

Р-325

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



9 - 3346 - 2

С.Б.Рубин, В.Н. Мамонов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ УСКОРЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА
С БОЛЬШИМ ЗАРЯДОМ В РЕЗОНАТОРЕ

1967.

5192/3 мр.

9 - 3346 - 2

С.Б.Рубин, В.Н. Мамонов

ОБ УСКОРЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА
С БОЛЬШИМ ЗАРЯДОМ В РЕЗОНАТОРЕ



В в е д е н и е

В связи с повышением интенсивности ускорителей различных типов сейчас уделяется внимание вопросам влияния собственного поля ускоряемого плотного потока частиц или сгустков частиц с большим суммарным зарядом на процесс ускорения.

Имеется целый ряд работ, в которых рассматривается влияние "нагрузки пучком" на характеристики ускоряющей системы, например /1-6/. Кроме того, имеется много исследований, посвященных вычислению полей излучения, создаваемых сгустками, движущимися в различных пространственных структурах. Наиболее близкими из них для указанного круга задач являются /7-15/.

Можно, однако, заметить, что в работах о влиянии нагрузки пучком изучается в основном движение сбунчиванного пучка в периодической пространственной системе и производится квазистатический расчёт потерь энергии, или в приближении теории электрических цепей рассчитываются переходные режимы в ускоряющей системе, или, наконец, при тех же основных предположениях изучается действие собственных полей на структуру пучка и его устойчивость. Исходным предположением большинства работ, в которых вычисляются собственные поля, является равномерность движения источника. Например, при таком условии выполнены работы Днестровского и Костомарова /9,10/, где определено полное излучение при прохождении заряженного сгустка через отверстие в бесконечном проводящем экране, работа Колпакова и Котова /11/, работа Фоменко /14/.

Перечисленные предположения не всегда дают возможность последовательно учесть релятивистский характер движения и влияние запаздывания (в особенности, если ускоряется отдельный участок) на полный набор энергии частицами в ускоряющей системе . Поэтому желательно, хотя бы на примере системы простой конфигурации, подробнее рассмотреть влияние этих факторов.

Ниже рассматривается случай ускорения одиночного сгустка, пролетающего через возбужденный резонатор. За исходную принята работа Колпакова и Котова^{/11/}, где вычислены поля, возбуждаемые в круглом цилиндрическом идеально проводящем резонаторе зарядом (точечным или в виде отрезка нити), пролетающим продольно оси цилиндра с постоянной, релятивистской скоростью. Приводится выражение для энергии излучения (в виде двойного ряда) и рассматриваются предельные случаи.

В отличие от этой работы, далее не везде предполагается постоянство скорости заряда и учитывается наличие возбужденного стороннего (ускоряющего) поля в резонаторе. Такая постановка задачи дает возможность проследить, как ускоряемый сгусток отбирает энергию, запасенную в объеме резонатора, т.к. очевидно, что при релятивистской начальной скорости, из-за запаздывания, энергия стороннего поля не может отбираться сразу из всего объема.

Итак, рассматривается замкнутая физическая система, состоящая из поперечного поля, возбужденного в резонаторе с идеально проводящими стенками (т.е. свободных колебаний в резонаторе), пролетающего через резонатор сгустка электронов и собственного поля, возбужденного этим сгустком как за счет его ускорения, так и вследствие пространственной неоднородности системы. Учитываются начальные условия: в момент $t = t_0 = 0$ сгусток проникает в объем резонатора сквозь торцовую стенку со скоростью $v_0 = \beta_0 c$, собственное поле сгустка во всем объеме резонатора в этот момент полагается отсутствующим^{x)}, ускоряющее поперечное поле внутри объема имеет определенную начальную амплитуду и фазу.

Для описания физической стороны задачи, да и для вычислений,

x) Таким образом пренебрегается полем, проникшим в объем через торцовое отверстие в процессе влета сгустка в резонатор.

наиболее удобной является гамильтоновская форма уравнений взаимодействующих частиц и поля ^{18,77}.

Исходя из уравнений Максвелла в кулоновской калибровке

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (1)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{V}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad (3)$$

(где \vec{A} - определяет всю поперечную часть суммарного поля, т.е. поля ускоряющего ^{xx}) и собственного поля, Φ - определяет статическое поле) и граничных условий на внутренней поверхности резонатора

$$(\vec{A} \times \vec{n})_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

$$(\Phi)_{\Sigma} = 0 \quad (5)$$

(где \vec{n} - нормаль к поверхности Σ), определяем следующие уравнения для осцилляторов поперечного поля:

$$\ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \frac{1}{c} \int_V \rho \vec{v} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) (d\vec{r}). \quad (6)$$

Заряд сгустка, рассматриваемого как единая частица с распределенной плотностью ρ , есть S ;

$$\rho = e g(\vec{r} - \vec{Q}(t)), \quad \text{где } \vec{Q}(t) \text{ - радиус-вектор}$$

центра тяжести, $\vec{v} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ и $\int_V g(\vec{r} - \vec{Q})(d\vec{r}) = N_0$ - полное число частиц в сгустке ^{xx}), интегрирование в (6) распространено на объем резонатора.

Ортогональная система векторных функций $\{\vec{A}_{\lambda}\}$, по которым

х) В дальнейшем для краткости существовавшее ранее в резонаторе свободное поле называется "ускоряющим".

xx) Аналогичный подход принят, например, в работе ^{17/}; конкретные выражения для $g(\vec{r} - \vec{Q})$ рассматриваются ниже.

выполнено разложение потенциала

$$\vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda} \quad (7)$$

является системой собственных функций резонатора, т.е. удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \vec{A}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda} = 0,$$

и граничному условию

$$(\vec{A}_{\lambda} \times \vec{n})_{\Sigma} = 0.$$

Условия нормировки:

$$\int_V \vec{A}_{\lambda} \cdot \vec{A}_{\lambda'}(d\vec{r}) = 4\pi c^2 \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Решение уравнения (3) может быть представлено в явном виде в форме

$$\Phi(t, \vec{r}) = \int_{V'} \rho(t, \vec{r}') \sum_{\sigma} \frac{\phi_{\sigma}(\vec{r}) \phi_{\sigma}(\vec{r}')}{\omega_{\sigma}^2} (d\vec{r}'), \quad (8)$$

где $\phi_{\sigma}(\vec{r})$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \phi_{\sigma} + \frac{\omega_{\sigma}^2}{c^2} \phi_{\sigma} = 0,$$

граничному условию $(\phi_{\sigma}(\vec{r}))_{\Sigma} = 0$.

Полный гамильтониан замкнутой системы, в которой ступок представляется как целое (т.е. части его удерживаются сторонними силами), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{M^2 c^4 + c^2 \left[\vec{P} - \frac{1}{c} \int_V \rho(\vec{r} - \vec{Q}(t)) \vec{A}(\vec{r}, t) (d\vec{r}) \right]^2} + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (p_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V'} \int_V \sum_{\sigma} \frac{\phi_{\sigma}(\vec{r}) \phi_{\sigma}(\vec{r}')}{\omega_{\sigma}^2} \rho(\vec{r} - \vec{Q}) \rho(\vec{r}' - \vec{Q}) (d\vec{r}) (d\vec{r}') = \\ &= \mathcal{H}_{(1)} + \mathcal{H}_{(2)} + \mathcal{H}_{(3)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) $\vec{A}(\vec{r}, t)$ и $\Phi(\vec{r}, t)$ определены формулами (7), (8), \vec{P} - канонический импульс, сопряженный с координатой \vec{Q} ,

p_λ - канонические импульсы, сопряженные "координатам" q_λ осцилляторов поля, $M = m_0 N_0$ - суммарная масса покоя сгустка (состоящего из электронов).

Уравнения движения сгустка

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{O}}, \quad \frac{d\vec{O}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \quad (10)$$

с учетом соотношений

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda} \text{rot } \vec{A}_{\lambda}, \quad \vec{E} = - \frac{1}{c} \sum_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} - \nabla \Phi, \quad (11)$$

$$p = M c \gamma \frac{d\vec{O}}{dt} = \vec{P} - \frac{1}{c} \int_V \rho \vec{A}(\vec{r}, t) (d\vec{r}), \quad (12)$$

где
$$\gamma = \left[1 - \frac{(\dot{\vec{O}})^2}{c^2} \right]^{-1/2} \quad (13)$$

приводятся к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(M \gamma \frac{d\vec{O}}{dt} \right) = \int_V \rho \left\{ - \frac{1}{c} \sum_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} - \nabla \Phi + \frac{1}{c} \left(\frac{d\vec{O}}{dt} \times \sum_{\lambda} q_{\lambda} \text{rot } \vec{A}_{\lambda} \right) \right\} (d\vec{r}) \quad (14)$$

Остальные канонические уравнения, соответствующие (9), уже записаны в виде системы (6). Из закона сохранения энергии замкнутой физической системы следует, что $H = H_0$ (15)

в течение всего времени, пока систему можно считать замкнутой, т.е. пока сгусток находится внутри резонатора. Выражение (15) показывает, каким образом происходит отбор энергии из первоначально возбужденного внешними источниками резонатора - по мере движения сгустка происходит перераспределение энергии между всеми тремя частями H . При этом согласно (6) уменьшается "амплитуда колебаний", а вместе с тем и энергия гармонического осциллятора, который был возбужден сторонними источниками, и возбуждаются остальные осцилляторы.

Отсюда следует, что при расчете энергии, набираемой сгустком, когда он находится еще внутри резонатора, необходимо учитывать не только потери

на излученное поперечное поле, но и энергию, описываемую "статическим" членом K_3 . Из последнего члена должна быть вычтена собственная электромагнитная энергия заряда сгустка, оставшаяся часть представит энергию, затраченную на создание статического поля зарядов, возникших на внутренних стенках полости резонатора.

В самое уравнение (14), в правую его часть, входит теперь "сила самодействия". В связи с этим возникают и различные вопросы, связанные с исключением электромагнитной массы, регуляризацией потенциалов и т.п. Последние, однако, существенно зависят от предположений о распределении заряда.

II.

Для дальнейшего необходимо привести явные выражения для функций $\vec{A}_\lambda \cdot \phi_\sigma$. Для резонатора, у которого радиус поперечного сечения равен a , длина равна h в цилиндрической системе координат r, ϕ, z , и в гауссовой системе единиц эти функции равны (см., напрмер, /11/):

$$\left. \begin{aligned} A_{\ell m}^{(\pi)} &= \frac{2\sqrt{2} \nu_\ell c}{a^2 \sqrt{h} \lambda_{\ell m}} \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)} \cos \frac{m\pi}{h} z \\ A_{\ell m}^{(\sigma)} &= \frac{2\sqrt{2} \pi m c}{a h^{3/2} \lambda_{\ell m}} \frac{J_1\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)} \sin \frac{m\pi}{h} z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} m = 1, 2, 3 \dots \\ \ell = 1, 2, 3 \dots \end{array} \quad (16)$$

$$A_{\ell 0}^{(\pi)} = \frac{2 \nu_\ell c}{a^2 \sqrt{h} \lambda_{\ell 0}} \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)}, \quad m = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

$$\phi_{\ell m} = \frac{2\sqrt{2} c}{a \sqrt{h}} \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)} \sin \frac{m\pi}{h} z, \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ \ell = 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\ell m} &= \frac{\omega_{\ell m}}{c} = \sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \\ \sigma_{\ell m} &= \frac{\omega_{\ell m}}{c} = \sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где ν_ℓ - корни уравнения $J_0(\nu) = 0$.

Ввиду азимутальной симметрии задачи все выражения для частот и потенциалов относятся к азимутальному числу $j = 0$. (Таким образом, вместо тройных сумм в выражения типа (7), (8) входят суммы, двойные по l, m).

Далее будет рассматриваться одномерное движение сгустка вдоль продольной оси резонатора без учета поперечной устойчивости. Поэтому везде ниже используются только последние из уравнений (14).

В этом уравнении последний член исчезает, т.к. магнитное поле, имеющееся внутри полости, не оказывает влияния на продольное движение.

Получается следующая система зацепляющихся уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q &= \int_V \rho \beta_z A^{(z)}(\vec{r})(d\vec{r}) \\ \frac{d}{dt}(M\gamma\beta_z) &= \frac{1}{c} \int_V \rho \{ -\frac{1}{c} \sum_\lambda \dot{q}_\lambda A^{(z)} - (\nabla\Phi)_z \} (d\vec{r}) \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где Φ определяется формулой (8). Так же, как в /17/, эта система может быть приведена к одному интегро-дифференциальному уравнению. Для этого необходимо задать начальные условия для всех осцилляторов поля. Если считать, что резонатор был возбужден на основной частоте λ_{10} (т.е. $m = 0, l = 1$), то принятые ранее начальные условия сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} q_{\ell m}^{(0)} = \dot{q}_{\ell m}^{(0)} &= 0, & \text{если } (l; m) \neq (1; 0), \\ q_{10}^{(0)} = q_0, & \dot{q}_{10}^{(0)} = \dot{q}_0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где q_0, \dot{q}_0 - заданные значения. Тогда решения осцилляторных уравнений записываются в виде

$$q_\lambda = \frac{1}{c\lambda} \int_0^t \left(\int_V \rho \beta_z A^{(z)}(d\vec{r}) \right) \sin c\lambda(t-r) dr, \quad (22)$$

(l; m) ≠ (1; 0).

Для основного осциллятора удобно ввести обозначение

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_{10} &= q_{10} + q, \\ \text{где } q_{10} &= \frac{1}{c\lambda_{10}} \int_0^t \left(\int_V \rho \beta_z A_{10}^{(z)}(d\vec{r}) \right) \sin c\lambda_{10}(t-r) dr \\ q &= q_0 \cos c\lambda_{10}t + \frac{\dot{q}_0}{c\lambda_{10}} \sin c\lambda_{10}t \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

выделяя свободные колебания, соответствующие стороннему начальному возбуждению резонатора. Получается (далее $\beta_z = \beta$)

$$\frac{d}{dt} (c M \gamma \beta) = -\frac{1}{c} \int_V \{ (\dot{q}_0 \cos c \lambda_{10} t - c \lambda_{10} q_0 \sin c \lambda_{10} t) A_{\lambda_{10}}^{(z)}(\vec{r}) + \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(z)}(\vec{r}) \int_0^t (\int_V \rho' \beta A_{\lambda}^{(z)}(\vec{r}') (d\vec{r}') \cos c \lambda (t - r) d r + c \nabla \Phi \int \rho(\vec{r} - \vec{Q}) (d\vec{r}') \} \quad (24)$$

В (24) неизвестными являются функции $\beta(t)$, $\rho(t)$, однако они чрезвычайно сложным образом входят в правую часть уравнения. Кроме того, как уже отмечалось выше, для корректного использования уравнения (24) необходимо произвести перенормировку массы.

