сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

9 - 12626

Д.Х.Динев

О КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ТЯЖЕЛОИОННОГО СИНХРОТРОНА ТИС В ПРОЕКТЕ УКТИ

1979

9 - 12626

Д.Х.Динев

О КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ТЯЖЕЛОИОННОГО СИНХРОТРОНА ТИС В ПРОЕКТЕ УКТИ

Динев Д.Х. 9 - 12626

О корретирующих элементах тяжелоионного синхротрона ТИС в проекте УКТИ

Рассматриваются некоторые вопросы,связанные с коррекцией в тяжелоионном синхротроне ТИС/проект УКТИ/. На основе гамильтоновского формализма вычисляются смещения бетатронных частот. Приводятся ожидаемые градиентные смещения частот, вызываемые систематическими и случайными ошибками. Хроматичность рассматривается с учетом действия диполей. Сделан выбор расположения и вычислены необходимые силы корректирующих секступолей. Обсуждается действие резонансов, расположенных вблизи рабочей точки. Показано, что ожидаемое увеличение амплитуды колебаний при пересечении резонанса $4\nu_x = 23$ не опасно.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Dinev D.H. 9 - 12626

Correcting Magnets of a Heavy-Ion Synchrotron in the Project of an Accelerating Complex

Some problems connected with corrections in a heavy-ion synchrotron are considered. On the base of the Hamiltonian formalism the betatron frequency shifts are calculated. The expected gradient frequency shifts caused by systematical and statistical errors are presented. Chromaticity is treated rendering an account of the action of bending magnets. The distribution of the correcting sextupoles is chosen and the strengths necessary are calculated. The action of resonances excited near the working point is discussed. It is shown that the increase of the oscillation amplitude expected when crossing the resonance $4\nu_x = 23$ is not dangerous.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

С целью осуществления ряда уникальных экспериментов в области ядерной физики и в связи с планами дальнейшего развития основных установок ОИЯИ в настоящее время разрабатывается проект ускорительного комплекса тяжелых ионов - УКТИ. Схема УКТИ двухступенчатая. Первая ступень - тяжелоионный синхротрон /ТИС/, ускоряющий ионы всех элементов вплоть до урана до энергии 250 *МэВ/нуклон* /по урану/. Вторая ступень УКТИ - это существующий ныне в ОИЯИ синхрофазотрон. В нем ионы будут иметь возможность доускоряться до энергии 3,5 *ГэВ/нуклон*.

Настоящая работа посвящена проблеме корректирующих элементов тяжелоионного синхротрона ТИС.

Необходимые для дальнейших вычислений параметры ТИСа следующие [1]:

периметр - 150 *м*
максимальное магнитное поле - 1,096 *Т*
максимальный градиент в Ф линзах - 10,1956 *Т/м*
максимальный градиент в Д линзах - 10,4673 *Т/м*
максимальная магнитная жесткость - 8,262 *Т.м*
количество периодов - 24
количество суперпериодов - 8
количество диполей - 32
количество квадруполей - 48
эффективная длина диполя - 1,48 *м*
эффективная длина квадруполя - 0,36 *м*
частота бетатронных колебаний

Q_x - 5,8
Q_z - 5,85

2. О СМЕЩЕНИИ ЧАСТОТ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Гамильтониан, описывающий поперечное движение частиц в циклическом ускорителе, можно представить в виде /2-8/

$$H = H^{(0)} + H^{(3)} + H^{(4)} + \ldots + \delta H^{(1)} + \delta H^{(2)} + \ldots . \qquad /1/$$

Здесь $H^{(0)}$ означает гамильтониан идеального ускорителя -

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}(x'^2 + z'^2) + \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial Bz}{\partial x}(x^2 - z^2) + \frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^2}x^2 \quad . \qquad /2/$$

В /2/ в качестве обобщенных импульсов, канонически сопряженных с поперечным смещением от равновесной орбиты в горизонтальной плоскости - x и в вертикальной плоскости - z, используются переменные x' и z'. Они связаны с традиционными обобщенными импульсами p_r и p_z равенствами:

$$x' = R\frac{p_r}{p} \qquad /3/$$

$$z' = R\frac{p_z}{p}. \qquad /4/$$

Напомним, что

$$p_r = m\dot{r} + \frac{e}{c}A_r \qquad /5/$$

$$p_z = m\dot{z} + \frac{e}{c}A_z \qquad /6/$$

и

$$p^2 = \frac{H^2}{c^2} - m_0^2c^2 \; . \qquad /7/$$

В качестве независимой переменной в гамильтониане /1/ используется обобщенный азимут $\theta = s/R$.

