ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

9-3016-2

М.Л. Иовнович

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

1966

9-3016-2

М.Л. Иовнович

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

В некоторых способах удержания плазмы, наряду с магнитным полем, используются высокочастотные электромагнитные поля, создающие потенциальную яму для частиц плазмы[1]. Ряд вопросов устойчивости колебаний плазмы, помещенной в потенциальную яму, был рассмотрен ранее. Например, в[2] изучались колебания плазмы в яме, которые не распространяются вдоль слоя плазмы. Рассмотрим безграничный плоский слой квазинейтральной плазмы, частицы которой поперек слоя (в направлении оси z) удерживаются параболической потенциальной ямой. Так как частицы в яме совершают гармонические колебания, а вращение частиц в однородном магнитном поле можно представить как колебания по взаимно перпендикулярным направлениям, то методы решения обеих задач одинаковы. Метод изучения колебаний плазмы в магнитном поле описан во многих статьях: для слабонеоднородной плазмы, например, в обзоре[3], для плазмы с произвольной неоднородностью – в[4]. Пользуясь этим методом, рассмотрим низкочастотные потенциальные колебания малой амплитуды, возникшие в слое плазмы. Будем следовать общему методу решения задачи о колебаниях плазмы во внешнем поле, изложенному в обзоре[5].

Изменение функции распределения частиц плазмы, вызванное потенциалом электрического поля Φ, находится в результате решения линеаризованного кинетического уравнения в виде[5]

$$f_1(k_1, k_2, z, \vec{v}, \omega) = \frac{ei}{m}\int_{-\infty}^{\infty} dk_3\, \Phi(\vec{k}, \omega) \int_0^{\infty} d\tau\, e^{i[k_3 z(\tau) + (\omega - \vec{k}_t \cdot \vec{v}_t)\tau]} \cdot \left(\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}(\tau)}\right), \qquad (1)$$

где

$$\vec{k}_t \cdot \vec{v}_t = \sum_{i=1}^{2} k_i v_i\,, \quad \Phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\vec{k}, \omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\, d^8 k\, d\omega$$

и т.д.,

f_0 – равновесная функция распределения, координата и скорость частицы $\vec{x}(\tau)$, $\vec{v}(\tau)$ находятся с помощью уравнений характеристик кинетического уравнения. Последние представляют собой уравнения движения частицы в равновесном состоянии, т.е. в потенциальной яме (равновесное электрическое поле равно нулю в силу квазинейтральности плазмы):

$$\ddot{x} = \ddot{y} = 0\,, \qquad \ddot{z} = -\omega_0^2 z\,, \qquad (2)$$

где ω_0 –частота колебаний частицы в яме. Решая уравнения (2), получим

$$z(\tau) = A\,\mathrm{Sin}(\alpha - \omega_0\tau), \quad v_3(\tau) = A\omega_0\,\mathrm{Cos}(\alpha - \omega_0\tau), \tag{3}$$

$$v_i(\tau) = v_i \quad , \quad (i=1,2),$$

где величины A и α определяются из уравнений $z = A\,\mathrm{Sin}\alpha$, $v_3 = A\omega_0\mathrm{Cos}\alpha$. Равновесная функция распределения зависит от энергии, пропорциональной величине $\epsilon = v^2 + \omega_0^2 z^2$. Разложим экспоненту в (1) в ряд Фурье /5/ $e^{ik_3 z(\tau)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_3 A)\, e^{in(\alpha-\omega_0\tau)}$ и вычислим интеграл по времени с помощью формулы $\int\limits_0^\infty e^{i\omega\tau}\,d\tau = \frac{i}{\omega}$, где к ω добавлена малая положительная мнимая часть. В результате получим

$$f_1(k_1, k_2, z, \vec{v}, \omega) = \frac{2e}{m}\frac{df_0}{d\epsilon}\Big[\Phi(k_1, k_2, z, \omega) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega - n\omega_0 - \vec{k}_t\cdot\vec{v}_t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_3\,\Phi(\vec{k},\omega)\cdot J_n(k_3 A)\,e^{in\alpha}\Big]. \tag{4}$$

Выберем в качестве равновесной максвелловскую функцию распределения $f_0 = \frac{n_0}{\pi^2 v_0^3 a}e^{-\epsilon/v_0^2}$, где v_0 –тепловая скорость, n_0 –поверхностная плотность частиц в слое, $a = \frac{v_0}{\omega_0}$ – ширина слоя. С помощью формулы $n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,d^3v$ получим равновесную плотность частиц в виде $\frac{n_0}{\sqrt{\pi}\,a}\,e^{-z^2/a^2}$, а изменение плотности (k_2 можно приравнять нулю):

$$n_1(k_1, 0, z, \omega) = -\frac{2en_0 e^{-z^2/a^2}}{m v_0^2\sqrt{\pi}\,a}\Big[\Phi(k_1, 0, z, \omega) + \frac{2\beta W(\beta)\,i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\Phi(k_1, 0, z', \omega)K(z, z')\Big], \tag{5}$$