В общем случае вид распределения плотности заряда, принятый выше, не является релятивистски-инвариантным. Для дальнейшего, учитывая одномерность движения, можно принять частный случай распределения той же формы, которое, однако, является релятивистским:

$$\rho = \rho_0 \delta(z - Q_z(t)) \left[\sigma(r) - \sigma(r-b) \right] \Bigg\};$$

$$j^{(z)} = c \beta \rho$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

Полный заряд

$$S = e N_0 = e \int_V \rho (d\vec{r}) = \pi b^2 \rho_0 \quad (26)$$

Таким образом, ступок представляется бесконечно тонким диском радиуса b , движущимся перпендикулярно своей плоскости. В результате разложения по собственным функциям

$$j_{\ell m}^{(z)} = \int_V j_{\ell m}^{(z)} A_{\ell m}^{(z)} (d\vec{r}) = \left. \begin{aligned} & \frac{4\sqrt{2} S c^2 \beta J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{ab \sqrt{h} \lambda_{\ell m} J_1(\nu_{\ell})} \cos \frac{m \pi}{h} Q, \quad m \neq 0 \\ & j_{\ell 0}^{(z)} = \frac{4 S c^2 \beta J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{ab \sqrt{h} \lambda_{\ell 0} J_1(\nu_{\ell})} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Откуда с учетом (22) получается

$$q_{\ell_m} = \frac{4\sqrt{2} S J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right)}{ab\sqrt{h} \lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \int_0^t \beta(r) \cos\left[\frac{m\pi}{h} Q(r)\right] \sin[c \lambda_{\ell_m} (t-r)] dr, \quad m \neq 0;$$

$$q_{\ell_0} = \frac{4 S J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right)}{ab\sqrt{h} \lambda_{\ell_0}^2 J_1^2(\nu \ell)} \int_0^t \beta(r) \sin[c \lambda_{\ell_0} (t-r)] dr. \quad (28)$$

Формула (7) дает

$$A^z(r, z, t) = \frac{8 S c}{a^2 b h} \sum \frac{\epsilon_m \nu \ell J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \cos \frac{m\pi}{h} z \times$$

$$\times \int_0^t \beta(r) \cos\left[\frac{m\pi}{h} Q(r)\right] \sin[c \lambda_{\ell_m} (t-r)] dr.$$
(29)

Символ ϵ_m означает:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

Кроме этого, в (29) не рассматривается пока стороннее возбуждение резонатора. Наконец, "поперечная часть" электрического поля будет равна:

$$F_z = -\frac{8 S c}{a^2 b h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\nu \ell J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \cos \frac{m\pi z}{h} \int_0^t \beta \cos \frac{m\pi Q}{h} \cos[c \lambda_{\ell_m} (t-r)] dr. \quad (30)$$

Формула (8) с учетом (18) и (25) дает

$$\Phi(r, z, t) = \frac{16 S}{abh} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\lambda_{\ell_m}^2 \nu \ell J_1^2(\nu \ell)} \sin \frac{m\pi}{h} z \sin \frac{m\pi Q(t)}{h}. \quad (31)$$

Откуда "продольная часть" электрического поля

$$E_z \parallel = -\frac{16 \pi S}{abh^2} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{m J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\nu \ell \lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h}. \quad (32)$$

Наконец,

$$H_a = \frac{16 S^2}{b^2 h} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\nu \ell \frac{b}{a})}{\nu \ell^2 \lambda_{\ell m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \sin \frac{2 m \pi Q}{h} \quad (33)$$

III

Громоздкие выпажения (30), (31), (32) трудно исследовать. Однако представляется возможность для некоторых областей пространства внутри объема V произвести суммирование рядов. Двойной ряд (30) представляется в форме

$$F_z^{\perp} = - \frac{8 c S}{a^3 b h} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos \frac{m \pi z}{h} \int_0^t \cos \frac{m \pi Q}{h} \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\nu \ell J_1(\nu \ell \frac{b}{a}) J_0(\nu \ell \frac{r}{a})}{[(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2] J_1^2(\nu \ell)} \times \right. \quad (34)$$

$$\left. \times \cos(c(t-r) \sqrt{(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2}) \right| dr.$$

Ряд, заключенный в фигурной скобке в (34), используя разложение, аналогичное разложению Кнезера-Зоммерфельда^{/18/}, можно записать в виде контурного интеграла

$$\theta_{(m)}^{\perp} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\nu \ell J_1(\nu \ell \frac{b}{a}) J_0(\nu \ell \frac{r}{a})}{[(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2] J_1^2(\nu \ell)} \cos(c(t-r) \sqrt{(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2}) =$$

$$= \int_{\Gamma} C(w) \frac{w \cos [c(t-r) \sqrt{(\frac{w}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2}]}{(\frac{w}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2} dw, \quad (35)$$

где

$$C(w) = \frac{J_1(w \frac{b}{a}) w}{8 J_0(w)} [H_0^{(1)}(w) H_0^{(2)}(w \frac{r}{a}) - H_0^{(2)}(w) H_0^{(1)}(w \frac{r}{a})], \quad (36)$$

■ контур интегрирования в комплексной плоскости w представлен на рис. 1^{x)}.

^{x)} Вычисление соответствующих комплексных интегралов приведено в приложении 1.

Для униформизации многозначной функции $\sqrt{\left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}$ в плоскости w сделаны разрезы, выходящие из точек $\pm \frac{im\pi a}{h}$.

Можно показать, что в области $r-a > c(t-r)$ (37) контур интегрирования Γ можно "растянуть" в контур Γ_1 , состоящий из полукруга бесконечно большого радиуса и мнимой оси, причём интеграл по бесконечной полуокружности исчезает. Функция $G(w)$ является чётной, поэтому подынтегральное выражение в правой части (35) — нечётное. В результате интеграл вдоль мнимой оси сводится только к интегралу по двум обходам около полюсов $\pm \frac{im\pi a}{h}$. После вычисления получается

$$\theta_{(m)}^{\perp} = -\pi i a^2 G\left(i \frac{m\pi a}{h}\right) = -\frac{\pi a^2 m}{2h} \frac{I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \right]. \quad (37)$$

При подстановке (38) в (34) необходимо учесть, что r изменяется в пределах $[0, t]$, поэтому общее выражение для условия (37) должно быть

$$r - b > ct. \quad (38)$$

Окончательное выражение для F_z^{\perp} принимает вид

$$F_z^{\perp} = \frac{8S}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \frac{I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \right]. \quad (39)$$

(В (39) учтено, что $\int_0^t c \beta(r) \cos \frac{m\pi Q}{h} dr = \frac{h}{m\pi} \sin \frac{m\pi Q}{h}$.) (40)

Суммирование ряда (31) по ℓ в области $r > b$ производится точно таким же образом и даёт в результате

$$\Phi = \frac{8S}{\pi b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \frac{I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \right].$$

Откуда $F_z^{\parallel} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ оказывается с точностью до знака совпадающей с выражением (39). Поэтому, если рассматривать в каждый момент времени t E_z^{\perp} и E_z^{\parallel} в общей части областей (38) и (39) (которая в действительности совпадает с самой областью (38)), то суммарное поле в этой части пространства оказывается нулем.

Для того, чтобы упростить выражение (31) для области $r < b$, т.е. для области, в которой находится сам заряд, удобно входящий в это выражение ряд по ℓ представить в форме

$$\theta_{(m)}^{\parallel} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu_{\ell} \frac{r}{a}\right)}{\nu_{\ell} \left[\left(\frac{\nu_{\ell}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \right] J_1^2(\nu_{\ell})} = -\frac{\partial}{\partial b} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a J_0\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu_{\ell} \frac{r}{a}\right)}{\nu_{\ell}^2 \left[\left(\frac{\nu_{\ell}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \right] J_1^2(\nu_{\ell})}. \quad (42)$$

(т.к. исходный ряд равномерно сходится для $0 \leq b < a$, как $\frac{-1}{\rho^2}$, то почленное дифференцирование допустимо). Для перехода в комплексную область и контурного интегрирования вместо $G(w)$ теперь следует выбрать выражение

$$G_1(w) = \frac{J_0\left(w \frac{r}{a}\right)}{R J_0(w)} \left[H_0^{(1)}(w) H_0^{(2)}\left(w \frac{b}{a}\right) - H_0^{(2)}(w) H_0^{(1)}\left(w \frac{b}{a}\right) \right], \quad (43)$$

которое обладает сходными свойствами с $G(w)$. Поэтому

$$\theta_{(m)}^{\parallel} = -a \frac{\partial}{\partial b} \int_{\Gamma_1} G_1(w) \frac{dw}{w \left[\left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \right]}. \quad (44)$$

Дальнейшие преобразования аналогичны предыдущим, следует только ещё при вычислении интеграла по контуру Γ_1 обойти полюс в точке $w=0$. Получается

$$\begin{aligned} \theta_{(m)}^{\parallel} = & a \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{h^2 a^2}{2(m\pi)^2} \ln \frac{b}{2a} + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 h^2}{2(m\pi)^2} \frac{I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi b}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{8S}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{h}{\pi^2 m^2} - \frac{b}{\pi m} \frac{I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \right] \right\} \sin \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h}. \end{aligned} \quad (46)$$

В (46) члены, содержащие цилиндрические функции, быстро убывают с увеличением m (как $\sim e^{-\frac{m\pi a}{h}(b-z)}$), поэтому соответствующая часть ряда легко оценивается, остальная часть ряда суммируется и представляет функцию

$$\Phi_0 = \frac{4S}{b^2} \begin{cases} Q - \frac{Qz}{h} & \text{при } z - Q > 0, \\ z - \frac{Qz}{h} & \text{при } z - Q < 0. \end{cases} \quad (47)$$

Член Φ_0 определяет разрыв поля F_z^{\parallel} при переходе через поверхность густока (диска). Величина разрыва $\frac{4S}{b^2}$ соответствует скачку поля \vec{E}^{\parallel} при пе-

пеходе через поверхность заряженного диска в свободном пространстве (см. /19/).

Поле E_z^{\parallel} в рассматриваемой области, таким образом, будет

$$F_z^{\parallel} = \frac{8S}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \left[K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) + \frac{K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi Q}{h}\right)} \right] \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \quad (48)$$

$$- \frac{4S}{b^2} \times \begin{cases} -\frac{Q}{h} & \text{при } z < Q(t), \\ 1 - \frac{Q}{h} & \text{при } z > Q(t). \end{cases}$$

Последнее выражение можно представить в симметричном виде:

$$F_z^{\parallel} = \begin{cases} \frac{2S}{b^2} + \mathcal{E}_z^{\parallel}(z, r) & \text{при } z < Q, \\ -\frac{2S}{b^2} + \mathcal{E}_z^{\parallel}(z, r) & \text{при } z > Q. \end{cases} \quad (49)$$

где

$$\mathcal{E}_z^{\parallel} = \left(\frac{4SQ}{b^2 h} - \frac{2S}{b^2} \right) + \frac{8S}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \left[\dots \right] \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \quad (50)$$

Вычисление F_z^{\perp} в области, где не выполнено условие (38), не удастся достаточно упростить. Для конкретных случаев приходится оценивать довольно большое количество членов рядов, отбрасывая остальные.

IV

Для окончательного определения движения сгустка согласно формуле (24) необходимо вычислить действующие силы, т.е. привести явное выражение для правой части уравнения (24).

Сила F_z^{\parallel} создаваемая частью E_z^{\parallel} электрического поля, получается по формуле

$$F_z^{\parallel} = \int_V \rho \mathcal{E}_z^{\parallel} (d\vec{r}) = -\frac{4S^2}{b} \left(\frac{1}{2} - \frac{Q(t)}{h} \right) + \quad (52)$$

$$+ \frac{8S^2}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{2m\pi Q}{h} I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \left[K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) + \frac{K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \right].$$

При вычислении (52) в E_z^{\parallel} была отброшена часть, соответствующая скачку "собственного поля".

Прежде чем вычислить силу F_z^L , необходимо произвести перенормировку для того, чтобы исключить собственную электромагнитную массу. Как известно, для этого можно воспользоваться выражением для обобщенного импульса, которое для данного случая имеет вид:

$$\vec{P} = \vec{M} c \vec{\beta} \gamma + \frac{1}{c} \int_V \rho \vec{A}(\vec{r}, t) (d\vec{r}), \quad (53)$$

где через \vec{M} обозначена первоначально не перенормированная масса сгустка. Перенормировка заключается в том, что во втором члене в (53) ковариантным способом выделяется член, имеющий вид $c \vec{\beta} \gamma \cdot \text{const}$, и объединяется с первым членом.

Ввиду трудности последовательно ковариантной трактовки, которая оказывается существенно зависящей от внутренней структуры сгустка, ниже, следуя работе /17/, мы рассматриваем приближенную процедуру, пригодную для слабо релятивистского случая $\gamma \approx 1$.

После интегрирования в (29) два раза по частям получается:

$$A^z(r, z, t) = \frac{8S}{a^2 b h} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{\nu_{\ell} J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a}) J_0(\nu_{\ell} \frac{r}{a})}{\lambda_{\ell m}^4 J_1^2(\nu_{\ell})} \cos \frac{m\pi z}{h} \left\{ \beta(t) \cos \frac{m\pi Q(t)}{h} - \right. \quad (54)$$

$$\left. - \beta_0 \cos(c\lambda_{\ell m} t) - \frac{1}{c\lambda_{\ell m}} \left[\dot{\beta}_0 \sin(c\lambda_{\ell m} t) - \int_0^t \sin[c\lambda_{\ell m}(t-r)] \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right] \right\}.$$

После подстановки (54) в z -ое уравнение системы (53) выделяется член, пропорциональный $\beta(t)$, и соответствующее выражение для P_z принимает вид (при $\gamma \approx 1$)

$$P_z = c\beta \left[\vec{M} + \frac{8S^2}{a^2 b^2 h c^2} \sum_{\ell, m} \frac{J_1^2(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^4} \right] +$$

$$+ \frac{16S^2}{a^2 b^2 h c} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{J_1^2(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^4} \left\{ \delta_{1m} \beta \cos \frac{2\pi m Q}{h} - \cos \frac{m\pi Q}{h} \left[\beta_0 \cos(c\lambda_{\ell m} t) + \right. \right. \quad (55)$$

$$\left. \left. + \frac{\dot{\beta}_0}{c\lambda_{\ell m}} \sin(c\lambda_{\ell m} t) + \frac{1}{c\lambda_{\ell m}} \int_0^t \sin[c\lambda_{\ell m}(t-r)] \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right] \right\},$$

где
$$\delta_{1m} = \begin{cases} 0, & m=0, \\ \frac{1}{2}, & m \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом; величину

$$\bar{M} + \Delta M = \bar{M} + \frac{8S^2}{a^2 b^2 h c^2} \sum_{\ell, m} \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell m}^4} = M \quad (56)$$

можно считать перенормированной массой сгустка. Выражение (56) можно просуммировать по m , тогда

$$\Delta M = \frac{2S^2}{b^2 h a^2 c^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell 0}^4} \left[\frac{h \nu_\ell}{a} \operatorname{cth} \frac{h \nu_\ell}{a} + \frac{\nu_\ell^2 h^2}{a^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{h \nu_\ell}{a}} + 1 \right].$$

ΔM может быть представлена также в виде $\frac{S^2}{bc^2} \mathcal{E}$,

где
$$\mathcal{E} = \frac{2}{b h a^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell 0}^4} [\dots]$$
 — безразмерный множитель.

Таким образом, выражение для перенормировки массы ΔM отличается от обычного $\frac{S^2}{bc^2}$, где b — характерный размер сгустка (см. например, [16]) наличием коэффициента \mathcal{E} , зависящего, кроме размера b , от размера резонатора. Для дальнейшего вычисления поля E_{\perp} в области самого сгустка следует использовать измененную величину Λ^* , а именно, \bar{Q}^* .

$$\bar{Q}^* = \frac{8S}{a^2 b h} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{\nu_\ell J_1(\nu_\ell \frac{b}{a}) J_0(\nu_\ell \frac{r}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell m}^4} \left\{ \delta_{1m} \beta \cos \frac{m\pi(z+Q)}{h} - \cos \frac{m\pi z}{h} \right\} \times \quad (57)$$

$$\times \left[\beta_0 \cos(c \lambda_{\ell m} t) + \frac{\dot{\beta}_0}{c \lambda_{\ell m}} \sin(c \lambda_{\ell m} t) + \frac{1}{c \lambda_{\ell m}} \int_0^t \sin c \lambda_{\ell m} (t-r) \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right],$$

в которой отсутствуют члены, дающие вклад в перенормировку массы. С

помощью (57) получается выражение для силы F_{\perp} :

$$F_{\perp}^* = -\frac{1}{c} \int_{\nu} \rho \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} (dr) = \frac{-16S^2}{a^2 b^2 h c} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell m}^4} \left\{ \delta_{1m} \dot{\beta} \cos \frac{2m\pi Q}{h} - \right. \quad (58)$$

$$\left. - \frac{m\pi}{2h} c \beta^2 \sin \frac{2m\pi Q}{h} + \beta_c c \lambda_{\ell m} \sin(c \lambda_{\ell m} t) \cos \frac{m\pi Q}{h} - \beta_0 \cos(c \lambda_{\ell m} t) \cos \frac{m\pi Q}{h} \right.$$

$$\left. - \cos \frac{m\pi Q}{h} \int_0^t \cos [c \lambda_{\ell m} (t-r)] \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right\}.$$

Как обычно, движение частицы оказывается зависящим от предистории (члены $\dot{\beta}_0, \ddot{\beta}_0$). Предполагая, что до влета в резонатор частица двигалась равномерно, следует считать $\dot{\beta}_0 = \ddot{\beta}_0 = 0$.

После объединения (52), (58) с учётом перенормировки массы получается окончательное выражение для уравнения движения частицы:

$$\frac{d}{dt} (c M \gamma \beta) = F_{\parallel} + F_{\perp} + F_{\perp}^{\text{стор}} \quad (59)$$

пригодное для случая небольших значений γ_0 . Если до влета сгустка, в резонаторе было возбуждено стороннее поле, к (59) необходимо добавить соответствующую этому полю стороннюю силу $F_{\perp}^{\text{стор}}$. Как было принято ранее (см. (21)-(23)), пусть начальное возбуждение резонатора соответствовало основной частоте λ_{10} , причём в момент влета сгустка ($t=0$).

$q_0 = 0$. Величина \dot{q}_0 выражается через первоначально запасённую в резонаторе энергию или через начальную амплитуду поля на оси резонатора E_0 . С учётом того, что на основной частоте поле не зависит от z , для исходного возбуждения имеет место:

$$F_{\perp}(t, r) \Big|_{r=0} = F_0 \cos(c \lambda_{10} t) = -\frac{1}{c} \dot{q}(t) A_{10}^{(n)}(r) \Big|_{r=0}, \quad (60)$$

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{c \lambda_{10}} \sin(c \lambda_{10} t).$$

Откуда

$$\dot{q}_0 = -\frac{c E_0}{A_{10}(0)} = -\frac{a \sqrt{h}}{2} J_1(\nu_1) E_0. \quad (61)$$

С помощью (17), (24), (25) получается окончательное выражение для сторонней силы:

$$F_{\perp}^{\text{стор}} = \frac{2a J_1(\nu_1 \frac{b}{n}) S}{b \nu_1} F_0 \cos(c \lambda_{10} t). \quad (62)$$

Ввиду сложности основного уравнения (59) для случая сравнительно небольшого изменения $\beta(t)$ за время пролета резонатора можно попытаться оценить решение с помощью метода последовательных приближений, принимая за первое приближение "силы самодействия", возбуждаемые сгустком, движущимся с постоянной скоростью $\beta = \beta_0$, затем с помощью (59) оценивать неравномерность движения.