Члены $H^{(3)}$, $H^{(4)}$ и т.д. в гамильтониане /1/ описывают отклонение магнитного поля от идеального - $B_z = B_{z0}(1 - nx/\rho)$ и наличие в нем мультипольных составляющих

$$H^{(3)} = \frac{1}{3}\frac{R^2}{B\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}x^3 + \frac{1}{6}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}x^3 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}xz^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}xz^2$$

$$H^{(4)} = -\frac{1}{24}\frac{R^2}{B\rho}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial B_z}{\partial x}z^4 + \frac{1}{24}\frac{R^2}{B\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}z^4 +$$

$$+ \frac{1}{24}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3}z^4 + \frac{1}{8}\frac{R^2}{B\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}x^4 + \frac{1}{24}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3}x^4 -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}x^2z^2 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial^3 B_z}{\partial x^3}x^2z^2 \; .$$

Члены $\delta H^{(1)}$, $\delta H^{(2)}$ и т.д. в гамильтониане /1/ описывают различные ошибки - отличие магнитного поля от идеального (ΔB_z), отличие импульса от равновесного (Δp), отличие градиента магнитного поля от идеального ($\Delta\frac{\partial B_z}{\partial x}$), смещение магнитных элементов (Δx, Δz), наклон магнитов (θ), продольные поля (B_s), наклонные квадруполя ($a_s = \frac{\partial B_z}{\partial z}$) и др.

$$\delta H^{(1)} = -\frac{R^2}{\rho^2}\frac{\Delta p}{p}x + \frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}(\Delta x)x + \frac{R^2}{B\rho}\Delta B_z x -$$

$$- \frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}(\Delta z)z - \frac{R^2}{\rho}\theta z \qquad /10/$$

$$\delta H^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\Delta\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)x^2 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\Delta p}{p}x^2 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\frac{\partial B_z}{B}x^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\Delta\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)z^2 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\Delta p}{p}z^2 - 2\frac{R^2}{B\rho}\frac{\partial B_z}{\partial x}\theta xz +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{(B\rho)^2}B_s^2z^2 + \frac{R^2}{B\rho}a_s xz. \qquad /11/$$

Члены первого порядка в /1/ появляются только при наличии определенного рода ошибок - см. /10/, чье действие обусловливает смещение равновесной орбиты. Если эти члены присутствуют в гамильтониане /1/, будем считать, что x и z описывают смещение от возмущений орбиты. В этих новых переменных гамильтониан есть

$$H' = H(\xi + x,\ \xi' + x') - \frac{\partial H}{\partial \xi} x - \frac{\partial H}{\partial \xi'} x', \qquad /12/$$

где ξ и ξ' - канонические переменные, описывающие орбиты, H' уже не содержит членов первого порядка.

Для идеального ускорителя решение уравнения движения можно представить в форме Флоке [9-11] -

$$(x,z) = \sqrt{a_{x,z}}\, f_{x,z}\, e^{i(\nu_{x,z}\theta + \phi_{x,z})} + \text{k.c.}$$

$$(x',z') = \sqrt{a_{x,z}} \left(\frac{df_{x,z}}{d\theta} + i\nu_{x,z} f_{x,z} \right) e^{i(\nu_{x,z}\theta + \phi_{x,z})} + \text{k.c.}, \qquad /13/$$

где $f_{x,z}$ - функции Флоке.

Следуя общепринятой методике [2-8], когда рассматриваемый ускоритель отличается от идеального, будем описывать движение, рассматривая его константы a_x, ϕ_x и a_z, ϕ_z в качестве новых переменных. Переход от переменных x и x' к a_x и ϕ_x соответственно от z и z' к a_z и ϕ_z можно рассматривать как некое каноническое преобразование переменных.