где $\beta = \frac{\omega}{|k_1|v_0}$, $W(\beta)$ –функция Крампа от комплексного аргумента, /3/

$$K(z, z') = \frac{1}{v_0}\int\limits_0^\infty dv_3\, e^{-v_3^2/v_0^2}\int\limits_0^\infty dk\,\mathrm{Cos}\,kz'\,J_0(kA). \tag{6}$$

Поскольку рассматриваются колебания с частотой, много меньшей частоты колебаний частицы в яме ($\omega \ll \omega_0$), и, кроме того, $|k_1|v_0 \ll \omega_0$, то в выражении (5) из всех членов суммы по гармоникам частоты колебаний частицы оставлен член с $n = 0$. Последний превосходит любой отброшенный член более чем в $\frac{\omega_0}{\omega}$ раз /3/.

Вычислим выражение (6). С помощью табличного интеграла $\int\limits_0^\infty dk\,\mathrm{Cos}\,kt\;J_0(k)$, который равен нулю при $|t| > 1$ и $(1 - t^2)^{-1/2}$ при $|t| < 1$, приведем (6) к виду

$$K(z, z') = \begin{cases} \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty dt\,e^{-t^2}(t^2 + t_1^2)^{-1/2} & \text{при } z^2 > z'^2, \quad (7) \\ \frac{1}{a}\int\limits_{t_2}^\infty dt\,e^{-t^2}(t^2 - t_2^2)^{-1/2} & \text{при } z^2 < z'^2, \quad (8) \end{cases}$$

где $t_1 = (u^2 - u'^2)^{1/2}$, $t_2 = (u'^2 - u^2)^{1/2}$, $u = \frac{z}{a}$, $u' = \frac{z'}{a}$.

Сделаем в (7) замену $t = t_1 \operatorname{sh}\psi$, в (8) $t = t_2 \operatorname{ch}\psi$. Учитывая, что $\int\limits_0^\infty e^{-r\operatorname{ch}\psi} d\psi = K_0(r)$, получим

$$K(z, z') = \frac{1}{2a} e^{\frac{1}{2}(u^2 - u'^2)} K_0(\tfrac{1}{2}|u^2 - u'^2|). \tag{9}$$

Подставляя полученное выражение для плотности частиц в уравнение Пуассона $\nabla^2 \Phi = -4\pi \sum e n_1$ (суммирование проводится по всем сортам заряженных частиц плазмы), получим интегро-дифференциальное уравнение для потенциала:

$$\left(\frac{d^2}{du^2} - \lambda\right)\Phi(u) = \mu e^{-u^2} \Phi(u) + \frac{\nu}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du' \Phi(u') e^{-\frac{1}{2}(u^2 + u'^2)} K_0(\tfrac{1}{2}|u^2 - u'^2|), \tag{10}$$

где $\Phi(u)$ обозначает величину $\Phi(k_1, 0, u, \omega)$, $\lambda = k_1^2 a^2$, $\mu = \sum \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$, $\nu = i \sum \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \beta W(\beta)$, $\omega_p^2 = \frac{8\sqrt{\pi} e^2 n_0}{ma}$. При выводе уравнения (10) использовано условие квазинейтральности плазмы. Как показывает выражение для равновесной плотности частиц, квазинейтральность обеспечивается при совпадении поверхностной плотности и ширины слоя для электронов с соответствующими величинами для слоя ионов.

Уравнение (10) описывает собственные колебания плазмы плоского слоя. При его решении учтем, что потенциал всюду конечен и исчезает на бесконечности, а ядро уравнения вещественное и симметричное. Умножая уравнение (10) на комплексно-сопряженное значение потенциала и интегрируя по объему, занятому плазмой, получим

$$\lambda = - \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d\Phi}{du}\right|^2 du + \mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} |\Phi|^2 du + \frac{\nu}{\pi} f}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 du}, \tag{11}$$

где

$$f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} du' \Phi^*(u) \Phi(u') e^{-\frac{1}{2}(u^2 + u'^2)} K_0(\tfrac{1}{2}|u^2 - u'^2|).$$

Поскольку в силу указанных свойств ядра уравнения величина f вещественна, из выражения (11) следует, что мнимая часть ν равна нулю.

Рассмотрим волны в плазме, которые при распространении в слое слабо затухают или нарастают. В этом случае декремент $\gamma = \operatorname{Im}\omega \ll \operatorname{Re}\omega$. Воспользуемся известными разложениями функции Крампа /5/:

$$W(\beta) \approx \frac{i}{\sqrt{\pi}\beta}\left(1 + \frac{1}{2\beta^2}\right) + e^{-\beta^2} \quad \text{при} \quad |\beta| \gg 1, \ |\operatorname{Re}\beta| \gg |\operatorname{Im}\beta|,$$

$$W(\beta) \approx 1 \quad \text{при} \quad |\beta| \ll 1.$$

Дальнейшее рассмотрение аналогично случаю однородной изотропной плазмы. Рассмотрим следующие виды волн:

1) волна, фазовая скорость которой много больше тепловых скоростей частиц $|\beta_i|\gg 1, |\beta_e|\gg 1$ (индексом i отмечена величина для ионов, e – для электронов);

2) волна, соответствующая ионно-звуковой в однородной плазме, для которой $|\beta_i|\gg 1$, $|\beta_e|\ll 1$.