Следует привести некоторые оценки и физические следствия, вытекающие из изложенного выше.

В разделе III было отмечено, что в каждый данный момент времени t с помощью неравенства (38) определяется область $a \leq z < b + ct$, в которой отсутствуют поля, возбуждаемые движущимся сгустком, т.е. в этой области находится только невозмущенное стороннее поле (если оно там заранее было возбуждено). Если допустить, что в течение времени пролета резонатора ускоряемым в нем сгустком скорость сгустка изменилась мало ($\beta = \beta_0$) (при ультрарелятивистском движении это условие практически выполнено), то по истечении времени $t_{\text{кон.}} = \frac{h}{c\beta_0}$ область распространения полей, возбужденных сгустком, ограничивается неравенством

$$0 \leq z \leq b + \frac{h}{\beta_0} \quad (63)$$

(в случае сильно неравномерного движения $t_{\text{кон.}}$ можно оценить только с помощью решения уравнения (59)).

Очевидно, что неравенством (63) определяется и "область взаимодействия" сгустка со сторонним полем, т.е. область, из которой сгусток может отбирать энергию стороннего поля. Энергия стороннего поля, запасенная в остальной части объема резонатора, не успевающая за время пролета сгустка "перетечь" в область взаимодействия, остается неиспользованной.

Можно произвести оценку доли энергии стороннего поля, запасенной в "области взаимодействия" по отношению к той энергии, которую приобрел бы сгусток в идеальном случае при прохождении в статическом электрическом поле F_0 расстояния h .

Энергия, набранная в статическом поле, $W_0 = F_0 h S$. Плотность энергии стороннего поля, запасенной в резонаторе, при принятой начальной фазе $\varphi_0 = 0$, может быть выражена только через $E_z^2|_{t=0}$. Тогда количество энергии в области взаимодействия выразится так:

$$W_{\text{вз}} = \int_V \frac{F_z^2(0, r)}{4\pi} (d\vec{r}) = 2\pi \int_0^h dz \int_0^{b+\frac{h}{\beta_0}} \frac{F_z^2(0, r)}{4\pi} r dr \quad (64)$$

С учетом (60), (61) получается

$$w_{вз} = \frac{F_0^2 h}{4} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)^2 \left\{ J_0^2 \left[\frac{\nu_1}{a} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right) \right] + J_1^2 \left[\frac{\nu_1}{a} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right) \right] \right\}. \quad (85)$$

Или, когда $a \gg \nu_1 \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)$,

$$w_{вз} \approx \frac{F_0^2 h}{4} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)^2 \quad (86)$$

Откуда

$$\xi = \frac{w_{вз}}{w_0} = \frac{F_0}{4S} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)^2 \quad (87)$$

Формула (88) дает оценку, показывающую общую возможность набора энергии сгустком в резонаторе, т.к. ясно, что из области взаимодействия энергия стороннего поля отбирается сгустком не полностью. Для уточнения формулы (87) можно оценить еще количество энергии \bar{w} стороннего поля, "вытекающей" или, наоборот (в зависимости от фазовых соотношений), "вытекающей" из области взаимодействия за время пролета сгустка:

$$\bar{w} = -2\pi a h \int_0^{t_{\text{кон}}} \frac{c}{4\pi} \{ [\bar{F}, \bar{H}] \cdot \vec{e}_r \} dt, \quad t_{\text{кон}} \approx \frac{h}{\beta_0 c}.$$

На основной частоте λ_{10} с учетом (7), (17), (61) получается:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= -\frac{F_0^2 a^2 h}{8\nu_1} J_0 \left(\nu_1 \frac{b + \frac{h}{\beta_0}}{a} \right) J_1 \left(\nu_1 \frac{b + \frac{h}{\beta_0}}{a} \right) \left[1 - \cos \frac{2\nu_1 h}{a\beta_0} \right] \approx \\ &= -\frac{F_0^2 h^3 \nu_1^2}{4a\beta_0^2} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right); \end{aligned}$$

знак минус показывает, что в рассматриваемом случае (влет сгустка в момент максимума поля $F_z^{\text{стор.}}$) запасенная в области взаимодействия энергия стороннего поля уменьшается за счет "перетекания" из этой области в остальную часть объема резонатора в течение всего времени пролета сгустка.

С этой поправкой для ξ получается формула

$$\xi = \frac{w_{вз} + \bar{w}}{w_0} = \frac{F_0}{4S} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right) \left[b + \frac{h}{\beta_0} - \frac{h^2 \nu_1^2}{a\beta_0^2} \right]. \quad (88)$$

Можно привести численные примеры для ξ .

Пусть $a = 100$ см, $b = 3$ м, $\beta_0 = 0,5$, $S = 10$ е¹⁸.

Тогда получаем следующую таблицу значений:

Таблица 1

ξ	F_0 кв/см	
	100	150
h см 2	0,82	1,23
5	2,61	3,91

Табл. 1 показывает, что величина пролетного промежутка $h = 2$ см явно недостаточна для обеспечения предполагаемого набора энергии W_0 , даже при напряженности поля 150 кв/см. Как видно из (68), квадратичная зависимость от длины пролета (ширины резонатора) более сильно сказывается на наборе энергии, чем даже увеличение начальной напряженности поля в резонаторе, конечно, при учёте того, что время пролета \ll периода основного колебания в резонаторе. Таким образом, более выгодно ускорять на длинных волнах, пропорционально увеличивая размеры a и h резонатора с тем, чтобы среднее отношение времени пролета $T_{пр}$ к четверти периода основного колебания резонатора сильно не изменялось, т.е.

$$\frac{4 T_{пр}}{T_0} = \frac{2 h v_1}{\pi a \beta_0} = const \ll 1. \quad (69)$$

Количественно, при относительно небольшом изменении $\beta(t)$ за время пролета, оценка набора энергии сгустком получается из рассмотрения первого приближения в (59).

После подстановки в (52), (58) и (59) соотношений

$$\beta = \beta_0, \quad Q(t) = c \beta_0 t$$

(59) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c M \gamma \beta) = & - \frac{4 S^2}{b^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{c \beta_0 t}{h} \right) + \frac{8 S^2}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \left(\frac{2 \pi m}{h} c \beta_0 t \right) I_1 \left(\frac{m \pi b}{h} \right) \times \\ & \times \left[K_1 \left(\frac{m \pi b}{h} \right) + \frac{K_0 \left(\frac{m \pi a}{h} \right) I_1 \left(\frac{m \pi b}{h} \right)}{I_0 \left(\frac{m \pi a}{h} \right)} \right] + \frac{16 S^2 \beta_0}{a^2 b^2 h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_1^2 \left(\nu_{\ell} \frac{b}{a} \right)}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell}^2 \ell_m^2 \lambda_{\ell_0}^2(\gamma_0)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \cos\left(\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct\right) \left\{ \frac{m\pi}{h} \beta_0 \sin\left(\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct\right) - \lambda_{\ell m} \sin(c \lambda_{\ell m} t) \right\} + \\ & + \frac{2\pi S J_1\left(\nu_1 \frac{b}{a}\right)}{b \nu_1} E_0 \cos(c \lambda_{10} t), \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\lambda_{\ell m}(\gamma_0) = \sqrt{\left(\frac{\nu_{\ell}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h \gamma_0}\right)^2}. \quad (71)$$

Правая часть (70) - известная функция времени, поэтому уравнение легко интегрируется.

$$\text{С учётом соотношения } \beta_0 = \frac{\sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{\gamma_0},$$

$$M = N_0 m_0, \quad S = N_0 e, \quad (72)$$

где N_0 - число частиц сгустка, m_0 - масса покоя электрона после интегрирования, получается:

$$\begin{aligned} c N_0 m_0 (\sqrt{\gamma^2 - 1} - \sqrt{\gamma_0^2 - 1}) &= -\frac{4N_0^2 e^2}{b^2} \left(1 - \frac{c \beta_0 t}{h}\right) \frac{t}{2} + \frac{4N_0^2 e^2 h}{\pi^2 b^2 c \beta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \times \\ & \times \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{h} c \beta_0 t\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \left[K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) + \frac{K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \right] \right] + \\ & + \frac{16N_0^2 e^2 \beta_0}{a^2 b^2 hc} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_1^2\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right)}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^2 \lambda_{\ell m}^2(\gamma_0)} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \cos\frac{2\pi m}{h} \beta_0 ct\right) - \right. \\ & - \left[\frac{\lambda_{\ell m}^2}{\lambda_{\ell m}^2(\gamma_0)} \left(1 - \cos(c \lambda_{\ell m} t)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct\right) - \frac{m\pi \beta_0 \lambda_{\ell m}}{h \lambda_{\ell m}^2(\gamma_0)} \sin(c \lambda_{\ell m} t) \sin\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct \right] \right\} \\ & + \frac{2\pi^2 S E_0 J_1\left(\nu_1 \frac{b}{a}\right)}{c \nu_1^2 b} \sin c \lambda_{10} t. \end{aligned} \quad (73)$$

В качестве единицы времени в (73) удобно выбрать промежуток $T_{\text{пр}} = \frac{h}{\beta_0 c}$, примерно равный времени пролета, тогда после введения безразмерного времени

$$r = \frac{t}{T_{\text{пр}}} \quad (74)$$

получается следующее уравнение, записанное уже в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} - \frac{2N_0 h r_0}{b^2 \beta_0} (1-r)r + \frac{4N_0 b r_0}{\pi^2 b^2 \beta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} (1 - \cos 2m\pi r) I\left\{\frac{m\pi b}{h}\right\} [\dots] + \\ + \frac{16N_0 r_0 \beta_0}{a^2 b^2 h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_1^2\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right)}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^2 \lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0)} \left\{ \frac{1}{4} (1 - \cos 2\pi m r) - \left[\frac{\lambda_{\ell m}^2}{\lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0)} (1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m\pi r \cos(c \lambda_{\ell m} r)) - \frac{m\pi \beta_0 \lambda_{\ell m}}{h \lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0)} \sin(c \lambda_{\ell m} r) \sin m\pi r \right] \right\} + \\ + \frac{2a^2 E_0 r_0 J_1\left(\nu_1 \frac{b}{a}\right)}{\nu_1^2 b e} \sin \frac{\lambda_{10} h}{\beta_0} r \quad (75) \end{aligned}$$

где $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ — классический радиус электрона.

Далее с помощью (73) или (75) находим зависимость

$$Q(t) = c \int_0^t \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} dt \quad \text{или} \quad Q(r) = \frac{h}{\beta_0} \int_0^r \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} dr \quad (76)$$

и момент времени $t_{\text{кон}}$, соответствующий выходу сгустка из резонатора $Q(t_{\text{кон}}) = h$. Таким образом находим первое приближение $Q = Q_1(t)$, $\beta = \beta_1(t)$.

При конкретном расчёте необходимо упростить выражения (73), (75), ограничиваясь только наиболее существенными членами рядов. Как видно, однако, в общем случае трудно ожидать быстрой сходимости рядов, поэтому необходимы дополнительные физические основания для введения упрощений.

Прежде всего необходимо учесть, что в реальном резонаторе имеются входное и выходное отверстия, радиус которых $b_1 \geq b$. Можно предполагать что из-за этих отверстий ограничивается допустимая неоднородность поля в радиальном направлении. Оценку можно выполнить следующим образом. Фурье-разложения потенциалов \vec{A}, Φ движущегося в свободном пространстве сгустка (плотность зарядов и ток даны формулами (25)) легко представить в форме

$$(\vec{A} = \{0, 0, A_z\}, \quad A_z = \beta_0 \Phi),$$

$$(\vec{A}_\omega)_z = \frac{2\rho_0 b}{c} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa r) J_1(\kappa b)}{(\frac{\omega}{c\beta_0})^2 (1 - \beta_0^2) + \kappa^2} d\kappa = \frac{2\rho_0 b}{c\Omega} I_1(b\Omega) K_0(r\Omega),$$

$$r > b, \quad \Omega^2 = (\frac{\omega}{c\beta_0})^2 (1 - \beta_0^2), \quad \Phi_\omega = \frac{1}{\beta_0} (\vec{A}_\omega)_z. \quad (77)$$

Отсюда

$$(\vec{E}_\omega)_r = \frac{2\rho_0 b}{\beta_0 c} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} I_1(b\Omega) K_1(r\Omega) + i\frac{\omega}{c} \frac{2\rho_0 b}{c\Omega} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} I_1(b\Omega) K_0(r\Omega),$$

$$(\vec{H}_\omega)_\phi = \frac{2\rho_0 b}{c} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} I_1(b\Omega) K_1(r\Omega) \quad (78)$$

Соответствующие фурье-компоненты поверхностных токов электрического и "магнитного", возбужденных полем (78) и текущих по торцовым стенкам резонатора для достаточно больших ω , могут быть оценены по формулам

$$\left. \begin{aligned} j_\omega^- &= -\frac{c}{4\pi} [\vec{n}^+, \vec{H}_\omega^+] = -\frac{c}{4\pi} \vec{e}_r \cdot (\vec{H}_\omega)_\phi \\ j_\omega^* &= \frac{c}{4\pi} [\vec{n}^+, \vec{E}_\omega^+] = -\frac{c}{4\pi} \vec{e}_\phi \cdot (\vec{E}_\omega)_r \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

($\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат, $\vec{n}^+ = \vec{e}_z$).

Токи возбуждают вторичное поле в резонаторе: Естественно, что из всей непрерывной области частот ω главное значение имеют те, которые близки к собственным частотам ω_{lm} . При $m = 0$ получается

соответствие $\omega = \frac{\nu \ell}{a} c$ и

$$\Omega^2 = \left(\frac{\nu \ell}{a \beta_0} \right)^2 (1 - \beta_0^2). \quad (80)$$

При фиксированном β_0 и достаточно больших ℓ , так, что $b \Omega \geq 3$, можно использовать асимптотические выражения для I_1, K_0, K_1 , тогда токи (79), а следовательно, и возбуждаемое вторичное поле оказываются пропорциональными величине

$$= \frac{a \beta_0}{2 \nu \ell \sqrt{1 - \beta_0^2}} c - \frac{\nu \ell}{a \beta_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} (r - b) \quad (81)$$

Таким образом, с учётом того, что $\nu \ell = \pi \ell$, получается экспоненциальное затухание с увеличением номера "гармоники" ℓ . В качестве r в (81) следует взять величину $\geq b_1$. Считая достаточным десятикратное уменьшение амплитудного значения величин, можно принять, что должно быть

$$\frac{\pi \ell}{a \beta_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} (b_1 - b) > 2,$$

откуда получается, что максимальное число "радиальных гармоник", дающих существенный вклад в возбуждаемое сгустком поле, можно оценить числом

$$\ell_{\max} = \frac{2 a \beta_0}{\pi (b_1 - b) \sqrt{1 - \beta_0^2}} \quad (82)$$

Как видно из предыдущего, при получении (82) возбуждаемое сгустком вторичное поле оценивалось как дифракционное поле с помощью принципа физической оптики. Известно, что последний применим и даёт удовлетворительное согласие с опытом, если $\frac{2\pi b_1}{\lambda} \geq 3$, см. /20/ (b_1 - радиус отверстия в экране, λ - длина волны). Поэтому оценка (82) справедлива, если одновременно с ней выполняется неравенство $\ell_{\max} \geq \frac{3a}{\pi b_1}$

При $m \neq 0$ величина Ω получается значительно большей (если $a \gg h$) и амплитуды соответствующих гармоник должны быть сильно подавленными.

Кроме указанных соображений относительно возможной неоднородности поля в радиальном направлении, необходимо учесть, что реальный сгусток имеет конечный размер в продольном направлении. Таким образом, волны, создающие неоднородность поля в этом направлении на расстояниях, сравнимых по крайней мере с несколькими размерами сгустка, не могут возбуждаться когерентно и частично гасят друг друга. Это обстоятельство особенно существенно в ультрарелятивистском пределе, когда излучение в основном направлено вперед, и в условии когерентности должны входить главным образом продольные размеры сгустка, см. /21/.