К уравнениям движения можно применить метод усреднения Крылова-Боголюбова [12]. Тогда для медленноменяющейся части амплитуды и фазы получаем

$$\frac{d\phi_{x,z}}{d\theta} = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial a_{x,z}} \equiv \Delta\nu_{x,z} \qquad /14/$$

$$\frac{da_{x,z}}{d\theta} = -\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \phi_{x,z}}. \qquad /15/$$

Если в гамильтониане /1/ нет членов, линейных по x и z, то медленноменяющиеся части амплитуды и фазы описывают основную часть движения [2], а быстроменяющиеся - это небольшие поправки.

Смещение бетатронных частот дается первым уравнением /14/.

3. *ГРАДИЕНТНОЕ СМЕЩЕНИЕ БЕТАТРОННЫХ ЧАСТОТ*

При наличии ошибок градиента по описанной выше методике для смещений бетатронных частот можно получить [2,13]

$$\Delta\nu_{x,z} = \mp \frac{1}{4\pi} \int_0^c \beta_{x,z} \frac{\Delta\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)}{B\rho} ds. \qquad /16/$$

Формула /16/ описывает действие систематических ошибок градиента. Если ошибки случайные, то из /16/ для среднеквадратического отклонения бетатронных частот можно получить

$$\sigma_{\Delta\nu_{x,z}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\sum_p \left(\frac{\beta_{x,zp} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_p e_p}{B\rho} \right)^2}\ \sigma_{\frac{\Delta g}{g}}, \qquad /17/$$

где $\sigma_{\frac{\Delta g}{g}}$ - среднеквадратическое отклонение относительной ошибки градиента.

Ожидаемые для случая тяжелоионного синхротрона ТИС ошибки и вычисленные на их основе при помощи /16,17/ смещения бетатронных частот даны в *таблице*, из которой видно, что предполагаемое градиентное смещение бетатронных частот невелико. Если реальные ошибки будут намного больше, то для коррекции бетатронных частот предусмотрены в квадрупольных линзах корректирующие обмотки.

Случайные ошибки градиента имеют белый спектр, откуда следует, что они в состоянии возбуждать линейные суммовые резонансы при любом "p". На *рис. 1* показана диаграмма резонансов ТИСа [1] и положение рабочей точки. Ближайшие линейные суммовые резонансы - это - $2\nu_x = 11$ и $2\nu_z = 11$. Ширина этих резонансов, для случая, когда они вызываются случайными возмущениями [6,7], есть

$$\Delta e = 2\sigma_{\Delta\nu}, \qquad /18/$$

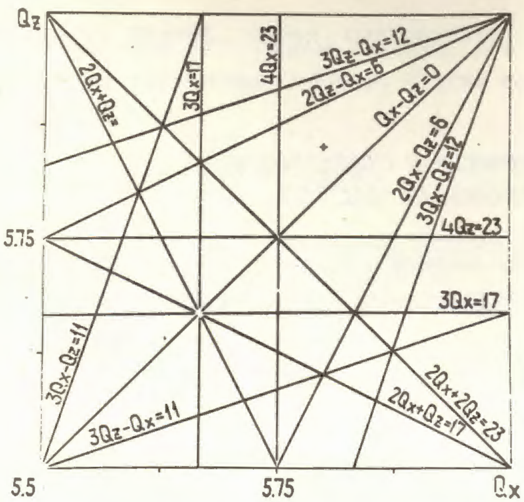

Рис. 1. Диаграмма резонансов и рабочая точка ТИСа.

Таблица

Элемент	Систематическая ошибка	$\Delta\nu$ x	$\Delta\nu$ z	Случайная ошибка	$\sigma_{\Delta\nu}$ x	$\sigma_{\Delta\nu}$ z
квадруполь	$\frac{\Delta g}{g} = 10^{-3}$	-0,0070	-0,0068	$\sigma_{\Delta g/g} = 10^{-3}$	0,0018	0,0018
диполь	$g=6\cdot 10^{-3}$ Т/М	-0,0175	-0,0115	$\sigma_{\Delta g} = 3\cdot 10^{-3}$ Т/М	0,0015	0,0010

где $\sigma_{\Delta\nu}$ дается /17/. Следовательно, для $2\nu_x = 11$, $\Delta e = 6{,}6\cdot 10^{-3}$, а для $2\nu_z = 11$, $\Delta e = 5{,}6\cdot 10^{-3}$.

