

С 3456 + С 345д

В-225

16.VI 1967.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

9-3287-2



Ю.П. Вахрушин, В.П. Саранцев, О.В. Семенов

УСКОРЯЮЩЕЕ ПОЛЕ  
ЛИНЕЙНОГО ИНДУКЦИОННОГО УСКОРИТЕЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1967.

9-3287-2

Ю.П. Вахрушин, В.П. Саранцев, О.В. Семенов

УСКОРЯЮЩЕЕ ПОЛЕ  
ЛИНЕЙНОГО ИНДУКЦИОННОГО УСКОРИТЕЛЯ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

5004/1 мр.

## 1. В в е д е н и е

Стремление получить мощные потоки релятивистских электронов для осуществления исследований в области новых методов ускорения<sup>/1/</sup> привело к воскрешению идеи А. Боувера<sup>/2/</sup> использовать для ускорения электронов вихревое электрическое поле системы, состоящей из последовательного ряда тороидальных импульсных трансформаторов (рис. 1). Эту систему А. Боуверс назвал "магнитным соленоидом". Первичные обмотки трансформаторов включаются параллельно, а "вторичные обмотки", роль которых играет ускоряемый пучок, последовательно. Таким образом, заряженная частица при прохождении через систему должна приобрести энергию

$$W = eN \frac{U_1}{\omega_1} . \quad (1)$$

Здесь  $e$  - заряд ускоряемой частицы,  
 $N$  - число трансформаторов,  
 $U_1$  - напряжение на первичной обмотке,  
 $\omega_1$  - число витков первичной обмотки.

Из (1) следует, что величина приобретаемой энергии пропорциональна напряжению первичной обмотки, а для того, чтобы энергия, приобретаемая частицами, оставалась постоянной в течение какого-то времени  $t_u$ , необходимо, чтобы  $U_1$  было постоянно в течение этого времени. Это требование можно удовлетворить, если на первичную обмотку подавать импульс напряжения прямоугольной формы длительностью  $t_u$ . А из теории импульсных трансформаторов следует, что прямоугольный импульс может быть получен при линейном изменении индукции  $B$  в сердечнике трансформатора.

Очевидно также, что число витков первичной обмотки целесообразно принимать равным единице.

А. Боуверс рассматривает бесконечно-длинную систему и величина напряженности ускоряющего поля в этом случае является одинаковой в любой точке внутри системы. В действительности же ускоритель имеет определенную длину, обусловленную конечной энергией ускоряемых частиц. По длине ускорителя должны располагаться вакуумные агрегаты для создания и поддержания требуемого разрежения в области пучка, приборы наблюдения за пучком. Эти обстоятельства приводят к необходимости иметь достаточно существенные промежутки между группами трансформаторов (индукторов). Исходя из этого и учитывая требования производства, контроля, испытания и транспортировки, представлялось целесообразным разбить всю совокупность индукторов на отдельные группы, которые по примеру линейного ускорителя на бегущей волне будем называть секциями. Таким образом, ускоритель состоит из набора конечного числа секций с промежутками между ними.

В пределах секции между сердечниками индукторов имеется некоторый зазор, обусловленный необходимостью иметь электроизоляцию между сердечником и первичной обмоткой, демпфирующую среду, предохраняющую сердечник от тепловых и механических напряжений.

Из вышесказанного следует, что ускоряющее поле внутри ускорителя будет являться функцией  $\rho$ ,  $z$  и  $\theta$ . Поскольку для существования симметричного пучка необходимо иметь осесимметричное поле, то все элементы секции должны быть осесимметричными. При этом условии поле будет функцией координат  $\rho$  и  $z$ .

Очевидно, что при проектировании ускорителя необходимо знать величину и форму ускоряющего поля. Это позволяет, во-первых, определить оптимальные размеры индукторов, при которых обеспечивается в области пучка допустимая неоднородность ускоряющего поля и, во-вторых, дает возможность правильно подойти к выбору как самих индукторов, так и других конструктивных элементов, находящихся в области ускоряющего поля.

В связи с этим ниже рассматриваются выражения, определяющие значение ускоряющего поля в различных точках системы. Ускоряющее поле системы определяется уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{F} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}. \quad (4)$$

Здесь  $E$  — напряженность ускоряющего поля,  
 $H$  — магнитное поле в индукторе,  
 $\mu$  — магнитная проницаемость,  
 $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  
 $\sigma$  — проводимость среды.

Ускоряющее поле соленоидально, и, следовательно, может быть введен векторный потенциал  $\vec{M}$ , так что

$$\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (5)$$

Далее возьмем от обеих частей (2)  $\operatorname{rot}$ , тогда:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}, \quad (6)$$

но известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}. \quad (7)$$

Тогда для вакуума из (3), (4), (6) и (7) получаем:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Длительность импульса ускоряющего поля составляет доли микросекунды. В этом случае (8) можно переписать

$$\nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, ускоряющее поле может быть также описано уравнением Лапласа.

