \pm 1$, в виде суммы членов, пропорциональных выражениям

$$\sum_{-\infty}^{\infty} F_{n_\pm}\left(\frac{n}{r} \mp \frac{d}{dr}\right) V,$$

где

$$F_n = e^{-in\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon_0 e^{-x^2} dx}{\epsilon_0\omega - c k_3 u_0 x - n\Omega}$$

$$\epsilon_0 = \sqrt{1 + u_p^2 s + u_0^2 x^2},$$

$$V = i^n \int dk_1 dk_2 \, \phi(\vec{k}, \omega) \, e^{in\beta} J_n(kr).$$

Запишем разложение в ряд Фурье для изменения плотности и потенциала

$$n_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} n_n(r, k_3, \omega) e^{-in\theta}$$

$$\phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_n(r, k_3, \omega) e^{-in\theta}.$$

Интеграл $V = \phi_n(r, k_3, \omega)$. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y} = e^{\pm i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$,

получим изменение плотности частиц, связанное с n –ой модой колебаний,

$$n_n = -\frac{2e\sqrt{\pi}A}{mc^2 u_0}\left[fT - \omega f Q_n + n\Omega\left(\frac{u_0^2}{u_p^2}\frac{df}{ds} + f\right)P_n + \frac{u_0^2 c^2}{4\Omega}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rP_- f\frac{d}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2} f P_- - \frac{n}{r}\frac{d}{dr}(fP_+)\right\}\right]\phi_n, \tag{7}$$

где

$$T=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon_0 e^{-x^2}dx,\quad P_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}\epsilon_0\,dx}{d},\quad Q_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}\epsilon_0^2dx}{d},\quad P_{\pm}=P_{n+1}\pm P_{n-1}$$

$$d=\epsilon_0\,\omega-c|k_3|u_0x-n\Omega.$$

Каждая азимутальная мода колебаний связана с тремя гармониками циклотронной частоты $n, n\pm1$. Подставляя выражение (7) в уравнение Пуассона и полагая при этом, что форма распределения $f(s)$ и размер слоя R одинаковы для электронов и ионов, получим уравнение потенциальных колебаний цилиндрического слоя плазмы:

$$[4\frac{d}{ds}(s\frac{d}{ds})-\frac{n^2}{s}-\lambda]\phi_n=\Sigma\frac{8e^2n_0}{mc^2u_0^2b}[fT-\omega fQ_n+ \tag{8}$$

$$+n\Omega(\frac{u_0^2}{u_p^2}\frac{df}{ds}+f)P_n+\frac{u_0^2\Omega}{4u_p^2}\{4\frac{d}{ds}(sfP_-\frac{d}{ds})-\frac{n^2}{s}fP_--$$

$$-2n\frac{d}{ds}(fP_+)\}]\phi_n,$$

где $\lambda=k_3^2R^2$, суммирование проводится по всем видам заряженных частиц. При $r\to\infty$ потенциал должен достаточно быстро стремиться к нулю.

Вычислим интеграл $T=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}he^h[K_0(h)+K_1(h)]$, где $h=\frac{1+u_p^2s}{2u_0^2}$. Рассмотрим нерелятивистское распределение частиц по продольным импульсам $u_c^2\ll|1+u_p^2s$. В этом случае величина T приближенно равна $\sqrt{1+u_p^2s}=a(s)$. Функция $a(s)$ учитывает релятивизм движения частиц. Если ограничиться рассмотрением медленных волн, которые взаимодействуют с нерелятивистскими частицами (фазовая скорость волны $\frac{\omega}{k_3}$, а также $\frac{n\Omega}{ak_3}$ много меньше скорости света c), то ϵ_0 приближенно равна $a(s)$. В результате получим приближенные равенства $P_n=\frac{a\Phi_n}{c|k_3|u_0}$, $Q_n=\frac{a^2\Phi_n}{c|k_3|u_0}$,

где $$\Phi_n=-i\sqrt{\pi}\;W(\beta_n),\;\beta_n=\frac{a\omega-n\Omega}{c|k_3|u_0},$$

W –функция Крампа от комплексного аргумента. Для медленных волн уравнение потенциальных колебаний принимает следующий вид

$$[4\frac{d}{ds}(s\frac{d}{ds}) - \frac{n^2}{s} - \lambda]\phi_n = \Sigma \frac{8e^2 n_0}{mc^2 u_p^2 b}[\frac{u_p^2}{u_0^2} f\alpha(1-\beta_n\Phi_n) + \tag{9}$$

$$+n\beta_0\alpha\Phi_n\frac{df}{ds} + \frac{\beta_0}{4}\{4\frac{d}{ds}(sf\alpha\Phi_-\frac{d}{ds}) - \frac{n^2}{s}f\alpha\Phi_- - 2n\frac{d}{ds}(f\alpha\Phi_+)\}]\phi_n,$$

где

$$\Phi_\pm = \Phi_{n+1} \pm \Phi_{n-1}, \quad \beta = \frac{\omega}{c|k_s|u_0}, \quad \beta_0 = \frac{\Omega}{c|k_s|u_0}.$$

Рассмотрим низкочастотные колебания плазмы, частота которых ω в основной области, занятой плазмой, много меньше Ω/α.

