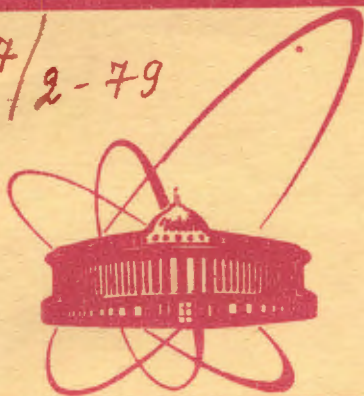


4477/2-79



сообщения
Объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

СЗ450

Д-466

5/11-79

9 - 12479

Д. Динев

КОРРЕКЦИЯ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ
ТЯЖЕЛОИОННОГО СИНХРОТРОНА
В ПРОЕКТЕ УСКОРИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

1979

9 - 12479

Д. Динев

КОРРЕКЦИЯ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ
ТЯЖЕЛОИОННОГО СИНХРОТРОНА
В ПРОЕКТЕ УСКОРИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Динев Д.

9 - 12479

Коррекция замкнутой орбиты тяжелоионного синхротрона в проекте ускорительного комплекса

Рассматривается вопрос о коррекции замкнутой орбиты в синхротронах. Предлагается алгоритм коррекции орбиты в течение цикла ускорения. Вид функционала, который подлежит минимизированию, в этом алгоритме выводится аналитически и отличается от принятых другими авторами. На основе спектрального анализа случайных функций выводится выражение для качества коррекции. Эти результаты применены для случая тяжелоионного синхротрона /ТИС/ в проекте ускорительного комплекса тяжелых ионов/УКТИ/. В работе вычислено отклонение орбиты ТИС. Выбрано расположение и необходимая сила корректирующих диполей и сигнальных электродов.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Dinev D.

9 - 12479

The Problem of Closed Orbit Corrections in Heavy Ion Synchrotron of the Accelerating Complex Project

The problem of closed orbit corrections in synchrotrons is considered.

An algorithm of the correction of the closed orbit during the cycle of acceleration is proposed. In this algorithm the form of the functional, that has to be minimized, is analytically deduced, and differs from those accepted by other authors. On the basis of the spectral analysis of chance functions an expression for the quality of correction is drawn.

These results are used for the heavy ion synchrotron (TIS) in accelerating complex project. The deviation of the TIS closed orbit is calculated. The position and the necessary strength of the correcting dipoles and pickup electrodes are chosen.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из основных вопросов оптимального управления ускорителями заряженных частиц - это контролирование и корректирование замкнутой орбиты. Как известно, линейризованное уравнение движения в поперечной плоскости для синхротрона с разделенными функциями поворота и фокусировки имеет вид:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = F(s), \quad /1/$$

где x - поперечная, s - продольная координата.

$$K(s) = \begin{cases} 1/\rho^2 & \text{для диполей} \\ 0 & \text{для корректирующих диполей} \\ \frac{g}{B_0 \rho} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) & \text{для квадруполов} \end{cases} \quad /2/$$

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{\Delta B}{B_0 \rho} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) & \text{для диполей} \\ -\frac{\Delta B}{B_0 \rho} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) & \text{для корректирующих диполей} \\ -\frac{g \Delta x}{B_0 \rho} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) & \text{для квадруполов} \end{cases} \quad /3/$$

Здесь мы пользуемся следующими обозначениями: ρ - радиус кривизны в диполях, $B_0\rho$ - магнитная жесткость, g - градиент в квадруполях, $\Delta B = B - B_0$, $\Delta p = p - p_0$, Δx - смещение квадруполов.

Удобно ввести новые переменные -

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\beta}} \quad /4/$$

$$\phi = \int \frac{ds}{Q\beta}, \quad /5/$$

где $\beta(s)$ - бета-функция Твисса, Q - число бетатронных колебаний за оборот.