## 2. Поле "магнитного соленоида" конечной длины

Рассмотрим сначала поле одиночного индуктора, размеры поперечного сечения которого много меньше его радиуса (рис. 2). Замечаем, что уравнения (2), (3), (5) аналогичны уравнениям, описывающим магнитное поле постоянных токов.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (11)$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (12)$$

где  $\vec{j}$  - плотность тока, а  $\vec{A}$  - вектор-потенциал магнитного поля. Отсюда, распространив на наш случай известный способ нахождения напряженности поля кругового витка с током <sup>/3/</sup>, получим значение напряженности ускоряющего поля одиночного индуктора.

$$E_z = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{1}{[(R+\rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ K + \frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} E \right] \quad (13)$$

$$E_\rho = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{z}{\rho [(R+\rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[ -K + \frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} E \right] \quad (14)$$

Здесь  $K$  и  $E$  - эллиптические интегралы первого и второго рода, равные соответственно:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad \text{и} \quad E = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta,$$

где  $k^2 = 4R\rho / [(R+\rho)^2 + z^2]$ .

На оси системы, т.е. при  $\rho = 0$  (13) и (14) принимают вид:

$$E_{z0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \quad (15)$$

$$E_{\rho 0} = 0. \quad (16)$$

Вблизи оси

$$E_z = E_{z0} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial z^2} \rho^2. \quad (17)$$

Из (15) и (17) получаем:

$$E_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \left\{ 1 + 3 \frac{\rho^2}{[R^2 + z^2]} \left( \frac{5}{4} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]} - 1 \right) \right\}. \quad (18)$$

Исходя из принципа суперпозиции, напряженность поля ускоряющей системы, состоящей из  $N$  индукторов (рис. 3), запишем:

$$E_z = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{[(R+\rho)^2 + z_i^2]^{1/2}} \left[ K_i + \frac{R^2 - \rho^2 - z_i^2}{(R-\rho)^2 + z_i^2} E_i \right] \right\} \quad (19)$$

$$E_\rho = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{z_i}{\rho [(R+\rho)^2 + z_i^2]^{1/2}} \left[ -K_i + \frac{R^2 + \rho^2 + z_i^2}{(R-\rho)^2 + z_i^2} E_i \right] \right\}. \quad (20)$$

Вблизи оси системы, используя (18), получаем:

$$E_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sum_{i=1}^N \frac{R^2}{[R^2 + z_i^2]^{3/2}} \left\{ 1 + 3 \frac{\rho^2}{[R^2 + z_i^2]} \left( \frac{5}{4} \frac{R^2}{[R^2 + z_i^2]} - 1 \right) \right\} \quad (20^x)$$

Если зазор между соседними индукторами очень мал, то можно пренебречь дискретностью потока и суммирование в (20) заменить интегрированием. Тогда, если  $z=0$  расположить в середине системы, то

$$E_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{N}{L} \int_{-(L/2+z)}^{L/2-z} \frac{R^2}{[R^2 + z_i^2]^{3/2}} \left\{ 1 + 3 \frac{\rho^2}{[R^2 + z_i^2]} \left( \frac{5}{4} \frac{R^2}{[R^2 + z_i^2]} - 1 \right) \right\} dz_i \quad (21)$$

После интегрирования получаем:

$$E_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{N}{L} \left\{ \frac{L/2-z}{[R^2 + (L/2-z)^2]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{\rho^2 R^2}{[R^2 + (L/2-z)^2]^2} \right] + \frac{L/2+z}{[R^2 + (L/2+z)^2]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{\rho^2 R^2}{[R^2 + (L/2+z)^2]^2} \right] \right\}. \quad (22)$$

Величина  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{N}{L}$  равна напряжению, прикладываемому к первичной обмотке, отнесенному к единице длины системы. Обозначим его  $V$ . Введем также следующие обозначения:

$$\frac{\rho}{R} = r, \quad \frac{L}{2R} = l, \quad \frac{z}{R} = \xi. \quad (23)$$

Тогда (22) переписывается:

$$E_z = -\frac{V}{2} \left\{ \frac{l - \xi}{[1 + (l - \xi)^2]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{[1 + (l - \xi)^2]^2} \right] + \frac{l + \xi}{[1 + (l + \xi)^2]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{[1 + (l + \xi)^2]^2} \right] \right\}. \quad (22^x)$$

В таблице 1 и на рис. 4 показано значение поля вблизи оси системы в зависимости от  $l$ , полученное из выражения (22<sup>x</sup>), причем,  $E_{z00}$  - поле на оси системы в центре.

Т а б л и ц а 1

| $l$         | 1    | 1,5  | 3    | 4    | 5    | 10   |
|-------------|------|------|------|------|------|------|
| $E_{z00}/V$ | 0,71 | 0,83 | 0,95 | 0,98 | 0,98 | 0,99 |

Итак, имеем:

1. Если  $l$  мало, то в пределах секции частица будет приобретать только часть той энергии, которую можно было бы ожидать, исходя из величины прикладываемого первичного напряжения. Так, даже при  $l = 5$  потери энергии составляют ~10%, а при  $l = 10$  они уменьшаются до ~5%.

2. Неоднородность поля, превышающая 0,5%, появляется только вблизи края системы, на расстоянии от края  $1,5 - 2R$ .

3. При заданном  $l$  абсолютное значение области, в которой  $E_z$  имеет заданную неоднородность, пропорционально  $R$ .