С помощью указанных приближений для функции Крампа получим для волны 1):

$$\mathrm{Re}\,\nu = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\left(1+\frac{1}{2\beta^2}\right), \quad \mathrm{Im}\,\nu = \sum\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\left(\frac{\delta\beta}{\sqrt{\pi}\,\beta^3}+\beta e^{-\beta^2}\right), \tag{12}$$

для волны 2):

$$\mathrm{Re}\,\nu = -\frac{\omega_{pi}^2}{\sqrt{\pi}\,\omega_{0i}^2}\left(1+\frac{1}{2\beta_i^2}\right), \quad \mathrm{Im}\,\nu = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2}\left(\frac{\delta\beta_i}{\sqrt{\pi}\,\beta_i^3}+\beta_i e^{-\beta_i^2}\right)+\beta_e\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{0e}^2},$$

где $\beta=\dfrac{\mathrm{Re}\,\omega}{|k_1|v_0}$, $\delta\beta=\dfrac{\gamma}{|k_1|v_0}$. Приравнивая нулю мнимую часть ν, найдем, что независимо от знака реальной части частоты колебаний плазмы декремент отрицателен для обоих видов волн.

Таким образом, обе волны затухают при распространении вдоль слоя.

Найдем спектр возникающих в слое колебаний плазмы. В уравнении (10) интегро-дифференциальный оператор – самосопряженный в силу вещественности и симметрии ядра, а параметр λ – положителен. Поэтому к его решению применимы вариационные методы. Если в уравнении (10) функцию Макдональда заменить δ-функцией так, чтобы обе функции имели особенности в одних и тех же точках, то уравнение примет вид

$$\frac{d^2\Phi}{du^2}+\mu_0 e^{-u^2}\Phi=\lambda\Phi. \tag{14}$$

Минимальное собственное значение уравнения (14) находится в /6/ вариационным методом с помощью пробной функции $\Phi=e^{-\frac{p^2u^2}{2}}$, где $p>0$ –вариационный параметр. Исходя из аналогии между уравнениями, применим ту же пробную функцию для вычисления собственного значения уравнения (10). Подставим пробную функцию в (11). Интеграл вычислим с помощью замены переменных $u=\sqrt{2r}\,\mathrm{Cos}\,\phi$, $u'=\sqrt{2r}\,\mathrm{Sin}\,\phi$. Интеграл приводится к виду

$$f=4\int_0^\infty dr e^{-(1+p^2)r}\int_0^{\pi/2}K_0(r\,\mathrm{Cos}\,\phi)\,d\phi = 2\pi\int_0^\infty dr e^{-(1+p^2)r}I_0\!\left(\frac{r}{2}\right)K_0\!\left(\frac{r}{2}\right)=\frac{2\pi}{1+p^2}K(k),$$

где $K(k)$ –полный эллиптический интеграл первого рода, модуль которого $k=[1-(1+p^2)^{-2}]^{1/2}$. В результате получим

$$\lambda=-p\left(\frac{2\nu K(k)}{\sqrt{\pi}(1+p^2)}+\frac{p}{2}+\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2}}\right). \tag{15}$$

Если длина волны велика по сравнению с шириной слоя $\lambda\ll 1$, то p также много меньше единицы. В этом приближении

$$\lambda = -p(\sqrt{\pi}\,\nu + \mu + \frac{p}{2}). \tag{16}$$

Решая уравнение (16) совместно с уравнением $\frac{d\lambda}{dp} = 0$, получим дисперсионное уравнение

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\,\nu + \mu + \sqrt{2\lambda} = 0. \tag{17}$$

Подставляя соответствующие выражения в последнее уравнение, получим соотношение между частотой и волновым числом

для волны 1) в виде

$$(\mathrm{Re}\,\omega)^2 = \frac{k_1 a}{2\sqrt{2}} \Sigma\,\omega_p^2 , \tag{18}$$

для волны 2) в виде

$$(\mathrm{Re}\,\omega)^2 = \frac{m_e}{2m_i} k_1^2 v_{0e}^2 (1 + \sqrt{2}\frac{\omega_{0e} k_1 v_{0e}}{\omega_{pe}^2})^{-1}. \tag{19}$$

Формулы (18), (19) определяют спектр слабозатухающих низкочастотных волн, распространяющихся вдоль плоского слоя плазмы.

Литература

1. С.М. Осовец. Атомная энергия, 15, 283 (1963).
2. K.J. Harker. Phys. Fluids, 8, 1846 (1965).
3. А.Б. Михайловский. Вопросы теории плазмы, вып. 3. Москва, Атомиздат, 1963, стр. 141.
4. В.В. Арсенин. Ядерный синтез, 3, 190 (1963).
5. В.Д. Шафранов. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Москва. Атомиздат, 1963, стр. 3.
6. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 2, Москва, ИЛ, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1966 г.