VI

Ниже приводятся конкретные оценки для некоторых случаев ускорения сгустка в резонаторе. Основные параметры резонатора и сгустка такие же, какие были приняты при расчёте табл. 1 ($a = 100$ см; $h = 5$ см; $b_1 = 4.5$ см; $b = 3$ см; $S = 10^{13}$ е; $\beta_0 = 0.5$). Расчёты проводились по формулам (75), (78) после ряда упрощений в формуле (75) с учётом сказанного выше относительно допустимого вклада разных гармоник в возбуждаемое сгустком поле. Дополнительно можно заметить ещё следующее. Численное сравнение амплитуд для гармоник с $m = 0$ и с $m \neq 0$ показывает, что последние значительно меньше ^{х)}. Действительно, выражение для E_z при $\beta = \beta_0 = \text{const}$ (после замены t через τ) получается из (30):

$$E_z = -\frac{16S\beta_0}{a^2bh} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\nu_{\ell} J_0(\nu_{\ell} \frac{r}{a}) J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{\lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0) J_1^2(\nu_{\ell})} \cos \frac{m\pi z}{h} \left\{ \lambda_{\ell m} \sin(\lambda_{\ell m} \frac{hr}{\beta}) - \frac{m\pi\beta_0}{h} \sin \lambda_{\ell m} r \right\} \quad (83)$$

Отсюда для небольших значений ℓ , таких, что $\frac{\nu_{\ell}}{a} \ll 1$, получается

$$\frac{E_{\ell m}}{E_{\ell 0}} \Big|_{z=0} = \frac{2(\frac{\nu_{\ell}}{a})^2}{(\frac{m\pi}{h})^2}$$

Большие значения ℓ в (83) можно не учитывать, так как, как сказано выше, в реальных условиях соответствующие гармоники оказываются слабо

х) Подобные оценки проводились также Котовым и Колпаковым.

выраженными. Для крайних значений ℓ (в смысле формулы (82)), можно получить оценку, сравнивая E_{ℓ_0} и $E_{\ell_{10}}$ при $\ell = \ell_{\max}$. Получается отношение

$$\left. \frac{E_{\ell_0}}{E_{\ell_{10}}} \right|_{\substack{\ell=0 \\ m=0}} \approx \frac{a^2 J_1(\nu \frac{b}{a})}{bh} \left[\frac{J_1(\nu_1)}{\nu_1 J_1^2(\nu_1)} \right]^2 \frac{(b_1-b)^2}{bh} \frac{(1-\beta_0^2)}{16 J_1^2} \frac{J_1 \left[\frac{2b\beta_0}{(b_1-b)\sqrt{1-\beta_0^2}} \right]}{\left[\frac{2a\beta_0}{(b_1-b)\sqrt{1-\beta_0^2}} \right]}$$

которое практически сохраняет постоянную величину вплоть до $\ell = \ell_{\max}$, а затем убывает. Наконец, отношение $(E_{\ell_m} / E_{\ell_0})$ при $\ell = \ell_{\max}$ имеет порядок $\approx \gamma_0^2 \left(\frac{2h\beta_0}{m(b_1-b)\sqrt{1-\beta_0^2}} \right)^2$, и таким образом для рассматриваемой области значений γ_0 оказываются сравнимыми только для двух-трех низших по m гармоник.

В результате таких оценок влияния членов, вошедших в (70), (73), (75) за счёт составляющих поля E_{\perp} , при дальнейших расчётах в (75) учитывались лишь члены с $m=0$, для значений $\ell = 1, 2, \dots, 20$. Кроме того, оценка влияния членов, вошедших в (75) за счёт составляющей поля E_{\parallel} , показала, что существенное значение могут иметь лишь первый (не вошедший под знак суммы) член и один-два члена суммы.

Результаты проведенных после этих упрощений расчётов представлены в таблице 2, где даны начальные и конечные значения величины γ , получившиеся после последовательного прохождения сгустком трех одинаковых резонаторов с амплитудным значением сгоронного поля $E_0 = 150 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$ (параметры те же, что и для табл.1).

Таблица 2

γ_0	$\gamma_{\text{кон}}$	$(\gamma_{\text{кон}})_{\text{ид}}$	Δ
1,502	1,891	2,966	26%
1,891	2,184	3,351	20%
2,184	2,438	3,648	17,5%

В таблице 2 приведены также конечные значения γ , вычисленные по обычной формуле

$$(\gamma_{\text{кон}})_{\text{ид}} = \gamma_0 + \frac{E_0 e h}{m_0 c^2}$$

и для сравнения дана относительная величина Δ , где

$$\Delta = \frac{\gamma_{\text{кон.}} - \gamma_0}{(\gamma_{\text{кон.}})_{\text{ид.}} - \gamma_0} \quad (84)$$

Сделанные численные расчёты можно уточнить с помощью второго приближения. Соответствующие расчётные формулы получаются из (52), (58), (59), (62) следующим образом. Так же, как и для первого приближения в выражении (58), для F_z учитываются лишь члены с $m = 0, 1 \leq \ell \leq 20$; в выражении (52) для F_z учитываются первый член и один член суммы при $m = -1$. Далее, в правую часть (59) вместо $Q(t)$, $\gamma(t)$, $\beta(t)$ и т.д. подставляются значения $Q_1(t)$, $\gamma_1(t)$, $\beta_1(t)$ и т.д., полученные после расчётов по первому приближению (см. формулу (75) с соответствующим сокращением числа членов). Пусть через $\gamma_2(r)$ ($r = \frac{c\beta_0}{h}$; безразмерное время) обозначено второе приближение. Тогда для разности

$$\Delta\gamma(r) = \gamma_1(r) - \gamma_2(r) \quad (85)$$

в предположении, что $\Delta\gamma(r)$ - мало, получается формула

$$\begin{aligned} \Delta\gamma(r) = & \frac{4r_0 h N_0}{b^2} \frac{\beta_1(r)}{\beta_0} \left\{ \frac{r^2}{8} + \frac{1}{2\pi} I_1\left(\frac{\pi b}{h}\right) K_1\left(\frac{\pi b}{h}\right) \left[r \sin 2\pi r + \frac{\cos 2\pi r - 1}{2\pi} \right. \right. \\ & - \frac{1}{\beta_0} \int_0^r \beta_1(\xi) (\sin 2\pi r - \sin 2\pi \xi) d\xi \left. \right\} + \frac{4a^2}{h^2} \beta_0 \sum_{\ell=1}^{20} \frac{J_1^2(\nu \ell \frac{b}{a})}{\nu^4 J_1^2(\nu \ell)} [\beta_1(r) - \\ & - \beta_0 \cos \frac{\nu \ell h}{a \beta_0} r - \frac{\nu \ell h}{a \beta_0} \int_0^r \beta_1(\xi) \sin \left[\frac{\nu \ell h}{a \beta_0} (r - \xi) \right] d\xi \left. \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

По формуле (79) численным интегрированием на машине БЭСМ-3 был выполнен расчёт при тех же значениях параметров, что и для табл. 1,2. В качестве первого приближения бралось решение, соответствующее значению

$\gamma_0 = 1,891$ таблицы 2. На рис. 2 представлены графики величин

$$\gamma_1(r), \quad \gamma_2(r) = \gamma_1(r) + \Delta\gamma(r).$$

Как видно из рис. 2, учёт второго приближения даёт дополнительное уменьшение полного набора энергии сгустком ещё на величину

$\Delta\gamma \leq \frac{1}{3} [(\gamma_1)_{\text{кон.}} - (\gamma_1)_0]$, где $(\gamma_1)_{\text{кон.}}$, согласно табл. 2, равно 2,184. Полученная из расчёта $\Delta\gamma(r)$ по порядку величины $\leq 0,1$ и, таким образом, оказывается приемлемой для тех оценок, с помощью

которых получена формула (86). На рис. 3 дополнительно к предыдущему для того же случая представлены электрические поля, действующие на в каждый данный момент времени, пока сгусток находится внутри полости. Поля рассчитаны по первому приближению, т.е. когда скорость сгустка предполагается постоянной. E_0 - внешнее поле в резонаторе,

E_1 - электрическая компонента поперечного поля, возбуждаемого сгустком, E_2 - статическое поле, наводимое сгустком, E - суммарная величина всех трех полей.

VII.

В разделах V, VI были рассмотрены случаи ускорения в слабо релятивистской области, когда для определения потерь энергии было ещё существенным изменение величины β , т.е. когда ток, создаваемый сгустком, ещё не доходил до "насыщения" при $\beta \approx 1$. Представляет интерес получение асимптотических оценок в другой области - ультрарелятивистской, когда $\beta \approx 1$ и происходит лишь увеличение $\gamma(t)$.

Из формулы (9) с учётом (28) для энергии поля излучения получается выражение^{x)}

$$\begin{aligned}
 H_{(2)} = \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (\dot{q}_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \epsilon_m \frac{16 S^2 J_1^2 \left(\nu_{\ell} \frac{b}{a} \right) c^2}{a^2 b^2 h J_1^2 \left(\nu_{\ell} \right) \lambda_{\ell m}^2} \times \\
 \times \left\{ \left[\int_0^t \beta \cos \left(c \lambda_{\ell m} (t-r) \right) \cos \frac{m \pi Q}{h} dr \right]^2 + \left[\int_0^t \beta \sin \left(c \lambda_{\ell m} (t-r) \right) \cos \frac{m \pi Q}{h} dr \right]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{37}$$

При $\gamma \gg 1$, естественно, рассматривают закон движения $\beta = \beta_0 = \text{const}$. Тогда для момента времени $t = t_{\text{кон}} = \frac{h}{\beta_0 c}$ (момент времени вылета сгустка) значение $H_{(2)}$ будет (см. также [11])

x) При $\beta(t) \neq \text{const}$ в $H_{(2)}$ входит и "поперечная собственная энергия".

$$H_{(2)} = \frac{64 S^2 \beta_0^2 a^2}{b^2 h} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\epsilon_m J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) [\nu_\ell^2 + (\frac{m\pi a}{h\gamma_0})^2]^2} \times$$

$$\begin{cases} \sin^2 \left(\frac{h}{2\beta_0 a} \sqrt{\nu_\ell^2 + \left(\frac{m\pi a}{h}\right)^2} \right), & m \text{ - чётное} \\ \cos^2 \left(\frac{h}{2\beta_0 a} \sqrt{\nu_\ell^2 + \left(\frac{m\pi a}{h}\right)^2} \right), & m \text{ - нечётное} \end{cases} \quad (88)$$

Величина γ_0 сложным образом входит в (88), и непосредственная строгая асимптотическая оценка этого выражения при $\gamma_0 \rightarrow \infty$ затруднительна. Далее будет дана оценка для случая, когда радиус резонатора $a \rightarrow \infty$, т.е. система выражается в совокупность двух параллельных плоскостей, находящихся под одним и тем же нулевым потенциалом.

Переход к пределу $a \rightarrow \infty$ в (81) делается обычным способом^{/23/}; вводится обозначение $\frac{\nu_\ell}{a} = k$, далее $\Delta k = \frac{\pi}{a}$, $J_1^2(\nu_\ell) = \frac{2}{\pi a k}$ при больших ℓ . Получается^{x)}

$$H_{(2)} = \frac{32 S^2 \beta_0^2}{b^2 h} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\kappa b) k dk}{[k^2 + (\frac{m\pi}{h\gamma_0})^2]^2} \begin{cases} \sin^2 \left(\frac{h}{2\beta_0} \sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \right), & m \text{ - чётное} \\ \cos^2 \left(\frac{h}{2\beta_0} \sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \right), & m \text{ - нечётное} \end{cases} \quad (89)$$

(89) может быть преобразовано:

$$H_{(2)} = \frac{32 S^2 \beta_0^2}{b^2 h} \int_0^{\infty} J_1^2(kb) \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^m \cos \left(\frac{h}{\beta_0} \sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \right)}{[k^2 + \left(\frac{m\pi}{h\gamma_0}\right)^2]^2} \right\} k dk, \quad (90)$$

x) Такой же результат получается при непосредственном решении электродинамической задачи путём разложения по собственным функциям, имеющим непрерывную зависимость от спектрального параметра.

Такое преобразование допустимо, т.к. ряд под знаком интеграла сходится равномерно относительно переменной k .

Путём использования формулы суммирования Пуассона (см. приложение II) заключённый в (90) в фигурные скобки ряд, сумма которого далее обозначается через θ , может быть преобразован к виду:

$$\theta = \left(\frac{h\gamma_0}{\pi} \right) \left\{ - \frac{\pi^2}{2\kappa^2\gamma_0^2} e^{-2\pi\kappa\gamma_0} + 4 \int_0^\infty \frac{\cos \pi z \left[\cos \pi z - \cos \left(\frac{\pi}{\beta_0} \sqrt{\kappa^2 + z^2} \right) \right]}{(z^2 + \kappa^2\gamma_0^2)^2} dz \right\}, \quad (91)$$

где $\kappa = \frac{kh}{\pi}$.

В результате, после перехода от k к переменной κ и далее введения новых координат

$$z = R \cos \phi,$$

$$\kappa = R \sin \phi$$

получается

$$\begin{aligned} H_{(2)} = & \frac{32 S^2 \beta_0^2}{b^2 h} \left\{ - 2 h^2 \gamma_0^2 \int_0^\infty J_1^2 \left(\pi \frac{b}{h} \kappa \right) \frac{e^{-2\pi\gamma_0 \kappa}}{\kappa} d\kappa + \right. \\ & \left. + \frac{4 h^2 \gamma_0^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty J_1^2 \left(\frac{\pi b}{h} R \sin \phi \right) \frac{\cos(\pi R \cos \phi) \left[\cos(\pi R \cos \phi) - \cos \frac{\pi R}{\beta_0} \right]}{R^2 (1 + \gamma_0^2 \sin^2 \phi)^2} \sin \phi dR d\phi \right\}. \quad (92) \end{aligned}$$

Асимптотическое вычисление при $\gamma_0 \rightarrow \infty$ первого члена в фигурной скобке в (92) путём двукратного интегрирования по частям дает

$$= -2h^2 \gamma_0^2 \left(\frac{\pi b}{h} \right)^2 \frac{1}{\gamma_0^2} = -2\pi^2 b^2 - \text{постоянную величину.}$$

Асимптотическая оценка двойного интеграла (см. приложение II) показывает, что он растёт с увеличением γ_0 не быстрее, чем $\ln \gamma_0$.

В заключение авторы выражают благодарность Б.М.Болотовскому за ряд ценных указаний, в частности, в вопросе о подходе к оценке влияния отверстий в резонаторе. Авторы также благодарны товарищам по работе М.Л.Иовновичу, О.А.Коллакову, А.Б.Кузнецову, Н.Б.Рубину за ценные

обсуждения и сотрудникам расчетной группы И.А.Золиной, М.Г.Нехаевой, И.И.Озеровой за выполнение трудоёмких численных расчётов.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Вычет функции $G(w)$ в каждом из полюсов (полюсами являются нули ν_ℓ функции $J_0(w)$) равняется^{x)}

$$g_\ell = \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right) J_1\left(\nu_\ell \frac{b}{a}\right)}{2\pi i J_1^2(\nu_\ell)}. \quad (1.1)$$

Поэтому интеграл вокруг полюса $w = \nu_\ell$ от функции $G(w)F(w)$, где $F(w)$ голоморфна в окрестности ν_ℓ , будет равен

$$L_\ell = \int_{\circ \ell} G(w)F(w)dw = \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right) J_1\left(\nu_\ell \frac{b}{a}\right)}{J_1^2(\nu_\ell)} F(\nu_\ell). \quad (1.2)$$

Необходимо ещё отметить, что $G(w)$ не имеет особенности в точке $w = 0$. Действительно, с учётом разложения

$$N_0(w) = \frac{2}{\pi} J_0(w) \ln \frac{Cw}{2} + 2J_2(w) + \dots \quad (1.3)$$

находим

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(w)H_0^{(2)}\left(w \frac{r}{a}\right) - H_0^{(2)}(w)H_0^{(1)}\left(w \frac{r}{a}\right) &= 2i \left[N_0(w) J_0\left(w \frac{r}{a}\right) - N_0\left(w \frac{r}{a}\right) J_0(w) \right] = \\ &= -\frac{4i}{\pi} \ln \frac{r}{2a} J_0\left(w \frac{r}{a}\right) + O(w), \end{aligned} \quad (1.4)$$

x) При вычислении вычетов удобно воспользоваться соотношением

$$N_0(\nu_\ell) = \frac{2}{\pi \nu_\ell J_1(\nu_\ell)} \quad (\text{см. } /22/).$$

т.е. разложение главного фактора начинается с постоянного члена, поэтому интеграл около точки $w = 0$ исчезает.