Рассмотрим теперь систему индукторов, размеры поперечного сечения которых соизмеримы со средним радиусом (рис. 5). Поле в такой системе можно рассматривать как сумму полей от элементарных потоков

$$E_z = -\frac{1}{2\pi R a} \frac{\partial B_a}{\partial t} \sum_{i=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} dx_i \int_{R_a}^{R_b} \frac{1}{[(R+\rho)^2 + (z_i - x_i)^2]^{1/2}} [K_1(x_i, R_1, z_i) + \frac{R_1^2 - \rho^2 - (z_i - x_i)^2}{(R_1 - \rho)^2 + (z_i - x_i)^2} E_1(x_i, R_1, z_i)] R_1 dR_1 \quad (24)$$

$$E_\rho = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial B_a}{\partial t} \sum_{i=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} dx_i \int_{R_a}^{R_b} \frac{(z_i - x_i)}{\rho [(R+\rho)^2 + (z_i - x_i)^2]^{1/2}} [-K_1(x_i, R_1, z_i) + \frac{R_1^2 + \rho^2 + (z_i - x_i)^2}{(R_1 - \rho)^2 + (z_i - x_i)^2} E_1(x_i, R_1, z_i)] R_1 dR_1 \quad (25)$$

Очевидно, что решение таких уравнений возможно только вычислительным методом. Однако и в этом случае трудоемкость работы огромна. Более быстрым и надежным является моделирование в электролитической ванне. Качественно картина поля останется подобной указанной на рис. 4. Очевидно, что распределение поля может быть улучшено, если уменьшать долю энергии поля, рассеиваемой с внешней стороны системы. Это может быть сделано, если сердечники индукторов окружить кожухом с высокой проводимостью. Этот кожух будет также экранировать ускоряющее поле от влияния проводящих масс, расположенных вблизи ускорителя. Кроме того, необходимо, чтобы первичная обмотка была симметрична относительно оси, т.е. иметь по крайней мере три параллельных витка, расположенных под углом  $120^\circ$ . В противном случае наблюдается искажение ускоряющего поля.

Необходимо также иметь в виду, что внутри ускоряющей системы размещаются такие узлы установки, как вакуумная трубка или элементы формирования пучка, что также оказывает влияние на форму и величину ускоряющего поля.

Из сказанного видно, что реальная ускоряющая система должна отличаться от схемы, рассмотренной выше.

### 3. Поле в системе с заданными граничными условиями

Схемы двух возможных разновидностей ускоряющих систем описаны в /4/ и /5/ и приведены на рис. 6 и 7. Форма поля в этом случае будет определяться решением уравнения Лапласа (9) с граничными условиями, определяемыми формой системы.

Уравнение Лапласа для составляющих напряженности поля переписется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} - \frac{E_\rho}{\rho^2} = 0. \quad (27)$$

Решение (26) имеет вид:

$$E_z = A_1 I_0(k_1 \rho) [B_1 \cos k_1 z + C_1 \sin k_1 z], \quad (28)$$

где  $I_0(k_1 \rho)$  - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $k_1$  - постоянные, определяемые граничными условиями.

Решение (27) запишется:

$$E_\rho = A_2 I_1(k_2 \rho) [B_2 \cos k_2 z + C_2 \sin k_2 z], \quad (29)$$

где  $I_1(k_2 \rho)$  - модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка, а  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  и  $k_2$  - постоянные, определенные из граничных условий.

Граничные условия будут представлять собой периодическую функцию, которую можно разложить в ряд Фурье, и, следовательно, граничные условия можно записать в виде:

$$E_{z\alpha} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^m \alpha_n \cos n \frac{2\pi}{T} z + \sum_1^m \beta_n \sin n \frac{2\pi}{T} z \quad (30)$$

$$E_{\rho\alpha} = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_1^m \gamma_n \cos n \frac{2\pi}{T} z + \sum_1^m \delta_n \sin n \frac{2\pi}{T} z. \quad (31)$$

При такой форме записи граничных условий составляющие поля также будут представлены суммой гармоник, амплитуда и частота которых определяются из сопоставления с разложением граничной функции.

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 6. Значение на внутреннем радиусе системы можно представить периодической функцией, изображенной на рис. 6. Мы полагаем, что в зазоре между индукторами поле однородно и равно  $E_\alpha = \frac{U_1}{S_1}$ , а на поверхности индуктора равно нулю, т.е.

$$E_{z\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq z < \frac{s - s_1}{2}$$

$$E_{z\alpha} = E_\alpha \quad \text{при} \quad \frac{s - s_1}{2} < z \leq \frac{s}{2}.$$

Тогда коэффициенты разложения в ряд Фурье будут иметь вид:

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{4 E_\alpha}{\pi \eta} \cos \frac{\pi \eta}{2} \sin n \frac{\pi \eta}{2} \quad (32)$$

$$\beta_n = 0, \quad (33)$$

где  $\eta = s_1/s$ .

Из (28), (30), (32) и (33) получаем решение для осевой составляющей ускоряющего поля с учетом граничных условий:

$$E_z = \eta E_\alpha \left( 1 + \sum_1^m (-1)^n \frac{4}{\pi \eta n} \cos n \frac{\pi \eta}{2} \int \sin n \frac{\pi \eta}{2} \frac{I_0(n \frac{2\pi}{s} \rho)}{I_0(n \frac{2\pi}{s} a)} \cos n \frac{2\pi}{s} z \right) \quad (34)$$

Введем обозначение

$$E_n = \frac{(-1)^n 4 \cos n \frac{\pi \eta}{2} \sin n \frac{\pi \eta}{2}}{\pi \eta n I_0(n \frac{2\pi}{s} a)} \quad (35)$$

Тогда (34) переписывается

$$E_z = \eta E_a \left[ 1 + \sum_1^m E_n I_0 \left( n \frac{2\pi}{s} \rho \right) \cos n \frac{2\pi}{s} z \right]. \quad (34)$$

Здесь  $\eta E_a = U_1/s$  — постоянная составляющая ускоряющего поля.  $I_0 \left( n \frac{2\pi}{s} a \right)$  очень быстро растет с ростом  $n$  и поэтому в достаточно широкой, наиболее интересной области, можно ограничиться только первым членом ряда. Отношение амплитуды переменной составляющей осевого поля к его постоянной дано на рис. 8а для нескольких значений  $a/s$  и  $v_1/v$ . Видно, что основное значение имеет величина отношения  $a/s$  и для достаточно однородного поля необходимо иметь  $a/s > 1$ . Переменная составляющая не превышает одного процента в области  $\rho/a < 1/2$ , если  $a/s \geq 2$ . Изменение  $v_1/v$  мало сказывается на величине амплитуды переменной составляющей.