4. ХРОМАТИЧНОСТЬ И ЕЕ КОРРЕКЦИЯ

Бетатронные частоты неравновесных частиц отличаются от них для равновесной частицы. По описанной в параграфе 2 мето-

дике для смещения бетатронных частот с импульсом так называемую хроматичность можно получить [14,15]:

$$\frac{\Delta\nu_{x,z}}{\Delta p/p} = \frac{\Delta\nu_{x,z}^{\text{осн}}}{\Delta p/p} + \frac{\Delta\nu_{x,z}^{\text{ошиб}}}{\Delta p/p}. \qquad /19/$$

Первый член в /18/ описывает действие основных факторов на хроматичность, второй - действие различного рода ошибок

$$\frac{\Delta\nu_x^{\text{осн}}}{\Delta p/p} = -\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_M \beta_x\,ds + \frac{1}{4\pi}\int_M \frac{\psi}{\rho}\gamma_x\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_M \frac{\psi'}{\rho}\alpha_x\,ds -$$

$$-\frac{1}{4\pi B\rho}\int_K \beta_x \frac{\partial B_z}{\partial x}\,ds \qquad /20/$$

$$\frac{\Delta\nu_z^{\text{осн}}}{\Delta p/p} = \frac{1}{4\pi}\int_M \frac{\psi}{\rho}\gamma_z\,ds + \frac{1}{4\pi B\rho}\int_K \beta_z \frac{\partial B_z}{\partial x}\,ds. \qquad /21/$$

Здесь мы пользуемся следующими обозначениями - α, β, γ - параметры Твиса, ψ, ψ' - дисперсия, определяющая смещение равновесной орбиты с импульсом - $x_{eq} = \psi(\Delta p/p)$, $\int_M$ означает интегрирование по магнитам, $\int_K$ - интегрирование по квадрупольным линзам.

$$\frac{\Delta\nu_x^{\text{ошиб}}}{\Delta p/p} = -\frac{1}{4\pi B\rho}\int_M \frac{\partial B_z}{\partial x}\beta_x\,ds + \frac{1}{2\pi B\rho^2}\int_M \psi\frac{\partial B_z}{\partial x}\beta_x\,ds +$$

$$+\frac{1}{4\pi B\rho}\int_{M+K} \psi\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\beta_x\,ds \qquad /22/$$

$$\frac{\Delta\nu_z^{\text{ошиб}}}{\Delta p/p} = \frac{1}{4\pi B\rho}\int_M \frac{\partial B_z}{\partial x}\beta_z\,ds - \frac{1}{4\pi B\rho^2}\int_M \psi\frac{\partial B_z}{\partial x}\beta_z\,ds -$$

$$-\frac{1}{4\pi B\rho}\int_{M+K} \psi\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\beta_z\,ds. \qquad /23/$$

Все необходимые для вычисления хроматизма функции для ТИСа показаны на *рис. 2.* Из формул /20,21/ для ТИСа можно получить:

$$\frac{\Delta\nu_x^{\text{осн}}}{\Delta p/p} = -0{,}42 + 0{,}21 + 0{,}33 - 7{,}05 = -6{,}93 \qquad /24/$$

$$\frac{\Delta\nu_z^{\text{осн}}}{\Delta p/p} = +\,0{,}21 - 6{,}8 = -6{,}58\,. \qquad /25/$$