В новых переменных уравнение /1/ принимает следующий "сглаженный" вид -

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + Q^2 \eta = Q^2 \beta^{3/2} F(\phi) = Q^2 f(\phi), \quad /6/$$

$$f(\phi) = \beta^{3/2} F(\phi). \quad /7/$$

Как известно, замкнутая орбита является периодичным с периодом 2π частным решением уравнения /6/. Используя метод варьирования интегральных констант, можно показать, что:

$$\eta(\phi) = \frac{Q}{2 \sin \pi Q} \int_{\phi}^{\phi + 2\pi} f(t) \cos Q(\phi + \pi - t) dt. \quad /8/$$

Так как $f(t) = 0$ вне магнитных элементов и $f(t) = f_i$ - в i -том магнитном элементе, то можно свести /8/ к матричному равенству:

$$\eta(\phi_i) = \sum a_{ij} \delta_j, \quad /9/$$

где
$$a_{ij} = \cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j), \quad /10/$$

$$\delta_j = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \pi Q} \frac{\sqrt{\beta_j} \Delta B_j \Delta s_j}{B_0 \rho} & \text{для диполей и для} \\ & \text{корректирующих} \\ & \text{диполей} \\ \frac{1}{2 \sin \pi Q} \frac{\sqrt{\beta_j} g_j \Delta x_j \Delta s_j}{B_0 \rho} & \text{для квадруполов} \end{cases} \quad /11/$$

Δs_j - длина j -того магнитного элемента.

Важно отметить, что η и δ - величины с одинаковой размерностью.

К уравнению /6/ можно подойти и на основе гармонического анализа. Разложим $\eta(\phi)$ в ряд Фурье:

$$\eta(\phi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k\phi + v_k \sin k\phi), \quad /12/$$

а также $f(\phi)$:

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k\phi + g_k \sin k\phi). \quad /13/$$

Как увидим ниже, $f_0 \neq 0$. Из уравнения /6/ получается следующая связь между коэффициентами Фурье:

$$\begin{aligned} u_0 &= f_0, \\ u_k &= \frac{Q^2}{Q^2 - k^2} f_k, \\ v_k &= \frac{Q^2}{Q^2 - k^2} g_k. \end{aligned} \quad /14/$$

Сразу видно, что самая опасная - это ближайшая к Q гармоника возмущения.

Как следует из /8/, при наличии разного рода возмущений замкнутая орбита отклоняется от геометрической оси вакуумной камеры. Намеренное введение возмущений /коррекций/ для сведения этого отклонения к минимуму называется коррекцией замкнутой орбиты.

Среди многочисленных методов, предложенных для коррекции замкнутой орбиты, в настоящее время самое большое распространение получили два - "beam bump"-метод и метод общей коррекции.

"Beam bump"-метод - это метод локальной коррекции. Корректирующие диполи группируются по три элемента возле точки, где β максимально. Между двумя из них располагается сигнальный электрод, измеряющий отклонение орбиты. Пусть η_i - измеренное сигнальным электродом отклонение. При помощи трех корректоров можно локально деформировать орбиту так, чтобы скомпенсировать ее отклонение в сигнальном электроде, не изменяя при этом орбиты вне области корректоров. Другими словами, смещение орбиты, вызываемое тройкой корректоров $\eta_{BC}(\phi)$, следует условию

$$\eta_{BC}(\phi_i) = -\eta_i,$$

$$\eta_{BC}(\phi_{i+1} < \phi < \phi_{i-1}) = \eta'_{BC}(\phi_{i+1} < \phi < \phi_{i-1}) \approx 0. \quad /15/$$

Можно показать, что необходимая для этого сила корректоров будет

$$\delta_{i-1} = \sqrt{\frac{\beta_{i-1}}{\beta_i}} \frac{\eta_i}{2 \sin \pi Q \sin \mu},$$

$$\delta_i = -\frac{\mu_i}{\sin \pi Q} \operatorname{ctg} \mu, \quad /16/$$

$$\delta_{i+1} = \sqrt{\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}} \frac{\eta_i}{2 \sin \pi Q \sin \mu},$$

где μ - набег фазы бетатронных колебаний.

Из /16/ видно, что оптимальное расстояние между двумя корректорами равно $\lambda/2$, λ - длина волны бетатронных колебаний. При этом $\delta_j \approx 0$.

После коррекции орбиты в первом сигнальном электроде при помощи первой тройки корректоров можно локально скорректировать орбиту в следующем сигнальном электроде, применяя для этого тройку, составленную из двух последних корректоров

первой тройки и последующего в направлении движения корректора. Такой шаговой последовательной коррекцией мы сможем скомпенсировать отклонение орбиты во всех сигнальных электродах.