Интеграл по контуру, представленному на рис. 4, охватывающему все полюсы ν_ℓ , равен нулю, откуда

$$\int_{\Gamma} G(w)F(w)dw = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\sigma_\ell} (\dots) dw = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_\ell \frac{r}{a})J_1(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell)} F(\nu_\ell), \quad (1.5)$$

где Γ - контур Γ (без обходов c_1, c_2, \dots), проходимый против часовой стрелки

ПРИЛОЖЕНИЕ II

1. Для преобразования ряда в (90), который после вынесения за скобки величины $(\frac{h\gamma_0}{\pi})^4$ и введения обозначения $\kappa = \frac{kh}{\pi}$ (11.1) принимает вид

$$\theta = \left(\frac{h\gamma_0}{\pi}\right)^4 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^m \cos\left(\frac{\pi}{\beta_0} \sqrt{\kappa^2 + m^2}\right)}{(\kappa^2 \gamma_0^2 + m^2)^2}, \quad (11.2)$$

используется формула суммирования Пуассона

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \phi(\alpha), \quad \text{где} \quad \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i2\pi\alpha z} dz.$$

В данном случае

$$f(z) = \left(\frac{h\gamma_0}{\pi}\right)^4 \frac{1 - e^{i\pi z} \cos\left(\frac{\pi}{\beta_0} \sqrt{\kappa^2 + z^2}\right)}{(\kappa^2 \gamma_0^2 + z^2)^2}, \quad (11.3)$$

поэтому

$$\phi(\alpha) = \left(\frac{h\gamma_0}{\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\pi z} \cos\left(\frac{\pi}{\beta_0} \sqrt{\kappa^2 + z^2}\right)}{(\kappa^2 \gamma_0^2 + z^2)^2} e^{i2\pi\alpha z} dz. \quad (11.4)$$

Интегралы (11.4) легко вычисляются с помощью контурного интегрирования для всех нужных значений a , исключая значения $a=0$; $a=-1$.
 Для значений $a \geq 1$ контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости, вклад дает обход полюса 2-го порядка около точки $z = i \kappa \gamma_0$; для значений $a \leq -2$ контур замыкается в нижней полуплоскости и вклад дает обход около $z = -i \kappa \gamma_0$. Результат вычисления части суммы:

$$\sum_{a=-\infty}^{a=-2} \phi(a) + \sum_{a=1}^{\infty} \phi(a) = (-2\pi i) \sum_{a=-\infty}^{a=-2} \frac{d g_1(z, a)}{dz} \Big|_{z = -i \gamma_0 \kappa} + 2\pi i \sum_{a=1}^{\infty} \frac{d g(z, a)}{dz} \Big|_{z = i \gamma_0 \kappa} = -\frac{\pi^2}{2 \kappa^2 \gamma_0^2} e^{-2\pi \gamma_0 \kappa} \left(\frac{h \gamma_0}{\pi} \right)^4, \quad (11.5)$$

где через $g(z, a)$, $g_1(z, a)$ обозначены соответственно голоморфные части подинтегрального выражения в окрестности особых точек.

Сумма двух оставшихся членов, $\phi(0)$ и $\phi(-1)$, после изменения интервала интегрирования $(-\infty, \infty)$ на интервал $(0, \infty)$ дает второй член формулы (84).

2. Асимптотическая оценка двойного интеграла в (92):

$$R = \gamma_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} J_1^2 \left(\frac{\pi b}{h} R \sin \phi \right) \frac{\cos(\pi R \cos \phi) - \cos\left(\frac{\pi}{\beta_0} R\right)}{R^2 (1 + \gamma_0^2 \sin^2 \phi)^2} \cos(\pi R \cos \phi) \sin \phi dR d\phi \quad (11.6)$$

при $\gamma_0 \rightarrow \infty$.

После преобразования

$$\cos(\pi R \cos \phi) - \cos\left(\frac{\pi}{\beta_0} R\right) = 2 \sin\left[\frac{\pi R}{2\beta_0} (1 - \beta_0 \cos \phi)\right] \sin\left[\frac{\pi R}{2\beta_0} (1 + \beta_0 \cos \phi)\right],$$

учитывая, что при $x > 0$ всегда $\sin x < x$, можно написать,

$$\left| \left[\cos(\pi R \cos \phi) - \cos\left(\frac{\pi}{\beta_0} R\right) \right] \cos(\pi R \cos \phi) \right| < \frac{\pi R}{\beta_0} (1 - \beta_0 \cos \phi).$$

Отсюда получаем

$$B \leq \frac{\pi}{\beta_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2 \left(\frac{\pi b}{h} R \sin \phi \right) (1 - \beta_0 \cos \phi)}{\left(\frac{1}{\gamma_0^2} + \sin^2 \phi \right)^2} \frac{\sin \phi}{R} dR d\phi. \quad (11.7)$$

Т.к.

$$\int_0^{\infty} J_1^2 \left(\frac{\pi b}{h} R \sin \phi \right) \frac{dR}{R} = \frac{1}{2} \quad (\text{см. } /22/),$$

то

$$B \leq \frac{\pi}{\beta_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \beta_0 \cos \phi}{\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \cos^2 \phi \right)^2} \sin \phi d\phi; \quad (11.8)$$

этот интеграл легко вычисляется и при $\gamma_0 \rightarrow \infty$, его разложение имеет вид

$$C_1 + C_2 \ln \gamma_0 + C_3 \frac{1}{\gamma_0^2} + \dots, \quad (11.9)$$

где C_1, C_2, \dots - постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория и расчёт линейных ускорителей, ФТИ АН УССР. Сборник статей, Госатомиздат, 1962.
2. Э.Л.Бурштейн, Г.В.Вознесенской. О влиянии нагрузки пучком на характеристики линейного электронного ускорителя. Атомная энергия, 13, 446 (1962).
3. И.М.Капчинский. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях, Москва, 1966.
4. А.А.Власов. Теория линейных ускорителей, Москва, 1965.
5. Г.В.Воскресенский, В.И.Корда, Ю.Н.Серебряков. Радиальное расширение пучка в линейном ускорителе электронов, обусловленное действием несимметричной волны, Атомная энергия, 20, 3 (1966).

6. И.А. Гришаев, А.М. Шендерович. К вопросу о нагрузке линейного электронного ускорителя пучком в переходном режиме. ЖТФ, 36, 2013 (1986).
7. В.М. Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. Москва, 1952.
8. Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. Излучение при пролете заряженных частиц возле идеально проводящих тел. Радиотехника и электроника, 4, 303. (1959).
9. Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в плоском экране. ДАН СССР, 124, 792 (1959).
10. Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. Излучение ультрарелятивистских зарядов при пролете через круглое отверстие в экране. ДАН СССР, 124, 1026 (1959).
11. О.А. Колпаков, В.И. Котов. Излучение заряда, пролетающего через цилиндрический резонатор. ЖТФ, 34, 1387 (1964).
12. О.А. Колпаков, В.И. Котов, Ом Сан Ха. Распространение медленных электромагнитных волн в структурном волноводе и излучение заряда, пролетающего по его оси. ЖТФ, 35, 26 (1965).
13. О.А. Колпаков. Излучение сгустка электрических зарядов и магнитного диполя при пролете через открытый конец полубесконечного волновода. Препринт ОИЯИ, №2168, Дубна, 1965.
14. Г.П. Фоменко. Излучение цуга зарядов, пролетающих через цилиндрический резонатор. Изв. высших учебных заведений, Физика, вып.4, стр.79 (1966).
15. Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. Дифракционное излучение. УФН, 88, 209 (1966).
16. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения, Москва, 1956.
17. В.Л. Гинзбург, В.Я. Эйдман. О силе реакции излучения при движении заряда в среде. ЖЭТФ, 36, 1823 (1959).
18. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, Москва, 1949.
19. Ф.М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т.11, стр.249, Москва, 1960.
20. Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, Москва, 1957.
21. В.Н. Цытович. Когерентное переходное излучение токонесящих и заряженных сгустков. ЖТФ, 31, 923 (1961).

22. И.М.Рыжик, И.С.Градштейн. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Москва, 1951.

23. Д.Иваненко, А.Соколов. Классическая теория поля, Москва, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел

23 мая 1967 года.

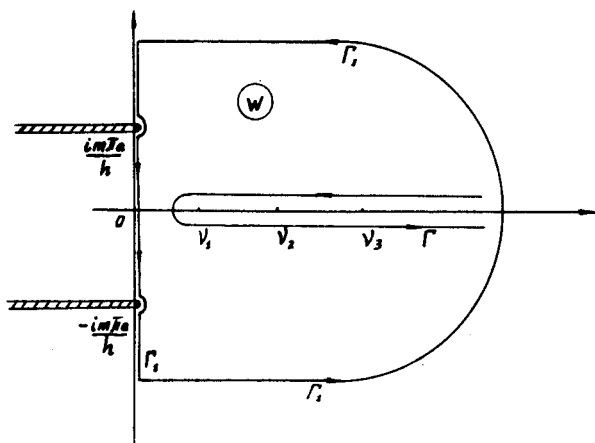


Рис. 1.

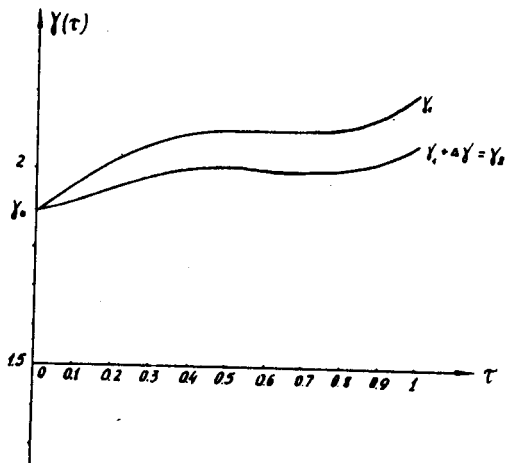


Рис. 2.

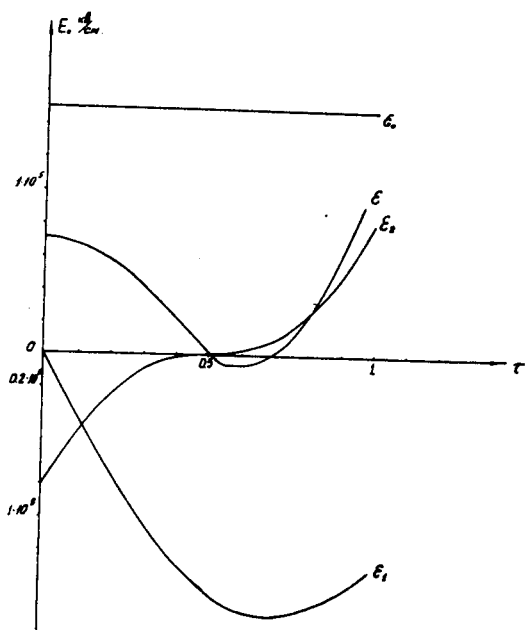


Рис. 3.

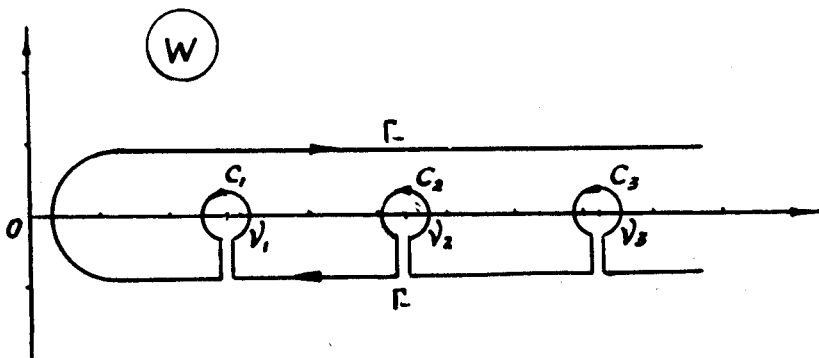


Рис. 4

Р-325

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



9 - 3346 - 2

С.Б.Рубин, В.Н. Мамонов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ УСКОРЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА
С БОЛЬШИМ ЗАРЯДОМ В РЕЗОНАТОРЕ

1967.

5192/3 мр.

9 - 3346 - 2

С.Б.Рубин, В.Н. Мамонов

ОБ УСКОРЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА
С БОЛЬШИМ ЗАРЯДОМ В РЕЗОНАТОРЕ



В в е д е н и е

В связи с повышением интенсивности ускорителей различных типов сейчас уделяется внимание вопросам влияния собственного поля ускоряемого плотного потока частиц или сгустков частиц с большим суммарным зарядом на процесс ускорения.

Имеется целый ряд работ, в которых рассматривается влияние "нагрузки пучком" на характеристики ускоряющей системы, например /1-6/. Кроме того, имеется много исследований, посвященных вычислению полей излучения, создаваемых сгустками, движущимися в различных пространственных структурах. Наиболее близкими из них для указанного круга задач являются /7-15/.

Можно, однако, заметить, что в работах о влиянии нагрузки пучком изучается в основном движение сбунчиванного пучка в периодической пространственной системе и производится квазистатический расчёт потерь энергии, или в приближении теории электрических цепей рассчитываются переходные режимы в ускоряющей системе, или, наконец, при тех же основных предположениях изучается действие собственных полей на структуру пучка и его устойчивость. Исходным предположением большинства работ, в которых вычисляются собственные поля, является равномерность движения источника. Например, при таком условии выполнены работы Днестровского и Костомарова /9,10/, где определено полное излучение при прохождении заряженного сгустка через отверстие в бесконечном проводящем экране, работа Колпакова и Котова /11/, работа Фоменко /14/.

Перечисленные предположения не всегда дают возможность последовательно учесть релятивистский характер движения и влияние запаздывания (в особенности, если ускоряется отдельный участок) на полный набор энергии частицами в ускоряющей системе . Поэтому желательно, хотя бы на примере системы простой конфигурации, подробнее рассмотреть влияние этих факторов.

Ниже рассматривается случай ускорения одиночного сгустка, пролетающего через возбужденный резонатор. За исходную принята работа Колпакова и Котова^{/11/}, где вычислены поля, возбуждаемые в круглом цилиндрическом идеально проводящем резонаторе зарядом (точечным или в виде отрезка нити), пролетающим продольно оси цилиндра с постоянной, релятивистской скоростью. Приводится выражение для энергии излучения (в виде двойного ряда) и рассматриваются предельные случаи.

В отличие от этой работы, далее не везде предполагается постоянство скорости заряда и учитывается наличие возбужденного стороннего (ускоряющего) поля в резонаторе. Такая постановка задачи дает возможность проследить, как ускоряемый сгусток отбирает энергию, запасенную в объеме резонатора, т.к. очевидно, что при релятивистской начальной скорости, из-за запаздывания, энергия стороннего поля не может отбираться сразу из всего объема.

Итак, рассматривается замкнутая физическая система, состоящая из поперечного поля, возбужденного в резонаторе с идеально проводящими стенками (т.е. свободных колебаний в резонаторе), пролетающего через резонатор сгустка электронов и собственного поля, возбужденного этим сгустком как за счет его ускорения, так и вследствие пространственной неоднородности системы. Учитываются начальные условия: в момент $t = t_0 = 0$ сгусток проникает в объем резонатора сквозь торцовую стенку со скоростью $v_0 = \beta_0 c$, собственное поле сгустка во всем объеме резонатора в этот момент полагается отсутствующим^{x)}, ускоряющее поперечное поле внутри объема имеет определенную начальную амплитуду и фазу.

Для описания физической стороны задачи, да и для вычислений,

x) Таким образом пренебрегается полем, проникшим в объем через торцовое отверстие в процессе влета сгустка в резонатор.

наиболее удобной является гамильтоновская форма уравнений взаимодействующих частиц и поля ^{18,77/}.

Исходя из уравнений Максвелла в кулоновской калибровке

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (1)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{V}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad (3)$$

(где \vec{A} - определяет всю поперечную часть суммарного поля, т.е. поля ускоряющего ^x) и собственного поля, Φ - определяет статическое поле) и граничных условий на внутренней поверхности резонатора

$$(\vec{A} \times \vec{n})_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

$$(\Phi)_{\Sigma} = 0 \quad (5)$$

(где \vec{n} - нормаль к поверхности Σ), определяем следующие уравнения для осцилляторов поперечного поля:

$$\ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \frac{1}{c} \int_V \rho \vec{v} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) (d\vec{r}). \quad (6)$$

Заряд сгустка, рассматриваемого как единая частица с распределенной плотностью ρ , есть S ;

$$\rho = e g(\vec{r} - \vec{Q}(t)), \quad \text{где } \vec{Q}(t) \text{ - радиус-вектор}$$

центра тяжести, $\vec{v} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$ и $\int_V g(\vec{r} - \vec{Q})(d\vec{r}) = N_0$ - полное число частиц в сгустке ^{xx}), интегрирование в (6) распространено на объем резонатора.

Ортогональная система векторных функций $\{\vec{A}_{\lambda}\}$, по которым

х) В дальнейшем для краткости существовавшее ранее в резонаторе свободное поле называется "ускоряющим".

xx) Аналогичный подход принят, например, в работе ^{17/}; конкретные выражения для $g(\vec{r} - \vec{Q})$ рассматриваются ниже.