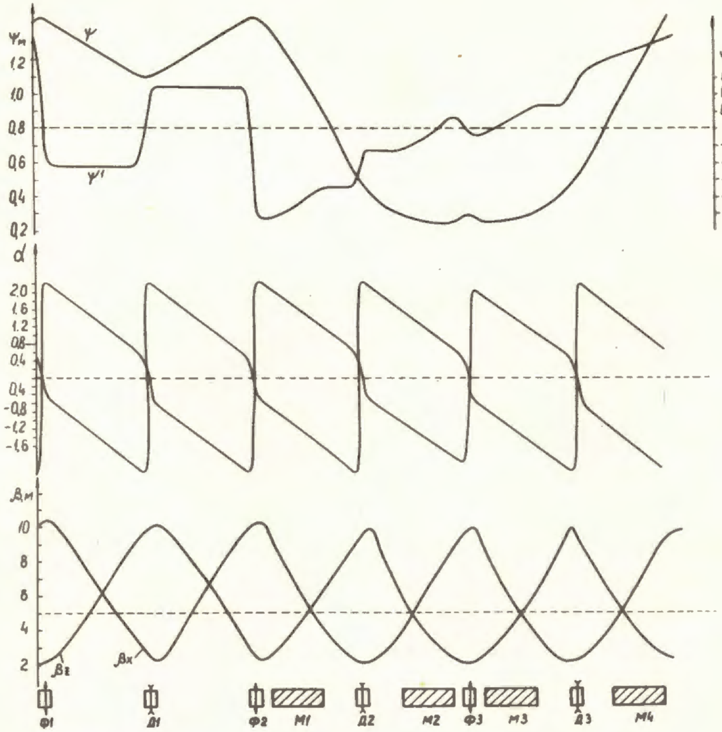

Рис. 2. Функции $-\beta$, α, ψ, ψ' *для ТИСа.*

Ожидаемая хроматичность, вызванная различного рода ошибками /22,23/, для ТИСа незначительна.

Для компенсации хроматичности используются секступольные линзы.

Вызванная секступолями хроматичность дается выражением

$$\frac{\Delta\nu_{x,z}}{\Delta p/p} = \pm\frac{1}{4\pi B\rho}\int\limits_c \psi\,\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\,\beta_{x,z}\,ds\,. \qquad /26/$$

Здесь предполагается для компенсации хроматичности в ТИСе использовать 8 пар секступольных линз, расположенных в больших прямолинейных промежутках каждого суперпериода, как это показано на *рис. 3.* Для силы этих секступолей из /24-26/ следует система уравнений

$$\begin{aligned} 0{,}0585\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_1 + 0{,}409\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_2 &= 6{,}93 \\ 0{,}260\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_1 + 0{,}0857\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_2 &= 6{,}58\,. \end{aligned} \qquad /27/$$

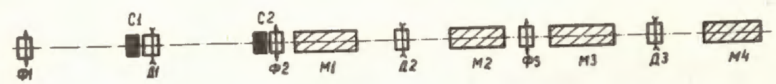

Рис. 3. Корректирующие секступоля.

Из /27/ получаем: $\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_1 = 20{,}5$ *Т/м*^{2} и $\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right)_2 = 14{,}0$ *Т/м*^{2}.

Отметим, что при выбранном нами расположении секступолей они могут возбуждать резонансы третьего порядка на гармониках, кратных 8, которые отсутствуют в области рабочей точки.

5. О ПРОХОЖДЕНИИ РЕЗОНАНСОВ

Из *рис. 1* видно, что в области рабочей точки отсутствуют структурные резонансы - резонансы на гармониках, кратных числу периодов - 24 и на гармониках, кратных числу суперпериодов - 8.

Так как случайные возмущения магнитного поля имеют белый спектр, то они могут возбуждать резонансы для любого "p". Для случая ТИСа сейчас мы рассмотрим действие этих резонансов.

В ТИСе медленный вывод пучка будет осуществляться на резонансе $3\nu_x = 17$. При наведении на этот резонанс рабочая точка будет пересекать резонанс четвертого порядка $4\nu_x = 23$. Согласно /5,6/ ширина этого резонанса, когда он возбуждается случайными возмущениями, дается выражением

$$\Delta e \approx \frac{R}{6B\rho}\epsilon_{xo}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\sum_i(\beta_{xi}^4\ \Delta\theta_i^2)}\ \sigma_{B_z^{(3)}}, \qquad /28/$$

где $\sigma_{B_z^{(3)}}$ - среднеквадратическое отклонение октупольной нелинейности, а ϵ_{xo} - горизонтальный эмиттанс.