"Beam bump"-метод - это метод последовательной коррекции, и поэтому он является относительно медленным. При таком методе компенсируется смещение орбиты в точках, где расположены сигнальные электроды, но орбита, центрированная в $2N$ точках, не обязательно является оптимальной с точки зрения ее общего отклонения.

В методе общей коррекции вводится (Hereward, Baconnier) функционал:

$$\Psi = \gamma \sum_i \eta_i^2 + (1-\gamma) \sum_j \delta_{BCj}^2. \quad /17/$$

Замкнутая орбита считается оптимальной, если Ψ имеет минимум. В выражении /17/ γ является параметром, оптимальное значение которого следует определить.

Первая сумма в Ψ минимизирует отклонение орбиты в сигнальных электродах, а вторая ограничивает силу корректирующих диполей. Дело в том, что сами корректоры вносят возмущения в орбите. Накладывая эти возмущения на реальную орбиту, мы в состоянии приблизительно скомпенсировать только первые N гармоник орбиты. Это следует сразу из /17/ - минимизирование только первой суммы $\gamma = 1$ означает, что мы аннулировали орбиту в сигнальных электродах, т.е. в $2N$ точках. Но кривая центрирования в этих точках имеет N первых гармоник, приближенно равных нулю. Следовательно, в орбите остаются сумма высших гармоник реальной орбиты и сумма высших гармоник, связанных с корректорами. Когда $\gamma \neq 1$, вторая сумма ограничивает сумму высших гармоник, вызванных корректорами. Из /9/ и /17/ следует, что

$$\Psi = \gamma \sum_i (\sum_j a_{ij} \delta_{BCj} + \eta_i)^2 + (1-\gamma) \sum_j \delta_{BCj}^2. \quad /18/$$

Тогда оптимальная орбита будет решением системы уравнений:

$$2\gamma \sum_j a_{ij} \sum_k (a_{ik} \delta_{BCk} + \eta_i) + 2(1-\gamma) \delta_{BCi} = 0. \quad /19/$$

Обычно при рассмотрении каждого конкретного ускорителя коррекция моделируется на ЭВМ методом Монте-Карло.

Метод общей коррекции позволяет на основе измерений смещения орбиты сразу определить нужные коррекции. Однако минимизируемый функционал Ψ вводится несколько эмпирично. Оптимальное значение параметра γ нужно определить в процессе расчета. Обычно необходимо длительное предварительное моделирование коррекции на ЭВМ методом Монте-Карло.

Настоящая работа посвящена проблеме коррекции замкнутой орбиты в синхротронах. В ней получен ряд новых результатов и сделаны некоторые уточнения результатов других авторов. Все это применительно для конкретного случая тяжелоионного синхротрона /ТИС/, который является первой ступенью разрабатываемого в ЛВЭ ОИЯИ проекта ускорительного комплекса тяжелых ионов /УКТИ/. Он будет ускорять ионы всех элементов вплоть до урана до энергии 250 МэВ/нуклон /по урану/. Вторая ступень УКТИ - существующий ныне в ЛВЭ синхрофазотрон. ТИС - это синхротрон с разделенными функциями поворота и фокусировки. Его основные параметры, необходимые для дальнейшего изложения, следующие:

радиус кривизны орбиты в диполях	- 7,538 м
магнитное поле:	
при инжекции	- 0,2065 Т
максимальное	- 1,0961 Т
градиент в Φ линзах:	
при инжекции	- 1,9202 Т/м
максимальный	- 10,1956 Т/м
градиент в D линзах:	
при инжекции	- 1,9600 Т/м
максимальный	- 10,4673 Т/м
количество периодов ФОДО	- 24
количество суперпериодов	- 8
количество диполей	- 32
количество квадруполей	- 48
эффективная длина диполя	- 1,48 м
эффективная длина квадруполя	- 0,36 м
частота бетатронных колебаний:	
Q_x	- 5,8
Q_y	- 5,85.

2. СМЕЩЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ ОРБИТЫ

Пусть на всем периметре ускорителя размещены M диполей, K квадруполей, $2N$ сигнальных электродов и $2N$ корректирующих диполей. Пусть P - число периодов, а M_p, K_p и N_p - число соответствующих элементов за период.