Вид граничной функции для радиальной составляющей также дан на рис. 8, но аналитическое ее выражение не очевидно.

Однако, поскольку эта функция нечетная, то

$$\gamma_n = 0. \quad (36)$$

Из (29), (31), (36) получаем:

$$E_\rho = \sum_1^m \delta_n \frac{I_1 \left( n \frac{2\pi}{s} \rho \right)}{I_1 \left( n \frac{2\pi}{s} a \right)} \sin n \frac{2\pi}{s} z. \quad (37)$$

Для определения  $\delta_n$  воспользуемся тем обстоятельством, что при  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , что имеет место внутри системы.

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z}. \quad (38)$$

Беря производные от (34) и (37) и приравнявая члены с одинаковыми  $n$ , получаем:

$$\delta_n = \nu E_a E_n I_1 \left( n \frac{2\pi}{s} a \right). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (37), получаем окончательное выражение для  $E_\rho$

$$E_\rho = \eta E_a \sum_1^m E_n I_1 \left( n \frac{2\pi}{s} \rho \right) \sin n \frac{2\pi}{s} z. \quad (40)$$

Значение отношения амплитуды  $E_\rho$  и  $\eta E_a$  показано на рис. 8б.

Очевидно, что вблизи оси амплитуда радиальной составляющей меньше, и притом особенно значительно для малых  $a/s$ , чем амплитуда переменной осевой составляющей. Однако вдали от оси они становятся соизмеримыми, ибо при увеличении аргумента как  $I_1$ , так и  $I_0$  стремятся к одному значению.

Значение граничной функции системы (рис. 7) не очевидно, но форма ее соответствует изображенной на этом рисунке. Учитывая, что  $E_{za}$  функция четная, а  $E_{\rho a}$  — нечетная, получаем аналогично предыдущему:

$$E_z = E_a \left[ 1 + \sum_1^m \alpha_n \frac{I_0 \left( n \frac{2\pi}{s} \rho \right)}{I_0 \left( n \frac{2\pi}{s} a \right)} \cos n \frac{2\pi}{s} z \right]. \quad (41)$$

$$E_\rho = \sum_1^m \delta_n \frac{I_1 \left( n \frac{2\pi}{s} \rho \right)}{I_1 \left( n \frac{2\pi}{s} a \right)} \sin n \frac{2\pi}{s} z. \quad (42)$$

Поскольку поле на границе более однородно, чем для системы рис. 8, то величина  $\alpha_n$  и  $\delta_n$  будет несколько меньше, чем в предыдущем случае, но как указывалось выше, это не будет иметь преобладающего значения, и все сказанное для предыдущей системы справедливо и для этой.

В случае вычисления поля при  $\rho/a > 1/2$  нельзя ограничиваться одной первой гармоникой и доведение результата до числа имеет определенные трудности. Значения поля в этой области могут быть получены путем моделирования.

#### 4. Поле у края ускоряющей системы

Рассмотрим поле вблизи края ускоряющей системы (рис. 9). Можно полагать, что у края система ограничена проводящим диском, имеющим отверстие радиуса  $a_1$ .

Решение уравнения Лапласа для поля, ограниченного с одной стороны диском с отверстием, имеет наиболее простой вид в сплюснутых сферических координатах<sup>3/</sup>. Эти координаты представляют собой ортогональные семейства сфероидов



$$\frac{z_1^2}{c_1^2 \zeta^2} + \frac{\rho^2}{c_1^2 (\zeta^2 + 1)} = 1 \quad (43)$$

и гиперболоидов

$$\frac{z_1^2}{-c_1^2 \chi^2} + \frac{\rho^2}{c_1^2 (1 - \chi^2)} = 1. \quad (44)$$

Чтобы координаты были непрерывными во всем пространстве, где существует поле, выберем  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $-\infty < \zeta < \infty$ , при этом  $\zeta$  имеет тот же знак, что и  $z_1$ .

Исключив последовательно  $\rho$  и  $z_1$  из уравнений (43) и (44), получим

$$z_1 = c_1 \zeta \chi \quad (45)$$

$$\rho = c_1 [(1 + \zeta^2)(1 - \chi^2)]^{1/2}. \quad (46)$$

В криволинейной системе координат уравнение Лапласа скалярной величины имеет вид

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right\} = 0. \quad (47)$$

В этом выражении коэффициенты  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  вычисляются по формулам:

$$h_1^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (48)$$

$$h_2^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \chi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \chi} \right)^2 \quad (49)$$

$$h_3^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2. \quad (50)$$

Но поскольку

$$x = \rho \operatorname{Cos} \theta, \quad y = \rho \operatorname{Sin} \theta, \quad z = z_1, \quad (51)$$