выполнено разложение потенциала

$$\vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}, \quad (7)$$

является системой собственных функций резонатора, т.е. удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \vec{A}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda} = 0,$$

и граничному условию

$$(\vec{A}_{\lambda} \times \vec{n})_{\Sigma} = 0.$$

Условия нормировки:

$$\int_V \vec{A}_{\lambda} \cdot \vec{A}_{\lambda'}(d\vec{r}) = 4\pi c^2 \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Решение уравнения (3) может быть представлено в явном виде в форме

$$\Phi(t, \vec{r}) = \int_{V'} \rho(t, \vec{r}') \sum_{\sigma} \frac{\phi_{\sigma}(\vec{r}) \phi_{\sigma}(\vec{r}')}{\omega_{\sigma}^2} (d\vec{r}'), \quad (8)$$

где $\phi_{\sigma}(\vec{r})$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \phi_{\sigma} + \frac{\omega_{\sigma}^2}{c^2} \phi_{\sigma} = 0,$$

граничному условию $(\phi_{\sigma}(\vec{r}))_{\Sigma} = 0$.

Полный гамильтониан замкнутой системы, в которой ступок представляется как целое (т.е. части его удерживаются сторонними силами), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{M^2 c^4 + c^2 \left[\vec{P} - \frac{1}{c} \int_V \rho(\vec{r} - \vec{Q}(t)) \vec{A}(\vec{r}, t) (d\vec{r}) \right]^2} + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (p_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V'} \int_V \sum_{\sigma} \frac{\phi_{\sigma}(\vec{r}) \phi_{\sigma}(\vec{r}')}{\omega_{\sigma}^2} \rho(\vec{r} - \vec{Q}) \rho(\vec{r}' - \vec{Q})(d\vec{r})(d\vec{r}') = \\ &= \mathcal{H}_{(1)} + \mathcal{H}_{(2)} + \mathcal{H}_{(3)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) $\vec{A}(\vec{r}, t)$ и $\Phi(\vec{r}, t)$ определены формулами (7), (8), \vec{P} - канонический импульс, сопряженный с координатой \vec{Q} ,

p_λ - канонические импульсы, сопряженные "координатам" q_λ осцилляторов поля, $M = m_0 N_0$ - суммарная масса покоя сгустка (состоящего из электронов).

Уравнения движения сгустка

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{O}}, \quad \frac{d\vec{O}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \quad (10)$$

с учетом соотношений

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda} \text{rot } \vec{A}_{\lambda}, \quad \vec{E} = - \frac{1}{c} \sum_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} - \nabla \Phi, \quad (11)$$

$$p = M c \gamma \frac{d\vec{O}}{dt} = \vec{P} - \frac{1}{c} \int_V \rho \vec{A}(\vec{r}, t) (d\vec{r}), \quad (12)$$

где
$$\gamma = \left[1 - \frac{(\dot{\vec{O}})^2}{c^2} \right]^{-1/2} \quad (13)$$

приводятся к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(M \gamma \frac{d\vec{O}}{dt} \right) = \int_V \rho \left\{ - \frac{1}{c} \sum_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} \vec{A}_{\lambda} - \nabla \Phi + \frac{1}{c} \left(\frac{d\vec{O}}{dt} \times \sum_{\lambda} q_{\lambda} \text{rot } \vec{A}_{\lambda} \right) \right\} (d\vec{r}) \quad (14)$$

Остальные канонические уравнения, соответствующие (9), уже записаны в виде системы (6). Из закона сохранения энергии замкнутой физической системы следует, что $H = H_0$ (15)

в течение всего времени, пока систему можно считать замкнутой, т.е. пока сгусток находится внутри резонатора. Выражение (15) показывает, каким образом происходит отбор энергии из первоначально возбужденного внешними источниками резонатора - по мере движения сгустка происходит перераспределение энергии между всеми тремя частями H . При этом согласно (6) уменьшается "амплитуда колебаний", а вместе с тем и энергия гармонического осциллятора, который был возбужден сторонними источниками, и возбуждаются остальные осцилляторы.

Отсюда следует, что при расчете энергии, набираемой сгустком, когда он находится еще внутри резонатора, необходимо учитывать не только потери

на излученное поперечное поле, но и энергию, описываемую "статическим" членом K_3 . Из последнего члена должна быть вычтена собственная электромагнитная энергия заряда сгустка, оставшаяся часть представит энергию, затраченную на создание статического поля зарядов, возникших на внутренних стенках полости резонатора.

В самое уравнение (14), в правую его часть, входит теперь "сила самодействия". В связи с этим возникают и различные вопросы, связанные с исключением электромагнитной массы, регуляризацией потенциалов и т.п. Последние, однако, существенно зависят от предположений о распределении заряда.

II.

Для дальнейшего необходимо привести явные выражения для функций $\vec{A}_\lambda \cdot \phi_\sigma$. Для резонатора, у которого радиус поперечного сечения равен a , длина равна h в цилиндрической системе координат r, ϕ, z , и в гауссовой системе единиц эти функции равны (см., напрмер, /11/):

$$\left. \begin{aligned} A_{\ell m}^{(\rho)} &= \frac{2\sqrt{2} \nu_\ell c}{a^2 \sqrt{h} \lambda_{\ell m}} \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)} \cos \frac{m\pi}{h} z \\ A_{\ell m}^{(\sigma)} &= \frac{2\sqrt{2} \pi m c}{a h^{3/2} \lambda_{\ell m}} \frac{J_1\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)} \sin \frac{m\pi}{h} z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ \ell = 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad (16)$$

$$A_{\ell 0}^{(\rho)} = \frac{2 \nu_\ell c}{a^2 \sqrt{h} \lambda_{\ell 0}} \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)}, \quad m = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

$$\phi_{\ell m} = \frac{2\sqrt{2} c}{a \sqrt{h}} \frac{J_0\left(\nu_\ell \frac{r}{a}\right)}{J_1(\nu_\ell)} \sin \frac{m\pi}{h} z, \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ \ell = 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\ell m} &= \frac{\omega_{\ell m}}{c} = \sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \\ \sigma_{\ell m} &= \frac{\omega_{\ell m}}{c} = \sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где ν_ℓ - корни уравнения $J_0(\nu) = 0$.

Ввиду азимутальной симметрии задачи все выражения для частот и потенциалов относятся к азимутальному числу $j = 0$. (Таким образом, вместо тройных сумм в выражения типа (7), (8) входят суммы, двойные по l, m).

Далее будет рассматриваться одномерное движение сгустка вдоль продольной оси резонатора без учета поперечной устойчивости. Поэтому везде ниже используются только последние из уравнений (14).

В этом уравнении последний член исчезает, т.к. магнитное поле, имеющееся внутри полости, не оказывает влияния на продольное движение.

Получается следующая система зацепляющихся уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q &= \int_V \rho \beta_z A^{(z)}(\vec{r})(d\vec{r}) \\ \frac{d}{dt}(M\gamma\beta_z) &= \frac{1}{c} \int_V \rho \{ -\frac{1}{c} \sum_\lambda \dot{q}_\lambda A^{(z)} - (\nabla\Phi)_z \} (d\vec{r}) \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где Φ определяется формулой (8). Так же, как в /17/, эта система может быть приведена к одному интегро-дифференциальному уравнению. Для этого необходимо задать начальные условия для всех осцилляторов поля. Если считать, что резонатор был возбужден на основной частоте λ_{10} (т.е. $m = 0, l = 1$), то принятые ранее начальные условия сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} q_{\ell m}^{(0)} = \dot{q}_{\ell m}^{(0)} &= 0, & \text{если } (l; m) \neq (1; 0), \\ q_{10}^{(0)} = q_0, & \dot{q}_{10}^{(0)} = \dot{q}_0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где q_0, \dot{q}_0 - заданные значения. Тогда решения осцилляторных уравнений записываются в виде

$$q_\lambda = \frac{1}{c\lambda} \int_0^t \left(\int_V \rho \beta_z A^{(z)}(d\vec{r}) \right) \sin c\lambda(t-r) dr, \quad (22)$$

(l; m) ≠ (1; 0).

Для основного осциллятора удобно ввести обозначение

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_{10} &= q_{10} + q, \\ \text{где } q_{10} &= \frac{1}{c\lambda_{10}} \int_0^t \left(\int_V \rho \beta_z A_{10}^{(z)}(d\vec{r}) \right) \sin c\lambda_{10}(t-r) dr \\ q &= q_0 \cos c\lambda_{10}t + \frac{\dot{q}_0}{c\lambda_{10}} \sin c\lambda_{10}t \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

выделяя свободные колебания, соответствующие стороннему начальному возбуждению резонатора. Получается (далее $\beta_z = \beta$)

$$\frac{d}{dt} (c M \gamma \beta) = -\frac{1}{c} \int_V \{ (\dot{q}_0 \cos c \lambda_{10} t - c \lambda_{10} q_0 \sin c \lambda_{10} t) A_{\lambda_{10}}^{(z)}(\vec{r}) + \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(z)}(\vec{r}) \int_0^t (\int_V \rho' \beta A_{\lambda}^{(z)}(\vec{r}') (d\vec{r}') \cos c \lambda (t - r) d r + c \nabla \Phi \int \rho(\vec{r} - \vec{Q}) (d\vec{r}') \} \quad (24)$$

В (24) неизвестными являются функции $\beta(t)$, $\rho(t)$, однако они чрезвычайно сложным образом входят в правую часть уравнения. Кроме того, как уже отмечалось выше, для корректного использования уравнения (24) необходимо произвести перенормировку массы.

В общем случае вид распределения плотности заряда, принятый выше, не является релятивистски-инвариантным. Для дальнейшего, учитывая одномерность движения, можно принять частный случай распределения той же формы, которое, однако, является релятивистским:

$$\rho = \rho_0 \delta(z - Q_z(t)) \left[\sigma(r) - \sigma(r-b) \right] \Bigg\};$$

$$j^{(z)} = c \beta \rho$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

Полный заряд

$$S = e N_0 = e \int_V \rho (d\vec{r}) = \pi b^2 \rho_0 \quad (26)$$

Таким образом, ступок представляется бесконечно тонким диском радиуса b , движущимся перпендикулярно своей плоскости. В результате разложения по собственным функциям

$$j_{\ell m}^{(z)} = \int_V j_{\ell m}^{(z)} A_{\ell m}^{(z)} (d\vec{r}) = \left. \begin{aligned} & \frac{4\sqrt{2} S c^2 \beta J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{ab \sqrt{h} \lambda_{\ell m} J_1(\nu_{\ell})} \cos \frac{m \pi}{h} Q, \quad m \neq 0 \\ & j_{\ell 0}^{(z)} = \frac{4 S c^2 \beta J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{ab \sqrt{h} \lambda_{\ell 0} J_1(\nu_{\ell})} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Откуда с учетом (22) получается

$$q_{\ell_m} = \frac{4\sqrt{2} S J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right)}{ab\sqrt{h} \lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \int_0^t \beta(r) \cos\left[\frac{m\pi}{h} Q(r)\right] \sin[c \lambda_{\ell_m} (t-r)] dr, \quad m \neq 0;$$

$$q_{\ell_0} = \frac{4 S J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right)}{ab\sqrt{h} \lambda_{\ell_0}^2 J_1^2(\nu \ell)} \int_0^t \beta(r) \sin[c \lambda_{\ell_0} (t-r)] dr. \quad (28)$$

Формула (7) дает

$$A^z(r, z, t) = \frac{8 S c}{a^2 b h} \sum \frac{\epsilon_m \nu \ell J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \cos \frac{m\pi}{h} z \times$$

$$\times \int_0^t \beta(r) \cos\left[\frac{m\pi}{h} Q(r)\right] \sin[c \lambda_{\ell_m} (t-r)] dr.$$
(29)

Символ ϵ_m означает:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

Кроме этого, в (29) не рассматривается пока стороннее возбуждение резонатора. Наконец, "поперечная часть" электрического поля будет равна:

$$F_z = -\frac{8 S c}{a^2 b h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\nu \ell J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \cos \frac{m\pi z}{h} \int_0^t \beta \cos \frac{m\pi Q}{h} \cos[c \lambda_{\ell_m} (t-r)] dr. \quad (30)$$

Формула (8) с учетом (18) и (25) дает

$$\Phi(r, z, t) = \frac{16 S}{abh} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\lambda_{\ell_m}^2 \nu \ell J_1^2(\nu \ell)} \sin \frac{m\pi}{h} z \sin \frac{m\pi Q(t)}{h}. \quad (31)$$

Откуда "продольная часть" электрического поля

$$E_z \parallel = -\frac{16 \pi S}{abh^2} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{m J_1\left(\nu \ell \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu \ell \frac{r}{a}\right)}{\nu \ell \lambda_{\ell_m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h}. \quad (32)$$

Наконец,

$$H_a = \frac{16 S^2}{b^2 h} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\nu \ell \frac{b}{a})}{\nu \ell^2 \lambda_{\ell m}^2 J_1^2(\nu \ell)} \sin \frac{2 m \pi Q}{h} \quad (33)$$

III

Громоздкие выпажения (30), (31), (32) трудно исследовать. Однако представляется возможность для некоторых областей пространства внутри объема V произвести суммирование рядов. Двойной ряд (30) представляется в форме

$$F_z^{\perp} = - \frac{8 c S}{a^3 b h} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos \frac{m \pi z}{h} \int_0^t \cos \frac{m \pi Q}{h} \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\nu \ell J_1(\nu \ell \frac{b}{a}) J_0(\nu \ell \frac{r}{a})}{[(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2] J_1^2(\nu \ell)} \times \right. \quad (34)$$

$$\left. \times \cos(c(t-r) \sqrt{(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2}) \right| dr.$$

Ряд, заключенный в фигурной скобке в (34), используя разложение, аналогичное разложению Кнезера-Зоммерфельда^{/18/}, можно записать в виде контурного интеграла

$$\theta_{(m)}^{\perp} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\nu \ell J_1(\nu \ell \frac{b}{a}) J_0(\nu \ell \frac{r}{a})}{[(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2] J_1^2(\nu \ell)} \cos(c(t-r) \sqrt{(\frac{\nu \ell}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2}) =$$

$$= \int_{\Gamma} C(w) \frac{w \cos [c(t-r) \sqrt{(\frac{w}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2}]}{(\frac{w}{a})^2 + (\frac{m \pi}{h})^2} dw, \quad (35)$$

где

$$C(w) = \frac{J_1(w \frac{b}{a}) w}{8 J_0(w)} [H_0^{(1)}(w) H_0^{(2)}(w \frac{r}{a}) - H_0^{(2)}(w) H_0^{(1)}(w \frac{r}{a})], \quad (36)$$

■ контур интегрирования в комплексной плоскости w представлен на рис. 1^{x)}.

^{x)} Вычисление соответствующих комплексных интегралов приведено в приложении 1.

Для униформизации многозначной функции $\sqrt{\left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}$ в плоскости w сделаны разрезы, выходящие из точек $\pm \frac{im\pi a}{h}$.

Можно показать, что в области $r-a > c(t-r)$ (37) контур интегрирования Γ можно "растянуть" в контур Γ_1 , состоящий из полукруга бесконечно большого радиуса и мнимой оси, причём интеграл по бесконечной полуокружности исчезает. Функция $G(w)$ является чётной, поэтому подынтегральное выражение в правой части (35) — нечётное. В результате интеграл вдоль мнимой оси сводится только к интегралу по двум обходам около полюсов $\pm \frac{im\pi a}{h}$. После вычисления получается

$$\theta_{(m)}^{\perp} = -\pi i a^2 G\left(i \frac{m\pi a}{h}\right) = -\frac{\pi a^2 m}{2h} \frac{I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \right]. \quad (37)$$

При подстановке (38) в (34) необходимо учесть, что r изменяется в пределах $[0, t]$, поэтому общее выражение для условия (37) должно быть

$$r - b > ct. \quad (38)$$

Окончательное выражение для F_z^{\perp} принимает вид

$$F_z^{\perp} = \frac{8S}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \frac{I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \right]. \quad (39)$$

(В (39) учтено, что $\int_0^t c \beta(r) \cos \frac{m\pi r}{h} dr = \frac{h}{m\pi} \sin \frac{m\pi Q}{h}$).

Суммирование ряда (31) по ℓ в области $r > b$ производится точно таким же образом и даёт в результате

$$\Phi = \frac{8S}{\pi b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \frac{I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right) \right].$$

Откуда $F_z^{\parallel} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ оказывается с точностью до знака совпадающей с выражением (39). Поэтому, если рассматривать в каждый момент времени t E_z^{\perp} и E_z^{\parallel} в общей части областей (38) и (39) (которая в действительности совпадает с самой областью (38)), то суммарное поле в этой части пространства оказывается нулем.