На основании /9/, используя основные законы теории вероятности, можно получить следующую формулу для дисперсии орбиты:

$$\sigma_{\eta}^2 = \left(\frac{\Delta s_M}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 \sigma_B^2 \sum_{j=1}^{M_p} \frac{\beta_j}{2} \left[\frac{\cos(\alpha_{ij} + 2\pi Q \frac{p-1}{p}) \sin 2\pi Q}{\sin \frac{2\pi Q}{p}} + p \right] + \left(\frac{g \Delta s_g}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 \sigma_B^2 \sum_{j=1}^{K_p} \frac{\beta_j}{2} \left[\frac{\cos(\alpha_{ij} + 2\pi Q \frac{p-1}{p}) \sin 2\pi Q}{\sin \frac{2\pi Q}{p}} + p \right], \quad /20/$$

где

$$\alpha_{ij} = 2Q(\phi_i + \pi - \phi_j), \quad /21/$$

σ_B^2 - дисперсия ΔB , σ_g^2 - дисперсия Δx

Возмущения, вызывающие отклонения замкнутой орбиты, можно объединить в следующие три группы:

а/ Возмущения постоянные в течение цикла ускорения: паразитные постоянные поля, поля, вызываемые токами Фуко, и другие. Эти возмущения существенны только в начале цикла ускорения.

б/ Возмущения, пропорциональные основному полю: ошибки юстировки, ошибки в μ , паразитные поля, пропорциональные основному, и другие.

в/ Возмущения, появляющиеся при высоких полях: ошибки, вызванные насыщением.

Для случая ТИС мы принимаем, что возмущения группы а/ равны $\sigma_B = 1$ Гс; группы в/ равны $\sigma_B = 5 \cdot 10^{-4} B_0$. Ошибки насыщения не будем учитывать. Ошибки в юстировке принимаем $\sigma_{\Delta x} = 0,3$ мм для горизонтальной плоскости, $\sigma_{\Delta y} = 0,15$ мм - для

вертикальной. Ошибки в наклоне магнитов принимаем $\sigma_a \approx 0,3$ град. При этих допущениях по формуле /20/ получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 7,7 \text{ мм} \\ \sigma_y &= 2,5 \text{ мм}.\end{aligned}$$

3. АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ В ТЕЧЕНИЕ ЦИКЛА УСКОРЕНИЯ

Возмущения ΔB и Δx и смещение орбиты η - это случайные функции обобщенного азимута ϕ .

В результате измерения отклонений орбиты при помощи сигнальных электродов будем знать не функцию $\eta(\phi)$, а лишь ее значения в $2N$ точках:

$$\eta(\phi_i) = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2N). \quad /22/$$

Это неполная информация. На ее основе мы не можем судить о вызывающих ее возмущениях. Обычно $M + K > 2N$, и мы не в состоянии разрешить /9/ относительно возмущений δ . Это также связано с тем фактом, что по $2N$ точкам невозможно узнать все фурье-гармоники орбиты. Мы можем вычислить не более, чем приближенные значения первых N гармоник. Для этого можно применить какой-нибудь метод прикладного гармонического анализа. Здесь мы будем аппроксимировать первые N гармоник коэффициентами Бесселя:

$$\begin{aligned}U_0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i, \\ U_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \cos k\phi_i, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ V_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \sin k\phi_i, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1).\end{aligned} \quad /23/$$

Существует следующая связь между коэффициентами Бесселя и коэффициентами Фурье:

$$\begin{aligned}U_0 &= u_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} u_{2Nj}, \\ U_k &= u_k + \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-k} + u_{2Nj+k}), \\ V_k &= v_k + \sum_{j=1}^{\infty} (-v_{2Nj-k} + v_{2Nj+k}).\end{aligned} \quad /24/$$

Соотношение /24/ означает, что коэффициенты Бесселя приближенно равны коэффициентам Фурье с точностью до гармоник высшего порядка.

Функция $\eta(\phi)$ - непрерывная, и имеет непрерывную первую производную. Согласно /6/, разрывы имеют только ее вторая производная, а это означает, что когда "k" стремится к бесконечности, коэффициенты Фурье будут стремиться к нулю не медленнее, чем $1/k^3$.

Здесь мы будем пользоваться индексом B для величин, связанных с диполями, g - для величин, связанных с квадрупольными и BC - для величин, связанных с корректирующими диполями.