то значения для коэффициентов применяют следующий вид:

$$h_1 = c_1 \left[ \frac{\zeta^2 + \chi^2}{1 + \zeta^2} \right]^{1/2} \quad (52)$$

$$h_2 = c_1 \left[ \frac{\zeta^2 + \chi^2}{1 - \chi^2} \right]^{1/2} \quad (53)$$

$$h_3 = c_1 [(1 + \zeta^2)(1 - \chi^2)]^{1/2}. \quad (54)$$

Учитывая, что если для осесимметричного поля  $\partial U / \partial \theta = 0$ , то для потенциала поля, который обозначим  $U$ , уравнение Лапласа в принятой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ (1 + \zeta^2) \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right] + \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ (1 - \chi^2) \frac{\partial U}{\partial \chi} \right] = 0. \quad (55)$$

Решение уравнения (55) записывается в виде функций Лежандра 1-го и 2-го рода

$$U = \sum_n [A_n P_n(\chi) + B_n Q_n(\chi)] [A_n P_n(1/\zeta) + B_n Q_n(1/\zeta)]. \quad (56)$$

При  $z_1 \rightarrow -\infty$  потенциал должен совпадать с потенциалом невозмущенного поля. Поскольку при  $\zeta \rightarrow -\infty$  можно пренебречь единицей по сравнению с  $\zeta$ , то из (45) и (46) получаем:

$$r^2 = z_1^2 + \rho^2 \rightarrow c_1^2 \zeta^2 \chi^2 + c_1^2 \zeta^2 - c_1^2 \zeta^2 \chi^2 = c_1^2 \zeta^2,$$

т.е.

$$\zeta \rightarrow \pm \frac{r}{c_1}, \quad \chi = \frac{z_1}{c_1 \zeta} \rightarrow \frac{|z_1|}{r} = \operatorname{Cos}(z_1 / r).$$

С другой стороны, при  $z_1 \rightarrow \infty$  значением переменной составляющей потенциала можно пренебречь и считать, что

$$U = E_{\infty} r \cos(z_1, \hat{r}),$$

т.е.  $U = \chi$ , и, следовательно, решение содержит только  $P_1(\chi)$ , а это значит, что  $\nu=1$ . Под  $E_{\infty}$  понимается значение постоянной составляющей поля на бесконечном удалении от отверстия.

С учетом сказанного после подстановки в (56) выражений для функций Лежандра уравнение для потенциала принимает вид:

$$U = \chi [i A_3 \zeta + B_3 (\zeta \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \zeta - 1)]. \quad (57)$$

Напряженность ускоряющего поля определяется дифференцированием  $U$  по  $z_1$

$$E_{z_1} = -\frac{\partial U}{\partial z_1} = -\frac{\partial U}{c_1 \chi \partial \zeta} = -\frac{1}{c_1} [i A_3 + B_3 (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \zeta - \frac{\zeta}{1+\zeta^2})]. \quad (58)$$

Рассмотрим сначала степень возмущения на краю с постоянной составляющей ускоряющего поля. При  $z_1 \rightarrow \infty$ ,  $E_{0_1} = 0$ , тогда  $\frac{i A_3}{c_1} = 0$ .

При  $z_1 \rightarrow -\infty$ ,  $E_{0_1} = E_{\infty}$  и (58) принимает вид

$$E_{0_1} = \frac{E_{\infty}}{\pi} (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \zeta - \frac{\zeta}{1+\zeta^2}). \quad (59)$$

При  $\rho = a_1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\zeta = \chi = 0$  и из (46) получаем, что  $c_1 = a_1$ . Начало координат может быть перенесено в точку 0, и уравнения (45) и (59) переписутся следующим образом:

$$z - \frac{L}{2} = a_1 \zeta \chi \quad (60)$$

$$E_0 = \frac{E_{00}}{\pi} (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \zeta - \frac{\zeta}{1+\zeta^2}). \quad (61)$$

На рис. 9 изображено графически возмущение поля, обусловленное отверстием в диске. Видно, что возмущение сказывается на расстоянии, не превышающем 3-х радиусов отверстия. Поэтому уже при длине системы в три диаметра отверстия поле в центре соответствует приложенному на единицу длины напряжению.

Указанное соотношение легко выполнимо на практике. Часть энергии, которую приобретает частица при прохождении системы, составляет 95% для  $\frac{L}{2R} = 1,5$  и 98% для  $\frac{L}{2R} = 3$ , если  $a_1 = \frac{R}{3}$ .

В то же время в системе без внешнего кожуха при тех же соотношениях радиуса и длины доля энергии в первом случае составляет 73%, а в другом 84%, т.е. значительно меньше, чем в системе с кожухом. Неоднородность поля при  $0 \leq \rho \leq R/3$  для системы без кожуха составляет ~1%, а с кожухом меньше 0,5% для обоих случаев. Отметим, что если источник и приемник заряженных частиц разместить на некотором расстоянии от края системы, составляющем  $\sim 2a_1$ , то частица приобретает практически всю энергию, чего нельзя сказать о системе без кожуха. Наличие периодической составляющей поля не изменит качественно картины, полученной для постоянной составляющей, но может повлиять на неоднородность энергии частиц. Это следует учесть моделированием системы.