Поскольку для низкочастотных колебаний наиболее существенна нулевая гармоника циклотронной частоты, ограничимся нулевой $(n=0)$ и первой $(|n|=1)$ модами. Декремент затухания колебаний γ будем считать много меньшим реальной части частоты $(\omega \to \omega + i\gamma)$. Рассмотрим в случае нулевой моды волну, у которой фазовая скорость много больше тепловых скоростей частиц v_0, в случае первой моды фазовая скорость волны много больше v_{0i} и много меньше v_{0e}. Для всех гармоник $|\beta_n| \gg 1$, кроме нулевой гармоники циклотронной частоты электронов в случае первой моды, где $|\alpha\beta| \ll 1$. Используя известные разложения функции Крампа, представим уравнение (9) в виде. $A_0\Phi_n = i A_1\Phi_n$, в котором правая часть пропорциональна малому отношению декремента к частоте. Для нулевой моды

$$A_0 = 4\frac{d}{ds}(s[1 + f\Sigma\frac{\omega_p^2\alpha}{\Omega^2}]\frac{d}{ds}) + \lambda(\frac{f}{\omega^2}\Sigma\frac{\omega_p^2}{\alpha} - 1), \tag{10}$$

$$A_1 = \Sigma\frac{8e^2 n_0 f}{mc^2 b}(\frac{\gamma c^2 k_s^2}{\omega^3\alpha} + \sqrt{\pi}\frac{\alpha^2\omega}{c|k_s|u_0^3}e^{-\alpha^2\beta^2}),$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{4e^2 n_0}{mR^2 b}.$$

При выводе уравнения колебаний для первой моды положим, что отношение линейных плотностей ионов и электронов значительно превосходит величины $\frac{\omega\alpha_e}{\Omega_e}$, $\alpha_e^2\beta_e^2$.

В этом случае $\Phi_+ = \Phi_0$, $\Phi_- = -n\Phi_0$, причем для ионов $\Phi_0 = \frac{1}{\alpha\beta}(1 - \frac{i\gamma}{\omega})$, для электронов $\Phi_0 = -i\sqrt{\pi}$ (экспоненциально малым поглощением волны ионами пренебрегаем). При выполнение условия $\lambda \gg \frac{\Omega_i}{a_i|\omega|}$ в уравнении колебаний можно отбросить ряд членов, связанных с нулевой гармоникой и сохранить член, связанный с первой гармоникой. В этом случае операторы

$$A_0 = 4\frac{d}{ds}\left(s\left[1+f\,\frac{\omega_{pi}^2}{2\Omega_i|\omega|}\right]\frac{d}{ds}\right)+\lambda\left(f\Sigma\,\frac{\omega_p^2\,a}{\Omega^2}-1\right), \tag{11}$$

$$A_1 = 2n\frac{d}{ds}\left(sf\left[\frac{\omega_{pi}^2\,\gamma}{\Omega_i\,\omega^2}+\frac{\sqrt{\pi}\,a_e\,\omega_{pe}^2}{\Omega_e\,c|k_3|\,u_{0e}}\right]\frac{d}{ds}\right),$$

$\omega = n|\omega|$. Запишем выражение для потенциала ϕ_n в виде ряда по малому параметру $\frac{\gamma}{\omega}$. Уравнение для определения величины потенциала в нулевом приближении ψ имеет вид $A_0\psi = 0$. Это уравнение определяет спектр колебаний. Умножим уравнение для ϕ_n в первом приближении на комплексно сопряженное значение ψ и проинтегрируем по сечению слоя. Учитывая, что A_0 вещественный и самосопряженный оператор, получим уравнение для определения декремента /2/

$$\int_0^\infty ds\,\psi^*\,A_1\,\psi = 0. \tag{12}$$

Для нулевой моды декремент

$$\gamma = -\sqrt{\pi}\,\frac{\omega^4}{c^3|k_3|^3}\,\frac{\int_0^\infty ds|\psi|^2 f\,\Sigma\,\frac{a^2 n_0}{m\,u_0^3}\,e^{-a^2\beta^2}}{\int_0^\infty ds|\psi|^2\, f\,\Sigma\,\frac{n_0}{m\,a}}\,], \tag{13}$$

т.е. волна при распространении вдоль слоя затухает.