Можем записать:

$$\eta = \eta_B + \eta_g + \eta_{BC} = \eta_{(B+g)} + \eta_{BC}. \quad /25/$$

Раскладываем η в ряд Фурье и группируем гармоники:

$$\begin{aligned}\eta &= \left[\sum_{k=1}^{N-1} (u_k^{(B+g)} \cos k\phi + v_k^{(B+g)} \sin k\phi) + \frac{u_N^{(B+g)}}{\sqrt{2}} \cos N\phi \right] + \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{N-1} (u_k^{BC} \cos k\phi + v_k^{BC} \sin k\phi) + \frac{u_N^{BC}}{\sqrt{2}} \cos N\phi \right] + \\ &+ \left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) u_N^{BC} \cos N\phi + v_N^{BC} \sin N\phi + \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{BC} \cos k\phi + v_k^{BC} \sin k\phi) \right] + \\ &+ \left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) u_N^{(B+g)} \cos N\phi + v_N^{(B+g)} \sin N\phi + \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{(B+g)} \cos k\phi + v_k^{(B+g)} \sin k\phi) \right].\end{aligned} \quad /26/$$

При помощи /24/ можно записать сумму членов в первой скобке в /26/ в следующем виде:

$$\begin{aligned}[- \dots] &= \sum_{k=1}^{N-1} [U_k \cos k\phi - \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-k}^{(B+g)} + u_{2Nj+k}^{(B+g)}) \cos k\phi + V_k \sin k\phi - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} (-v_{2Nj-k}^{(B+g)} + v_{2Nj+k}^{(B+g)}) \sin k\phi] + \frac{U_N}{\sqrt{2}} \cos N\phi - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-N}^{(B+g)} + u_{2Nj+N}^{(B+g)}) \cos N\phi.\end{aligned} \quad /27/$$

К /27/ добавим еще член:

$$\frac{1}{2}(U_0 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} u_{2Nj}^{(B+g)}) = \frac{1}{2}u_0^{(B+g)} \equiv 0. \quad /28/$$

Тогда для /26/ получим:

$$\begin{aligned} \eta = & \left\{ \frac{U_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} [(U_k + u_k^{BC}) \cos k\phi + (V_k + v_k^{BC}) \sin k\phi] + \frac{1}{\sqrt{2}}(U_N + u_N^{BC}) \cos N\phi \right\} + \\ & + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) u_N^{BC} \cos N\phi + v_N^{BC} \sin N\phi + \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{BC} \cos k\phi + v_k^{BC} \sin k\phi) \right\} + \\ & + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) u_N^{(B+g)} \cos N\phi + v_N^{(B+g)} \sin N\phi + \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{(B+g)} \cos k\phi + \right. \\ & \left. + v_k^{(B+g)} \sin k\phi) - \sum_{j=1}^{\infty} u_{2Nj}^{(B+g)} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-k}^{(B+g)} + u_{2Nj+k}^{(B+g)}) \cos k\phi - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{\infty} (-v_{2Nj-k}^{(B+g)} + v_{2Nj+k}^{(B+g)}) \sin k\phi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-N}^{(B+g)} + u_{2Nj+N}^{(B+g)}) \cos N\phi \right\} = \\ = & \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad /29/ \end{aligned}$$

В выражении /29/ суммы Σ_1 и Σ_2 зависят от η_i и δ_i^{BC} , то есть они для нас - величины известные, и, соответственно, их можно минимизировать. Третья сумма Σ_3 составлена из высших гармоник, связанных с возмущениями, и для нас это - величина неизвестная. Другими словами, Σ_3 будет тем остатком в скорректированной орбите, который присутствует при любом способе коррекции.

Так как нас интересует отклонение орбиты вообще, а не только в конечном количестве точек, то мы здесь введем среднеквадратичное отклонение:

$$\Delta^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Sigma_1 + \Sigma_2)^2 d\phi. \quad /30/$$

Будем считать, что орбита оптимальна, если Δ^2 имеет минимум.