#### Л и т е р а т у р а

1. В.И. Векслер. Атомная энергия, 2, 427 (1957).
2. A. Bowersy, Elektrische Hochspannungen, Berlin, 15, s. 83, 1939
3. В. Смайт. Электростатика и электродинамика, И.Л., 1954.
4. А.И. Анацкий, О.С. Богданов, П.В. Букаев, Ю.П. Вахруши и др. Атомная энергия, 21, 439 (1966).
5. N. Christofilos. В кн. "Труды Международной конференции по ускорителям высоких энергий" (Дубна, 1963) М. Атомиздат, 1964, стр. 1073.
6. П.И. Романовский. Ряды Фурье. Теория поля. М. Физматгиз, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 апреля 1967 г.

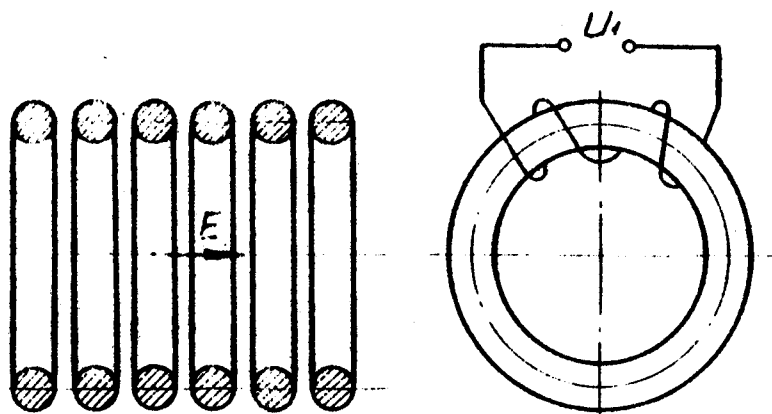


Рис. 1. "Магнитный соленоид" А. Боуверса.

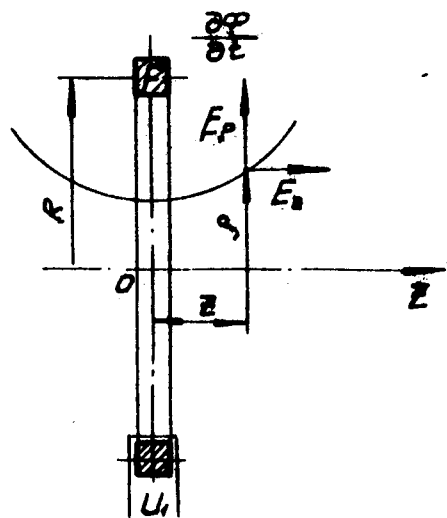


Рис. 2. Схема индуктора.

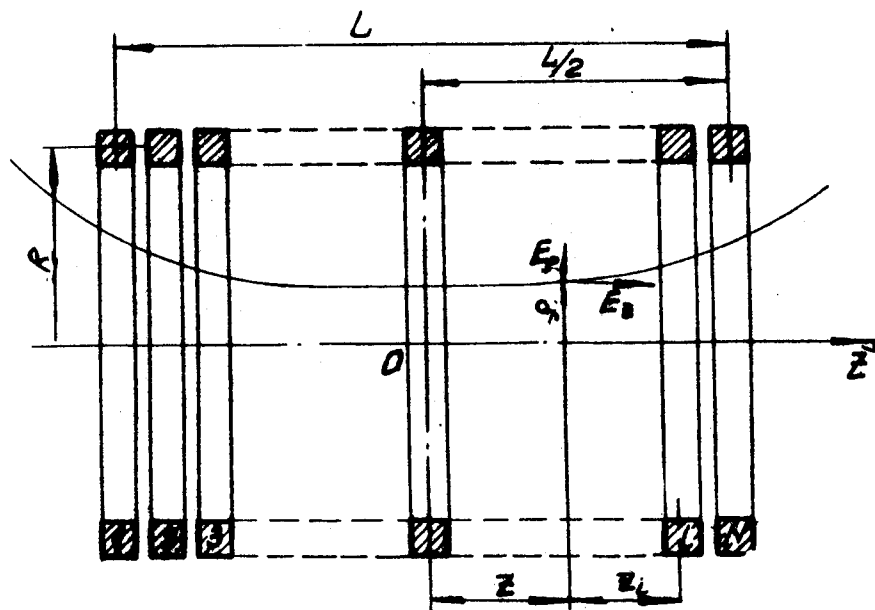


Рис. 3. "Магнитный соленоид" с непрерывно распределенным потоком с малыми размерами сечения индукторов.

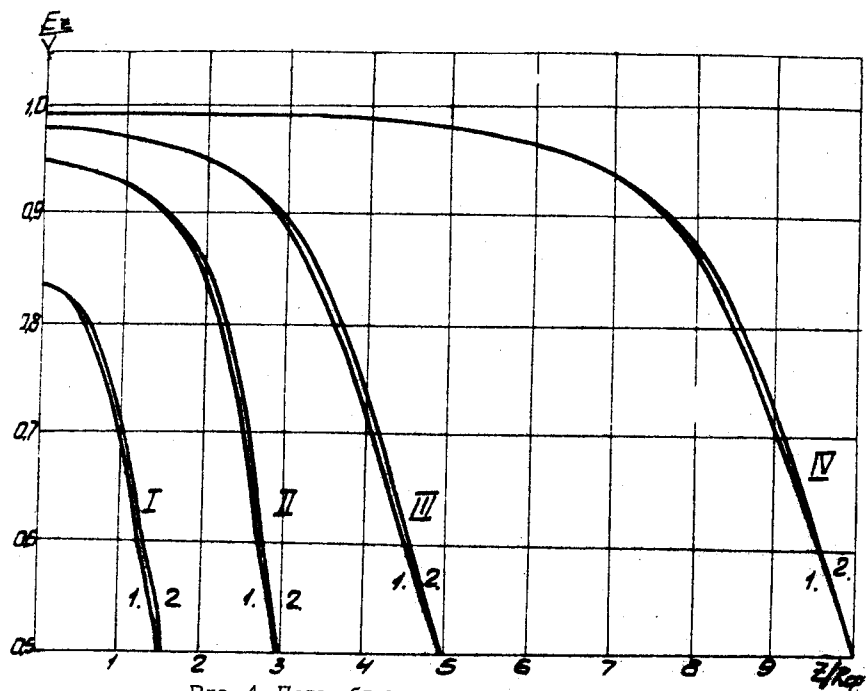


Рис. 4. Поле вблизи оси магнитного соленоида.