При пересечении резонанса $4\nu = 23$:

$$\epsilon_{xo} = 9{,}8 \text{ см.мрад} \qquad /29/$$

и для случая ТИСа ожидается, что:

$$\sigma_{B_z^{(3)}} = \begin{cases} 5\ T/м^3, \text{ в диполях} \\ 2\ T/м^3, \text{ в квадруполях.} \end{cases} \qquad /30/$$

Из /28, 30/ для ТИСа можно получить

$$\Delta e \approx 10^{-3}. \qquad /31/$$

Для нарастания поперечной амплитуды при пересечении резонанса $n_1\nu_x + n_2\nu_z = p$ из второго уравнения движения /15/ можно получить /5,6/

$$\left(\frac{\epsilon_{zo}}{\epsilon_{xo}}\right)^{n_2/2}\int_1^{x_1}\frac{dx_1}{x^{(n_1-1)}\left(\frac{A_1}{a_{xo}}+\frac{n_2x_1^2}{n_1}\right)^{n_2/2}} =$$

$$= \frac{\Delta e/2}{n_1+\frac{n_2^2\epsilon_{xo}}{n_1\epsilon_{zo}}}\int_{\theta_o}^{\theta}\sin\psi\, d\theta, \qquad n_1 \neq 0 \qquad /32/$$

$$\left(\frac{\epsilon_{xo}}{\epsilon_{zo}}\right)^{n_1/2}\int_1^{x_2}\frac{dx_2}{x_2^{(n_2-1)}\left(\frac{A_2}{a}+\frac{n_1x_2^2}{n}\right)^{n_1/2}} =$$

$$\frac{\Delta e/2}{n_2+\frac{n_1^2\epsilon_{zo}}{n_2\epsilon_{xo}}}\int_{\theta_o}^{\theta}\sin\psi\, d\theta, \qquad n_2 \neq 0 \qquad /33/$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{a_x}{a_{xo}}}, \qquad /34/$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{a_z}{a_{zo}}}. \qquad /35/$$

$$\psi = (n_1\nu_x + n_2\nu_z - p)\theta + u_1\phi_x + u_2\phi_z. \qquad /36/$$

В /32, 33/ A_1 и A_2 - инварианты движения

$$A_1 = a_z - \frac{n_2}{n_1}a_x, \qquad n_1 \neq 0 \qquad /37/$$

$$A_2 = a_x - \frac{n_1}{n_2}a_z, \qquad n_2 \neq 0. \qquad /38/$$

Для оценки нарастания поперечной амплитуды при пересечении резонанса $4\nu_x = 23$ примем, что $\sin\psi = 1$, т.е. будем считать, что амплитуда все время остается максимальной. При этих предположениях из /32/ можно получить

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{\Delta e\pi n_t}{4}}}, \qquad /39/$$

где n_t - число оборотов частицы за время пересечения резонанса. При медленном выводе пучка из ТИСа частота обращения составляет 1,2 *МГц*. Если допустить, что расстояние до резонанса $3\nu_x = 17$ частицы проходят равномерно в течение 10 *мс*, то за время пребывания в зоне резонанса $4\nu_x = 23$ они совершают 96 оборотов. По формуле /39/ тогда получаем

$$x_1 = 1{,}04. \qquad /40/$$

Такое увеличение амплитуды не опасно.

Автор приносит благодарность И.Б.Иссинскому за внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балдин А.М. и др. ОИЯИ, 9-11796, Дубна, 1978.
2. Shoh A. CERN Report, 57-21, 1958.
3. Hagedorn R. CERN Report, 57-1, 1957.
4. Hagedorn R., Shoch A. CERN Report, 57-14, 1957.
5. Guignard G. CERN, 70-24, 1970.
6. Guignard G. CERN/SI/Int.DL/70-3, 1970.
7. Teng L.C. NAL-FN-183, 1969.
8. Suzuki T. KEK, 78-14, 1978.
9. Courant E.D., Snyder H.S. Ann. of Phys., 1958, v.3, p.48.
10. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
11. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.
12. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. "Наука", М., 1974.
13. Bovet C. MPS-SI/Int.DL/68-3, CERN, 1968.
14. Beck R.A. et al. 6 Int. Conf. High Energy Accel., Cambridge, 1967.
16. Suzuki T. KEK, 74-6, 1974.
17. Autin B., Garren A. CERN/ISR-65-MA/75-32, 1975.
18. Donald M. CERN/ISR/AS/74-70, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июля 1979 года.