Для того, чтобы упростить выражение (31) для области $r < b$, т.е. для области, в которой находится сам заряд, удобно входящий в это выражение ряд по ℓ представить в форме

$$\theta_{(m)}^{\parallel} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu_{\ell} \frac{r}{a}\right)}{\nu_{\ell} \left[\left(\frac{\nu_{\ell}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \right] J_1^2(\nu_{\ell})} = -\frac{\partial}{\partial b} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a J_0\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right) J_0\left(\nu_{\ell} \frac{r}{a}\right)}{\nu_{\ell}^2 \left[\left(\frac{\nu_{\ell}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \right] J_1^2(\nu_{\ell})}. \quad (42)$$

(т.к. исходный ряд равномерно сходится для $0 \leq b < a$, как $\frac{-1}{\rho^2}$, то почленное дифференцирование допустимо). Для перехода в комплексную область и контурного интегрирования вместо $G(w)$ теперь следует выбрать выражение

$$G_1(w) = \frac{J_0\left(w \frac{r}{a}\right)}{R J_0(w)} \left[H_0^{(1)}(w) H_0^{(2)}\left(w \frac{b}{a}\right) - H_0^{(2)}(w) H_0^{(1)}\left(w \frac{b}{a}\right) \right], \quad (43)$$

которое обладает сходными свойствами с $G(w)$. Поэтому

$$\theta_{(m)}^{\parallel} = -a \frac{\partial}{\partial b} \int_{\Gamma_1} G_1(w) \frac{dw}{w \left[\left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \right]}. \quad (44)$$

Дальнейшие преобразования аналогичны предыдущим, следует только ещё при вычислении интеграла по контуру Γ_1 обойти полюс в точке $w=0$. Получается

$$\begin{aligned} \theta_{(m)}^{\parallel} = & a \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{h^2 a^2}{2(m\pi)^2} \ln \frac{b}{2a} + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 h^2}{2(m\pi)^2} \frac{I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_0\left(\frac{m\pi b}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) - K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{8S}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{h}{\pi^2 m^2} - \frac{b}{\pi m} \frac{I_0\left(\frac{m\pi r}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \left[K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \right] \right\} \sin \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h}. \end{aligned} \quad (46)$$

В (46) члены, содержащие цилиндрические функции, быстро убывают с увеличением m (как $\sim e^{-\frac{m\pi a}{h}(b-z)}$), поэтому соответствующая часть ряда легко оценивается, остальная часть ряда суммируется и представляет функцию

$$\Phi_0 = \frac{4S}{b^2} \begin{cases} Q - \frac{Qz}{h} & \text{при } z - Q > 0, \\ z - \frac{Qz}{h} & \text{при } z - Q < 0. \end{cases} \quad (47)$$

Член Φ_0 определяет разрыв поля F_z^{\parallel} при переходе через поверхность густока (диска). Величина разрыва $\frac{4S}{b^2}$ соответствует скачку поля \vec{E}^{\parallel} при пе-

пеходе через поверхность заряженного диска в свободном пространстве (см. /19/).

Поле E_z^{\parallel} в рассматриваемой области, таким образом, будет

$$F_z^{\parallel} = \frac{8S}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} I_0 \left(\frac{m\pi r}{h} \right) \left[K_1 \left(\frac{m\pi b}{h} \right) + \frac{K_0 \left(\frac{m\pi a}{h} \right) I_1 \left(\frac{m\pi b}{h} \right)}{I_0 \left(\frac{m\pi Q}{h} \right)} \right] \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \quad (48)$$

$$- \frac{4S}{b^2} \times \begin{cases} -\frac{Q}{h} & \text{при } z < Q(t), \\ 1 - \frac{Q}{h} & \text{при } z > Q(t). \end{cases}$$

Последнее выражение можно представить в симметричном виде:

$$F_z^{\parallel} = \begin{cases} \frac{2S}{b^2} + \mathcal{E}_z^{\parallel}(z, r) & \text{при } z < Q, \\ -\frac{2S}{b^2} + \mathcal{E}_z^{\parallel}(z, r) & \text{при } z > Q. \end{cases} \quad (49)$$

где

$$\mathcal{E}_z^{\parallel} = \left(\frac{4SQ}{b^2 h} - \frac{2S}{b^2} \right) + \frac{8S}{bh} \sum_{m=1}^{\infty} I_0 \left(\frac{m\pi r}{h} \right) \left[\dots \right] \cos \frac{m\pi z}{h} \sin \frac{m\pi Q}{h} \quad (50)$$

Вычисление F_z^{\perp} в области, где не выполнено условие (38), не удастся достаточно упростить. Для конкретных случаев приходится оценивать довольно большое количество членов рядов, отбрасывая остальные.

IV

Для окончательного определения движения сгустка согласно формуле (24) необходимо вычислить действующие силы, т.е. привести явное выражение для правой части уравнения (24).

Сила F_z^{\parallel} создаваемая частью E_z^{\parallel} электрического поля, получается по формуле

$$F_z^{\parallel} = \int_V \rho \mathcal{E}_z^{\parallel} (d\vec{r}) = -\frac{4S^2}{b} \left(\frac{1}{2} - \frac{Q(t)}{h} \right) + \quad (52)$$

$$+ \frac{8S^2}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{2m\pi Q}{h} I_1 \left(\frac{m\pi b}{h} \right) \left[K_1 \left(\frac{m\pi b}{h} \right) + \frac{K_0 \left(\frac{m\pi a}{h} \right) I_1 \left(\frac{m\pi b}{h} \right)}{I_0 \left(\frac{m\pi a}{h} \right)} \right].$$

При вычислении (52) в E_z^{\parallel} была отброшена часть, соответствующая скачку "собственного поля".

Прежде чем вычислить силу F_z^L , необходимо произвести перенормировку для того, чтобы исключить собственную электромагнитную массу. Как известно, для этого можно воспользоваться выражением для обобщенного импульса, которое для данного случая имеет вид:

$$\vec{P} = \vec{M} c \vec{\beta} \gamma + \frac{1}{c} \int_V \rho \vec{A}(\vec{r}, t) (d\vec{r}), \quad (53)$$

где через \vec{M} обозначена первоначально не перенормированная масса сгустка. Перенормировка заключается в том, что во втором члене в (53) ковариантным способом выделяется член, имеющий вид $c \vec{\beta} \gamma \cdot \text{const}$, и объединяется с первым членом.

Ввиду трудности последовательно ковариантной трактовки, которая оказывается существенно зависящей от внутренней структуры сгустка, ниже, следуя работе /17/, мы рассматриваем приближенную процедуру, пригодную для слабо релятивистского случая $\gamma \approx 1$.

После интегрирования в (29) два раза по частям получается:

$$A^z(r, z, t) = \frac{8S}{a^2 b h} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{\nu_{\ell} J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a}) J_0(\nu_{\ell} \frac{r}{a})}{\lambda_{\ell m}^4 J_1^2(\nu_{\ell})} \cos \frac{m\pi z}{h} \left\{ \beta(t) \cos \frac{m\pi Q(t)}{h} - \right. \quad (54)$$

$$\left. - \beta_0 \cos(c\lambda_{\ell m} t) - \frac{1}{c\lambda_{\ell m}} \left[\dot{\beta}_0 \sin(c\lambda_{\ell m} t) - \int_0^t \sin[c\lambda_{\ell m}(t-r)] \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right] \right\}.$$

После подстановки (54) в z -ое уравнение системы (53) выделяется член, пропорциональный $\beta(t)$, и соответствующее выражение для P_z принимает вид (при $\gamma \approx 1$)

$$P_z = c\beta \left[\vec{M} + \frac{8S^2}{a^2 b^2 h c^2} \sum_{\ell, m} \frac{J_1^2(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^4} \right] +$$

$$+ \frac{16S^2}{a^2 b^2 h c} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{J_1^2(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^4} \left\{ \delta_{1m} \beta \cos \frac{2\pi m Q}{h} - \cos \frac{m\pi Q}{h} [\beta_0 \cos(c\lambda_{\ell m} t) + \right. \quad (55)$$

$$\left. + \frac{\dot{\beta}_0}{c\lambda_{\ell m}} \sin(c\lambda_{\ell m} t) + \frac{1}{c\lambda_{\ell m}} \int_0^t \sin[c\lambda_{\ell m}(t-r)] \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right\},$$

где
$$\delta_{1m} = \begin{cases} 0, & m=0, \\ \frac{1}{2}, & m \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом; величину

$$\bar{M} + \Delta M = \bar{M} + \frac{8S^2}{a^2 b^2 h c^2} \sum_{\ell, m} \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell m}^4} = M \quad (56)$$

можно считать перенормированной массой сгустка. Выражение (56) можно просуммировать по m , тогда

$$\Delta M = \frac{2S^2}{b^2 h a^2 c^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell 0}^4} \left[\frac{h \nu_\ell}{a} \operatorname{cth} \frac{h \nu_\ell}{a} + \frac{\nu_\ell^2 h^2}{a^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{h \nu_\ell}{a}} + 1 \right].$$

ΔM может быть представлена также в виде $\frac{S^2}{bc^2} \mathcal{E}$,

где
$$\mathcal{E} = \frac{2}{b h a^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell 0}^4} [\dots]$$
 — безразмерный множитель.

Таким образом, выражение для перенормировки массы ΔM отличается от обычного $\frac{S^2}{bc^2}$, где b — характерный размер сгустка (см. например, [16]) наличием коэффициента \mathcal{E} , зависящего, кроме размера b , от размера резонатора. Для дальнейшего вычисления поля E_{\perp} в области самого сгустка следует использовать измененную величину Λ^{\perp} , а именно, \bar{Q}^{\perp} .

$$\bar{Q}^{\perp} = \frac{8S}{a^2 b h} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{\nu_\ell J_1(\nu_\ell \frac{b}{a}) J_0(\nu_\ell \frac{r}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell m}^4} \left\{ \delta_{1m} \beta \cos \frac{m\pi(z+Q)}{h} - \cos \frac{m\pi z}{h} \right\} \times \quad (57)$$

$$\times \left[\beta_0 \cos(c \lambda_{\ell m} t) + \frac{\dot{\beta}_0}{c \lambda_{\ell m}} \sin(c \lambda_{\ell m} t) + \frac{1}{c \lambda_{\ell m}} \int_0^t \sin c \lambda_{\ell m} (t-r) \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right],$$

в которой отсутствуют члены, дающие вклад в перенормировку массы. С помощью (57) получается выражение для силы F_{\perp} :

$$F_{\perp}^{\perp} = -\frac{1}{c} \int_{\nu} \rho \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} (dr) = \frac{-16S^2}{a^2 b^2 h c} \sum_{\ell, m} \epsilon_m \frac{J_1^2(\nu_\ell \frac{b}{a})}{J_1^2(\nu_\ell) \lambda_{\ell m}^4} \left\{ \delta_{1m} \dot{\beta} \cos \frac{2m\pi Q}{h} - \right. \quad (58)$$

$$\left. - \frac{m\pi}{2h} c \beta^2 \sin \frac{2m\pi Q}{h} + \beta_c c \lambda_{\ell m} \sin(c \lambda_{\ell m} t) \cos \frac{m\pi Q}{h} - \beta_0 \cos(c \lambda_{\ell m} t) \cos \frac{m\pi Q}{h} \right.$$

$$\left. - \cos \frac{m\pi Q}{h} \int_0^t \cos [c \lambda_{\ell m} (t-r)] \frac{d^2}{dr^2} [\beta \cos \frac{m\pi Q}{h}] dr \right\}.$$

Как обычно, движение частицы оказывается зависящим от предистории (члены $\dot{\beta}_0, \ddot{\beta}_0$). Предполагая, что до влета в резонатор частица двигалась равномерно, следует считать $\dot{\beta}_0 = \ddot{\beta}_0 = 0$.

После объединения (52), (58) с учётом перенормировки массы получается окончательное выражение для уравнения движения частицы:

$$\frac{d}{dt} (c M \gamma \beta) = F_{\parallel} + F_{\perp} + F_{\perp}^{\text{стор}} \quad (59)$$

пригодное для случая небольших значений γ_0 . Если до влета сгустка, в резонаторе было возбуждено стороннее поле, к (59) необходимо добавить соответствующую этому полю стороннюю силу $F_{\perp}^{\text{стор}}$. Как было принято ранее (см. (21)-(23)), пусть начальное возбуждение резонатора соответствовало основной частоте λ_{10} , причём в момент влета сгустка ($t=0$).

$q_0 = 0$. Величина \dot{q}_0 выражается через первоначально запасённую в резонаторе энергию или через начальную амплитуду поля на оси резонатора E_0 . С учётом того, что на основной частоте поле не зависит от x , для исходного возбуждения имеет место:

$$F_{\perp}(t, r) \Big|_{r=0} = F_0 \cos(c \lambda_{10} t) = -\frac{1}{c} \dot{q}(t) A_{10}^{(n)}(r) \Big|_{r=0}, \quad (60)$$

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{c \lambda_{10}} \sin(c \lambda_{10} t).$$

Откуда

$$\dot{q}_0 = -\frac{c E_0}{A_{10}(0)} = -\frac{a \sqrt{h}}{2} J_1(\nu_1) E_0. \quad (61)$$

С помощью (17), (24), (25) получается окончательное выражение для сторонней силы:

$$F_{\perp}^{\text{стор}} = \frac{2a J_1(\nu_1 \frac{b}{n}) S}{b \nu_1} F_0 \cos(c \lambda_{10} t). \quad (62)$$

Ввиду сложности основного уравнения (59) для случая сравнительно небольшого изменения $\beta(t)$ за время пролета резонатора можно попытаться оценить решение с помощью метода последовательных приближений, принимая за первое приближение "силы самодействия", возбуждаемые сгустком, движущимся с постоянной скоростью $\beta = \beta_0$, затем с помощью (59) оценивать неравномерность движения.

Следует привести некоторые оценки и физические следствия, вытекающие из изложенного выше.

В разделе III было отмечено, что в каждый данный момент времени t с помощью неравенства (38) определяется область $a \leq z < b + ct$, в которой отсутствуют поля, возбуждаемые движущимся сгустком, т.е. в этой области находится только невозмущенное стороннее поле (если оно там заранее было возбуждено). Если допустить, что в течение времени пролета резонатора ускоряемым в нем сгустком скорость сгустка изменилась мало ($\beta = \beta_0$) (при ультрарелятивистском движении это условие практически выполнено), то по истечении времени $t_{\text{кон.}} = \frac{h}{c\beta_0}$ область распространения полей, возбужденных сгустком, ограничивается неравенством

$$0 \leq z \leq b + \frac{h}{\beta_0} \quad (63)$$

(в случае сильно неравномерного движения $t_{\text{кон.}}$ можно оценить только с помощью решения уравнения (59)).

Очевидно, что неравенством (63) определяется и "область взаимодействия" сгустка со сторонним полем, т.е. область, из которой сгусток может отбирать энергию стороннего поля. Энергия стороннего поля, запасенная в остальной части объема резонатора, не успевающая за время пролета сгустка "перетечь" в область взаимодействия, остается неиспользованной.

Можно произвести оценку доли энергии стороннего поля, запасенной в "области взаимодействия" по отношению к той энергии, которую приобрел бы сгусток в идеальном случае при прохождении в статическом электрическом поле F_0 расстояния h .

Энергия, набранная в статическом поле, $W_0 = F_0 h S$. Плотность энергии стороннего поля, запасенной в резонаторе, при принятой начальной фазе $\varphi_0 = 0$, может быть выражена только через $E_z^2|_{t=0}$. Тогда количество энергии в области взаимодействия выразится так:

$$W_{\text{вз}} = \int_V \frac{F_z^2(0, r)}{4\pi} (d\vec{r}) = 2\pi \int_0^h dz \int_0^{b+\frac{h}{\beta_0}} \frac{F_z^2(0, r)}{4\pi} r dr \quad (64)$$

С учетом (60), (61) получается

$$w_{вз} = \frac{F_0^2 h}{4} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)^2 \left\{ J_0^2 \left[\frac{\nu_1}{a} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right) \right] + J_1^2 \left[\frac{\nu_1}{a} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right) \right] \right\}. \quad (85)$$

Или, когда $a \gg \nu_1 \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)$,

$$w_{вз} \approx \frac{F_0^2 h}{4} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)^2 \quad (86)$$

Откуда

$$\xi = \frac{w_{вз}}{w_0} = \frac{F_0}{4S} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right)^2 \quad (87)$$

Формула (88) дает оценку, показывающую общую возможность набора энергии сгустком в резонаторе, т.к. ясно, что из области взаимодействия энергия стороннего поля отбирается сгустком не полностью. Для уточнения формулы (87) можно оценить еще количество энергии \bar{w} стороннего поля, "вытекающей" или, наоборот (в зависимости от фазовых соотношений), "вытекающей" из области взаимодействия за время пролета сгустка:

$$\bar{w} = -2\pi a h \int_0^{t_{\text{кон}}} \frac{c}{4\pi} \{ [\bar{F}, \bar{H}] \cdot \vec{e}_r \} dt, \quad t_{\text{кон}} \approx \frac{h}{\beta_0 c}.$$

На основной частоте λ_{10} с учетом (7), (17), (61) получается:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= -\frac{F_0^2 a^2 h}{8\nu_1} J_0 \left(\nu_1 \frac{b + \frac{h}{\beta_0}}{a} \right) J_1 \left(\nu_1 \frac{b + \frac{h}{\beta_0}}{a} \right) \left[1 - \cos \frac{2\nu_1 h}{a\beta_0} \right] \approx \\ &= -\frac{F_0^2 h^3 \nu_1^2}{4a\beta_0^2} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right); \end{aligned}$$

знак минус показывает, что в рассматриваемом случае (влет сгустка в момент максимума поля $F_z^{\text{стор.}}$) запасенная в области взаимодействия энергия стороннего поля уменьшается за счет "перетекания" из этой области в остальную часть объема резонатора в течение всего времени пролета сгустка.