I  $\frac{L}{2R} = 1,5$ ; II  $\frac{L}{2R} = 3$ ; III  $\frac{L}{2R} = 5$

IV  $\frac{L}{2R} = 10$ ; 1.  $\rho/R = 0$  2.  $\rho/R = 1/3$

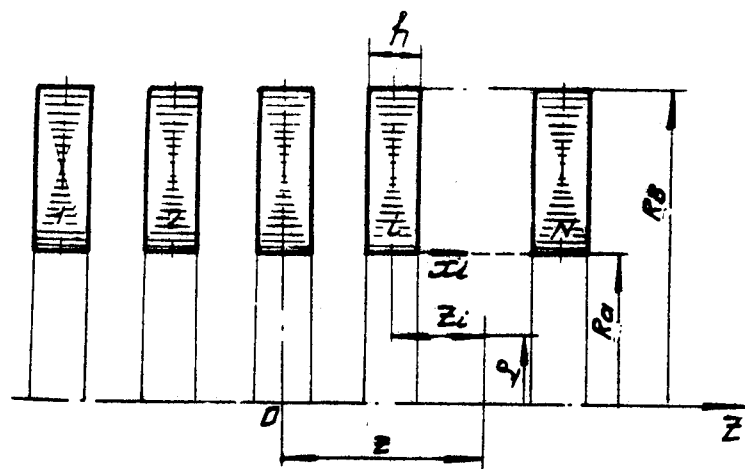


Рис. 5. "Магнитный соленоид" с дискретным распределением потока.

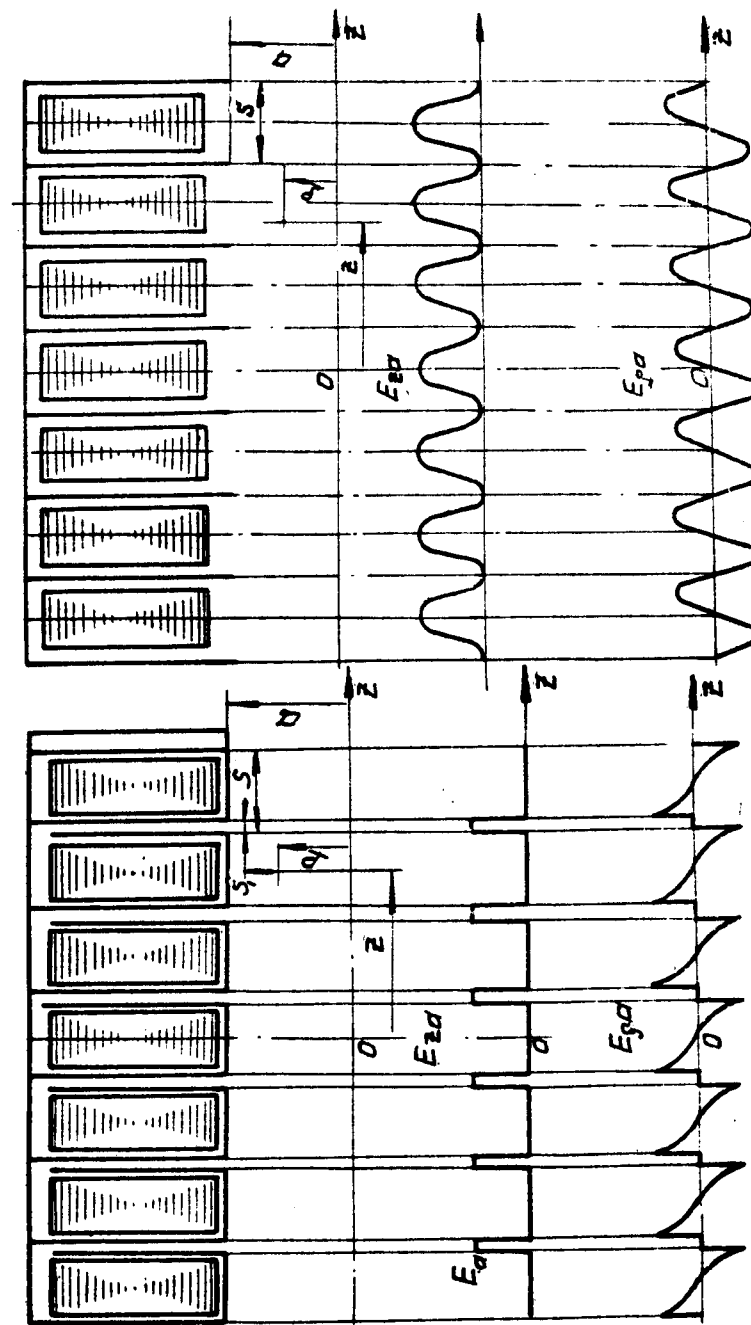


Рис. 6. Ускоряющая система ЛДУ-3000.