Для первой моды

$$\gamma = \sqrt{\pi}\,\frac{n_{0e}}{n_{0i}}\,\frac{\omega^2}{c|k_3|\,u_{0e}}\,\frac{\int_0^\infty ds\,f\,a_e\,s\left|\frac{d\psi}{ds}\right|^2}{\int_0^\infty ds\,f\,s\left|\frac{d\psi}{ds}\right|^2} \tag{14}$$

в этом случае существует кинетическая неустойчивость плазмы /1/. Если распределение частиц по поперечным импульсам нерелятивистское $u_p^2 \ll 1$, $a = 1$, то выражение (14) упрощается

$$\gamma = \sqrt{\pi}\,\frac{n_{0e}}{n_{0i}}\,\frac{\omega^2}{|k_3|\,v_{0e}}, \tag{15}$$

где $v_e = c\,u_0$. Для определения спектра колебаний будем решать уравнения нулевого приближения методом геометрической оптики /2/. Представим эти уравнения в виде

$$\frac{d}{ds}\left(sp\,\frac{d\psi}{ds}\right)+\lambda\,q\,\psi = 0 \tag{16}$$

и с помощью преобразования $t = \int\frac{ds}{sp}$ приведем их к нормальной форме. Точки перехода определяются нулями функций $s\,p\,q$. Если $u_p \gg v_c$, длина волны много меньше размера слоя $\lambda \gg 1$, то спектр колебаний определяется уравнением

$$\int ds\sqrt{\frac{\lambda\,q}{s\,p}} = \ell\pi \qquad (\ell \gg 1), \tag{17}$$

выражение (14) запишется в виде

$$\gamma = \sqrt{\pi}\,\frac{n_{0e}}{n_{0i}}\,\frac{\omega^2}{c|k_3|\,u_{0e}}\,\frac{\int\frac{ds}{\sqrt{s}}\,f\,a_e\,\frac{\sqrt{q}}{p^{3/2}}}{\int\frac{ds}{\sqrt{s}}\,f\,\frac{\sqrt{q}}{p^{3/2}}}.$$

(Интегрирование распространяется на область прозрачности плазмы между точками перехода).

Для плазмы с относительно высокой плотностью $\frac{\omega_{pi}^2\,a_i}{\Omega_i^2} \gg 1$ в выражениях для p, q можно пренебречь единицей и упростить тем самым вычисление интегралов (17),(18). В этом случае частота колебаний для нулевой моды

$$|\omega| = \frac{\Omega_i}{2}\,\frac{m_i\sqrt{\lambda}}{\ell\pi}\int\frac{ds}{\sqrt{s}}\sqrt{\frac{\Sigma\,\frac{n_0}{m\,a}}{\Sigma\,n_0\,m\,a}}, \tag{19}$$

для первой моды

$$|\omega| = \frac{2\Omega_i}{\lambda}\,n_{0i}\,m_i\,\ell^2\pi^2\left(\int\frac{ds}{\sqrt{s}}\sqrt{\Sigma\,n_0\,m\,a}\right)^{-2}, \tag{20}$$

$$\gamma = \sqrt{\pi}\,\frac{n_{0e}}{n_{0i}}\,\frac{\omega^2}{c|k_3|\,u_{0e}}\,\frac{\int\frac{ds}{\sqrt{s}}\,a_e\sqrt{\Sigma\,n_0\,m\,a}}{\int\frac{ds}{\sqrt{s}}\sqrt{\Sigma\,n_0\,m\,a}} \tag{21}$$

Предположим, что плазма квазинейтральна $n_{0e} = n_{0i}$, область прозрачности лежит между нулем и единицей. Если распределение частиц по поперечным импульсам нерелятивистское, то спектр колебаний плазмы определяется в виде:

для $n = 0$

$$|\omega| = \frac{c|k_3|\, u_{pi}}{\ell\pi} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \qquad (22)$$

для $|n| = 1$

$$|\omega| = \frac{\ell^2 \pi^2}{2\lambda}\, \Omega_i . \qquad (23)$$

Формула (23) справедлива при условии $\ell^2 \ll \lambda$.

Если распределение ионов по поперечным импульсам нерелятивистское, электронов – ультрарелятивистское $u^2_{pe} \gg 1$, но масса электрона $a_e m_e$ много меньше массы иона m_i, то частота колебаний первой моды выражается формулой (23), а

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \frac{\omega^2 u_{pe}}{c\,|k_3|\, u_{0e}} . \qquad (24)$$

Величина $\frac{c u_0}{u_p}$ –тепловая скорость частицы v_0. Если сгусток плазмы ограничен в продольном направлении, то полученные результаты справедливы, если продольный размер сгустка значительно превосходит величину v_0/ω.

Отметим, что азимутальная составляющая $\nabla\phi$ при наличии продольного магнитного поля приводит к неустойчивости колебаний первой моды /1/.

Литература

1. А.Б.Михайловский. Вопросы теории плазмы, вып. 3,Госатомиздат, 1963,стр.141.
2. А.А.Рухадзе и В.П.Силин. УФН, 82, 499 (1964).
3. В.В.Арсенин. ЖТФ, 37, 607 (1967).
4. В.П.Силин и А.А.Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961.
5. R.N.Sudan. Phys. Fluids, 8, 153 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1967 года.