С этой поправкой для ξ получается формула

$$\xi = \frac{w_{вз} + \bar{w}}{w_0} = \frac{F_0}{4S} \left(b + \frac{h}{\beta_0} \right) \left[b + \frac{h}{\beta_0} - \frac{h^2 \nu_1^2}{a\beta_0^2} \right]. \quad (88)$$

Можно привести численные примеры для ξ .

Пусть $a = 100$ см, $b = 3$ м, $\beta_0 = 0,5$, $S = 10$ е¹⁸.

Тогда получаем следующую таблицу значений:

Таблица 1

ξ	F_0 кв/см	
	100	150
h см 2	0,82	1,23
5	2,61	3,91

Табл. 1 показывает, что величина пролетного промежутка $h = 2$ см явно недостаточна для обеспечения предполагаемого набора энергии W_0 , даже при напряженности поля 150 кв/см. Как видно из (68), квадратичная зависимость от длины пролета (ширины резонатора) более сильно сказывается на наборе энергии, чем даже увеличение начальной напряженности поля в резонаторе, конечно, при учёте того, что время пролета \ll периода основного колебания в резонаторе. Таким образом, более выгодно ускорять на длинных волнах, пропорционально увеличивая размеры a и h резонатора с тем, чтобы среднее отношение времени пролета $T_{пр}$ к четверти периода основного колебания резонатора сильно не изменялось, т.е.

$$\frac{4 T_{пр}}{T_0} = \frac{2 h v_1}{\pi a \beta_0} = const \ll 1. \quad (69)$$

Количественно, при относительно небольшом изменении $\beta(t)$ за время пролета, оценка набора энергии сгустком получается из рассмотрения первого приближения в (59).

После подстановки в (52), (58) и (59) соотношений

$$\beta = \beta_0, \quad Q(t) = c \beta_0 t$$

(59) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c M \gamma \beta) = & - \frac{4 S^2}{b^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{c \beta_0 t}{h} \right) + \frac{8 S^2}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \left(\frac{2 \pi m}{h} c \beta_0 t \right) I_1 \left(\frac{m \pi b}{h} \right) \times \\ & \times \left[K_1 \left(\frac{m \pi b}{h} \right) + \frac{K_0 \left(\frac{m \pi a}{h} \right) I_1 \left(\frac{m \pi b}{h} \right)}{I_0 \left(\frac{m \pi a}{h} \right)} \right] + \frac{16 S^2 \beta_0}{a^2 b^2 h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_1^2 \left(\nu_{\ell} \frac{b}{a} \right)}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell}^2 \ell_m^2 \lambda_{\ell_0}^2(\gamma_0)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \cos\left(\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct\right) \left\{ \frac{m\pi}{h} \beta_0 \sin\left(\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct\right) - \lambda_{\ell m} \sin(c \lambda_{\ell m} t) \right\} + \\ & + \frac{2\pi S J_1\left(\nu_1 \frac{b}{a}\right)}{b \nu_1} E_0 \cos(c \lambda_{10} t), \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\lambda_{\ell m}(\gamma_0) = \sqrt{\left(\frac{\nu_{\ell}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h \gamma_0}\right)^2}. \quad (71)$$

Правая часть (70) - известная функция времени, поэтому уравнение легко интегрируется.

$$\text{С учётом соотношения } \beta_0 = \frac{\sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{\gamma_0},$$

$$M = N_0 m_0, \quad S = N_0 e, \quad (72)$$

где N_0 - число частиц сгустка, m_0 - масса покоя электрона после интегрирования, получается:

$$\begin{aligned} c N_0 m_0 (\sqrt{\gamma^2 - 1} - \sqrt{\gamma_0^2 - 1}) &= -\frac{4N_0^2 e^2}{b^2} \left(1 - \frac{c \beta_0 t}{h}\right) \frac{t}{2} + \frac{4N_0^2 e^2 h}{\pi^2 b^2 c \beta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \times \\ & \times \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{h} c \beta_0 t\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) \left[K_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right) + \frac{K_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right) I_1\left(\frac{m\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi a}{h}\right)} \right] \right] + \\ & + \frac{16N_0^2 e^2 \beta_0}{a^2 b^2 hc} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_1^2\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right)}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^2 \lambda_{\ell m}^2(\gamma_0)} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \cos\frac{2\pi m}{h} \beta_0 ct\right) - \right. \\ & - \left[\frac{\lambda_{\ell m}^2}{\lambda_{\ell m}^2(\gamma_0)} \left(1 - \cos(c \lambda_{\ell m} t)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct\right) - \frac{m\pi \beta_0 \lambda_{\ell m}}{h \lambda_{\ell m}^2(\gamma_0)} \sin(c \lambda_{\ell m} t) \sin\frac{m\pi}{h} \beta_0 ct \right] \right\} \\ & + \frac{2\pi^2 S E_0 J_1\left(\nu_1 \frac{b}{a}\right)}{c \nu_1^2 b} \sin c \lambda_{10} t. \end{aligned} \quad (73)$$

В качестве единицы времени в (73) удобно выбрать промежуток $T_{\text{пр}} = \frac{h}{\beta_0 c}$, примерно равный времени пролета, тогда после введения безразмерного времени

$$r = \frac{t}{T_{\text{пр}}} \quad (74)$$

получается следующее уравнение, записанное уже в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} - \frac{2N_0 h r_0}{b^2 \beta_0} (1-r)r + \frac{4N_0 b r_0}{\pi^2 b^2 \beta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} (1 - \cos 2m\pi r) I\left\{\frac{m\pi b}{h}\right\} [\dots] + \\ + \frac{16N_0 r_0 \beta_0}{a^2 b^2 h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{J_1^2\left(\nu_{\ell} \frac{b}{a}\right)}{J_1^2(\nu_{\ell}) \lambda_{\ell m}^2 \lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0)} \left\{ \frac{1}{4} (1 - \cos 2\pi m r) - \left[\frac{\lambda_{\ell m}^2}{\lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0)} (1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m\pi r \cos(c \lambda_{\ell m} r)) - \frac{m\pi \beta_0 \lambda_{\ell m}}{h \lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0)} \sin(c \lambda_{\ell m} r) \sin m\pi r \right] \right\} + \\ + \frac{2a^2 E_0 r_0 J_1\left(\nu_1 \frac{b}{a}\right)}{\nu_1^2 b e} \sin \frac{\lambda_{10} h}{\beta_0} r \quad (75) \end{aligned}$$

где $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ — классический радиус электрона.

Далее с помощью (73) или (75) находим зависимость

$$Q(t) = c \int_0^t \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} dt \quad \text{или} \quad Q(r) = \frac{h}{\beta_0} \int_0^r \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} dr \quad (76)$$

и момент времени $t_{\text{кон}}$, соответствующий выходу сгустка из резонатора $Q(t_{\text{кон}}) = h$. Таким образом находим первое приближение $Q = Q_1(t)$, $\beta = \beta_1(t)$.

При конкретном расчёте необходимо упростить выражения (73), (75), ограничиваясь только наиболее существенными членами рядов. Как видно, однако, в общем случае трудно ожидать быстрой сходимости рядов, поэтому необходимы дополнительные физические основания для введения упрощений.

Прежде всего необходимо учесть, что в реальном резонаторе имеются входное и выходное отверстия, радиус которых $b_1 \geq b$. Можно предполагать что из-за этих отверстий ограничивается допустимая неоднородность поля в радиальном направлении. Оценку можно выполнить следующим образом. Фурье-разложения потенциалов \vec{A}, Φ движущегося в свободном пространстве сгустка (плотность зарядов и ток даны формулами (25)) легко представить в форме

$$(\vec{A} = \{0, 0, A_z\}, \quad A_z = \beta_0 \Phi),$$

$$(\vec{A}_\omega)_z = \frac{2\rho_0 b}{c} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa r) J_1(\kappa b)}{(\frac{\omega}{c\beta_0})^2 (1 - \beta_0^2) + \kappa^2} d\kappa = \frac{2\rho_0 b}{c\Omega} I_1(b\Omega) K_0(r\Omega),$$

$$r > b, \quad \Omega^2 = (\frac{\omega}{c\beta_0})^2 (1 - \beta_0^2), \quad \Phi_\omega = \frac{1}{\beta_0} (\vec{A}_\omega)_z. \quad (77)$$

Отсюда

$$(\vec{E}_\omega)_r = \frac{2\rho_0 b}{\beta_0 c} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} I_1(b\Omega) K_1(r\Omega) + i\frac{\omega}{c} \frac{2\rho_0 b}{c\Omega} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} I_1(b\Omega) K_0(r\Omega),$$

$$(\vec{H}_\omega)_\phi = \frac{2\rho_0 b}{c} e^{i\frac{\omega}{\beta_0} z} I_1(b\Omega) K_1(r\Omega) \quad (78)$$

Соответствующие фурье-компоненты поверхностных токов электрического и "магнитного", возбужденных полем (78) и текущих по торцовым стенкам резонатора для достаточно больших ω , могут быть оценены по формулам

$$\left. \begin{aligned} j_\omega &= -\frac{c}{4\pi} [\vec{n}, \vec{H}_\omega] = -\frac{c}{4\pi} \vec{e}_r (\vec{H}_\omega)_\phi \\ j_\omega^* &= \frac{c}{4\pi} [\vec{n}, \vec{E}_\omega] = -\frac{c}{4\pi} \vec{e}_\phi (\vec{E}_\omega)_r \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

($\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат, $\vec{n} = \vec{e}_z$).

Токи возбуждают вторичное поле в резонаторе: Естественно, что из всей непрерывной области частот ω главное значение имеют те, которые близки к собственным частотам ω_{lm} . При $m = 0$ получается

соответствие $\omega = \frac{\nu \ell}{a} c$ и

$$\Omega^2 = \left(\frac{\nu \ell}{a \beta_0} \right)^2 (1 - \beta_0^2). \quad (80)$$

При фиксированном β_0 и достаточно больших ℓ , так, что $b \Omega \geq 3$, можно использовать асимптотические выражения для I_1, K_0, K_1 , тогда токи (79), а следовательно, и возбуждаемое вторичное поле оказываются пропорциональными величине

$$= \frac{a \beta_0}{2 \nu \ell \sqrt{1 - \beta_0^2}} c - \frac{\nu \ell}{a \beta_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} (r - b) \quad (81)$$

Таким образом, с учётом того, что $\nu \ell = \pi \ell$, получается экспоненциальное затухание с увеличением номера "гармоники" ℓ . В качестве r в (81) следует взять величину $\geq b_1$. Считая достаточным десятикратное уменьшение амплитудного значения величин, можно принять, что должно быть

$$\frac{\pi \ell}{a \beta_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} (b_1 - b) > 2,$$

откуда получается, что максимальное число "радиальных гармоник", дающих существенный вклад в возбуждаемое сгустком поле, можно оценить числом

$$\ell_{\max} = \frac{2 a \beta_0}{\pi (b_1 - b) \sqrt{1 - \beta_0^2}} \quad (82)$$

Как видно из предыдущего, при получении (82) возбуждаемое сгустком вторичное поле оценивалось как дифракционное поле с помощью принципа физической оптики. Известно, что последний применим и даёт удовлетворительное согласие с опытом, если $\frac{2 \pi b_1}{\lambda} \geq 3$, см. /20/ (b_1 - радиус отверстия в экране, λ - длина волны). Поэтому оценка (82) справедлива, если одновременно с ней выполняется неравенство $\ell_{\max} \geq \frac{3 a}{\pi b_1}$

При $m \neq 0$ величина Ω получается значительно большей (если $a \gg h$) и амплитуды соответствующих гармоник должны быть сильно подавленными.

Кроме указанных соображений относительно возможной неоднородности поля в радиальном направлении, необходимо учесть, что реальный сгусток имеет конечный размер в продольном направлении. Таким образом, волны, создающие неоднородность поля в этом направлении на расстояниях, сравнимых по крайней мере с несколькими размерами сгустка, не могут возбуждаться когерентно и частично гасят друг друга. Это обстоятельство особенно существенно в ультрарелятивистском пределе, когда излучение в основном направлено вперед, и в условии когерентности должны входить главным образом продольные размеры сгустка, см. /21/.

VI

Ниже приводятся конкретные оценки для некоторых случаев ускорения сгустка в резонаторе. Основные параметры резонатора и сгустка такие же, какие были приняты при расчёте табл. 1 ($a = 100$ см; $h = 5$ см; $b_1 = 4.5$ см; $b = 3$ см; $S = 10^{13}$ е; $\beta_0 = 0.5$). Расчёты проводились по формулам (75), (78) после ряда упрощений в формуле (75) с учётом сказанного выше относительно допустимого вклада разных гармоник в возбуждаемое сгустком поле. Дополнительно можно заметить ещё следующее. Численное сравнение амплитуд для гармоник с $m = 0$ и с $m \neq 0$ показывает, что последние значительно меньше ^{х)}. Действительно, выражение для E_z при $\beta = \beta_0 = \text{const}$ (после замены t через τ) получается из (30):

$$E_z = -\frac{16S\beta_0}{a^2bh} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\nu_{\ell} J_0(\nu_{\ell} \frac{r}{a}) J_1(\nu_{\ell} \frac{b}{a})}{\lambda_{\ell m}^2 (\gamma_0) J_1^2(\nu_{\ell})} \cos \frac{m\pi z}{h} \left\{ \lambda_{\ell m} \sin(\lambda_{\ell m} \frac{hr}{\beta}) - \frac{m\pi\beta_0}{h} \sin \lambda_{\ell m} r \right\} \quad (83)$$

Отсюда для небольших значений ℓ , таких, что $\frac{\nu_{\ell}}{a} \ll 1$, получается

$$\frac{E_{\ell m}}{E_{\ell 0}} \quad \begin{matrix} r=0 \\ z=0 \end{matrix} = \frac{2(\frac{\nu_{\ell}}{a})^2}{(\frac{m\pi}{h})^2}$$

Большие значения ℓ в (83) можно не учитывать, так как, как сказано выше, в реальных условиях соответствующие гармоники оказываются слабо

х) Подобные оценки проводились также Котовым и Колпаковым.

выраженными. Для крайних значений ℓ (в смысле формулы (82)), можно получить оценку, сравнивая E_{ℓ_0} и $E_{\ell_{10}}$ при $\ell = \ell_{\max}$. Получается отношение

$$\left. \frac{E_{\ell_0}}{E_{\ell_{10}}} \right|_{\substack{\ell=0 \\ m=0}} \approx \frac{a^2 J_1(\nu \frac{b}{a})}{bh} \left[\frac{J_1(\nu_1)}{\nu_1 J_1^2(\nu_1)} \right]^2 \frac{(b_1-b)^2}{bh} \frac{(1-\beta_0^2)}{16 J_1^2} \frac{J_1 \left[\frac{2b\beta_0}{(b_1-b)\sqrt{1-\beta_0^2}} \right]}{\left[\frac{2a\beta_0}{(b_1-b)\sqrt{1-\beta_0^2}} \right]}$$

которое практически сохраняет постоянную величину вплоть до $\ell = \ell_{\max}$, а затем убывает. Наконец, отношение $(E_{\ell_m} / E_{\ell_0})$ при $\ell = \ell_{\max}$ имеет порядок $\approx \gamma_0^2 \left(\frac{2bh\beta_0}{m(b_1-b)\sqrt{1-\beta_0^2}} \right)^2$, и таким образом для рассматриваемой области значений γ_0 оказываются сравнимыми только для двух-трех низших по m гармоник.

В результате таких оценок влияния членов, вошедших в (70),(73), (75) за счёт составляющих поля E_{\perp} , при дальнейших расчётах в (75) учитывались лишь члены с $m=0$, для значений $\ell = 1, 2, \dots, 20$. Кроме того, оценка влияния членов, вошедших в (75) за счёт составляющей поля E_{\parallel} , показала, что существенное значение могут иметь лишь первый (не вошедший под знак суммы) член и один-два члена суммы.

Результаты проведенных после этих упрощений расчётов представлены в таблице 2, где даны начальные и конечные значения величины γ , получившиеся после последовательного прохождения сгустком трех одинаковых резонаторов с амплитудным значением сгоронного поля $E_0 = 150 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$ (параметры те же, что и для табл.1).

Таблица 2

γ_0	$\gamma_{\text{кон}}$	$(\gamma_{\text{кон}})_{\text{ид}}$	Δ
1,502	1,891	2,966	26%
1,891	2,184	3,351	20%
2,184	2,438	3,648	17,5%

В таблице 2 приведены также конечные значения γ , вычисленные по обычной формуле

$$(\gamma_{\text{кон}})_{\text{ид}} = \gamma_0 + \frac{E_0 e h}{m_0 c^2}$$