Рис. 7. Ускоряющая система ускорителя установки "Астро".

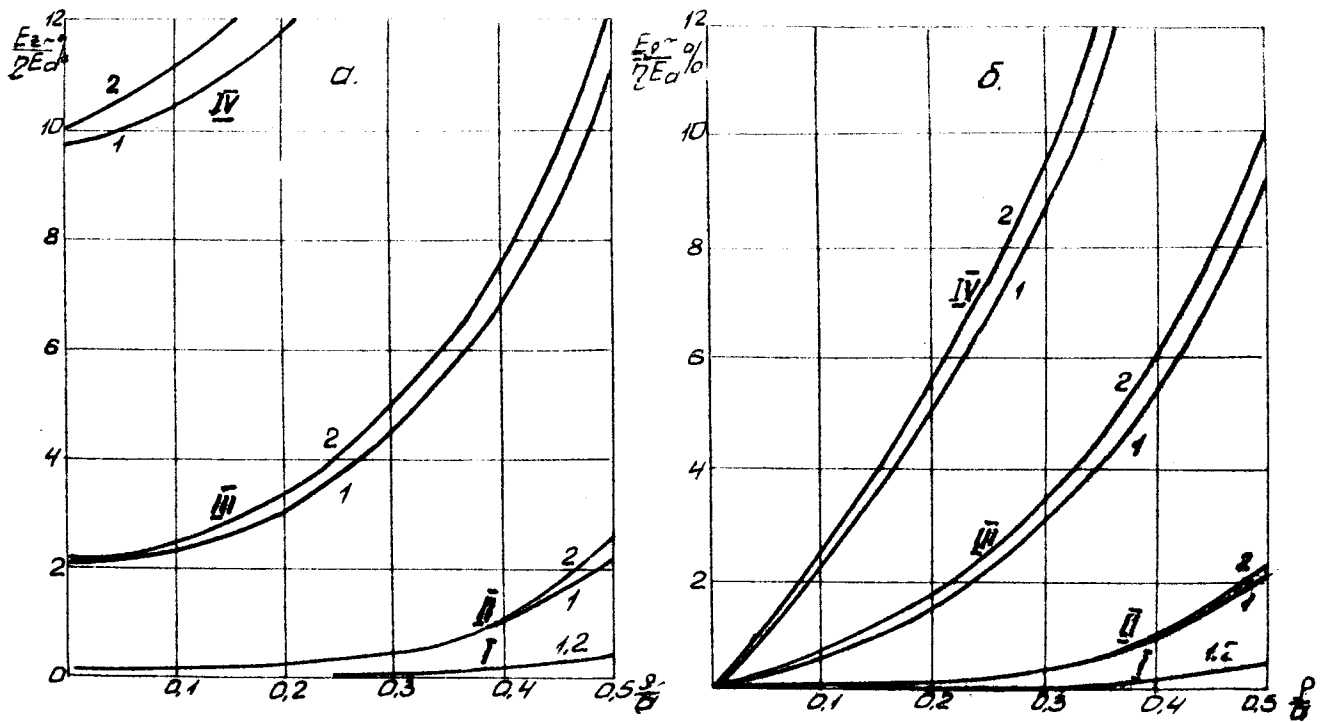


Рис. 8. Амплитуда 1-ой гармоники поля в ускоряющей системе типа ЛИУ-3000.  
а - осевая составляющая, б - радиальная составляющая.

I  $v/s = 2$ ; II  $v/s = 1,5$ ; III  $v/s = 1$ ; IV  $v/s = 0,75$

1.  $s_1/s = 1/4$ ; 2.  $s_1/s = 1/8$

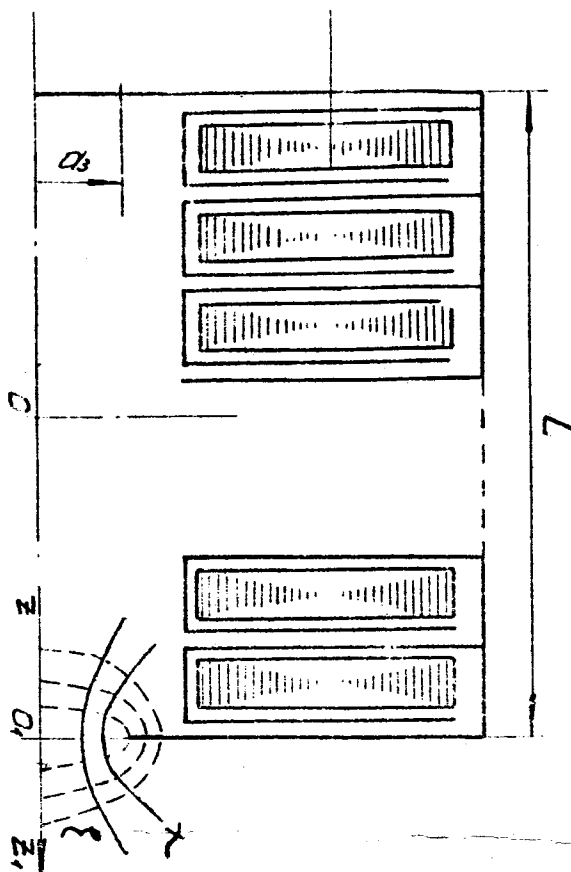


Рис. 9. К вычислению поля на краю ускоряющей системы.