Используя свойства ортогональности тригонометрических функций, можно получить:

$$2\Delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2 + \sum_{p,q=1}^{2N} A_{pq} \eta_p \delta_q^{BC} + \sum_{p,q=1}^{2N} B_{pq} \delta_p^{BC} \delta_q^{BC}, \quad /31/$$

где

$$A_{pq} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cos(\phi_p - \phi_q) + \frac{\sqrt{2}}{N} c_N \cos N\phi_p \cos N\phi_q, \quad /32/$$

$$B_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cos k(\phi_p - \phi_q), \quad /33/$$

$$c_k = \frac{2Q \sin \pi Q}{\pi(Q^2 - k^2)}. \quad /34/$$

Функционал Δ^2 зависит от переменных $\eta_i / i=1, 2, \dots, 2N /$ и $\delta_j^{BC} / j=1, 2, \dots, 2N /$. Так как это - не независимые переменные, а связанные соотношением /9/, то для нахождения минимума Δ^2 мы применим метод неопределенных множителей Лагранжа. В этом методе ищут нули частных производных функции

$$\Phi = \Delta^2 + \sum_{i=1}^{2N} \lambda_i f_i, \quad /35/$$

где:

$$f_i = \eta_i - \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} \delta_j^{BC} - \eta_i^{(B+g)}, \quad /36/$$

и λ_i - неопределенные множители Лагранжа. Это ведет к следующей системе уравнений.

$$\frac{2}{N} \eta_i + \sum_{p=1}^{2N} A_{ip} \delta_p^{BC} + \lambda_i = 0,$$

$$\sum_{p=1}^{2N} A_{pr} \eta_p + \sum_{q=1}^{2N} (B_{qr} + B_{rq}) \delta_q^{BC} - \sum_{i=1}^{2N} a_{ir} \lambda_i = 0, \quad /37/$$

$$\eta_i - \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} \delta_j^{BC} - \eta_i^{(B+g)} = 0.$$

4. КАЧЕСТВО КОРРЕКЦИИ

Возьмем только j -ые по своему расположению в периоде магниты /линзы/. Возмущение поля в этих магнитах $\Delta B_j(\phi)$ /соответственно $\Delta x_j(\phi)$ для линз/ будет стационарной случайной функцией обобщенного азимута ϕ , что следует из периодичности β . Иными словами, случайные функции $\Delta B(\phi)$ и $\Delta x(\phi)$ можно представить как суммы из M_p и K_p стационарных случайных функций:

$$\Delta B(\phi) = \sum_{j=1}^{M_p} \Delta B_j(\phi), \quad /38/$$

$$\Delta x(\phi) = \sum_{j=1}^{K_p} \Delta x_j(\phi). \quad /39/$$

Здесь мы будем обозначать через M математическое ожидание для случайной величины. По смыслу ошибок:

$$m_1^{\Delta B}(\phi) = M[\Delta B(\phi)] \equiv 0, \quad /40/$$

$$m_1^{\Delta x}(\phi) = M[\Delta x(\phi)] \equiv 0. \quad /41/$$

Пусть $\sigma_{\Delta B}^2$ означает дисперсию ΔB , а $\sigma_{\Delta x}^2$ - дисперсию Δx . Рассмотрим сейчас двумерную моментную функцию второго порядка для случайной функции $\Delta B_j(\phi)$.

По определению:

$$\begin{aligned} m_2^{\Delta B_j}(\phi_1, \phi_2) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta B_j(\phi_1) \Delta B_j(\phi_2) \omega(\phi_1, \phi_2) dB_1 dB_2 = \\ &= M[\Delta B_j(\phi_1) \cdot \Delta B_j(\phi_2)], \end{aligned} \quad /42/$$

где $\omega(\phi_1, \phi_2)$ означает плотность вероятности. Из /42/ легко получить, что

$$m_2^{\Delta B}(\phi_1, \phi_2) = \begin{cases} \sigma_{\Delta B}^2, & \text{для } |\phi_1 - \phi_2| \leq \Delta\phi_M, \\ 0, & \text{для } |\phi_1 - \phi_2| > \Delta\phi_M. \end{cases} \quad /43/$$

Так как $\Delta\phi_M \ll 2\pi$, случайная функция $\Delta B_j(\phi)$ слабо скоррелирована, т.е. статистическая связь существует только между ее значениями в двух достаточно близких точках. Заменяем тогда $\Delta B_j(\phi)$ δ -коррелированной случайной функцией, т.е. будем считать, что:

$$m_2^{\Delta B_j} \approx S_j \delta(\phi_2 - \phi_1), \quad /44/$$

где

$$S_j = \sigma_{\Delta B}^2 \Delta\phi_j. \quad /45/$$

Представим $\Delta B_j(\phi)$ в виде ряда Фурье:

$$\Delta B_j(\phi) = \frac{a_{0j}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{kj} \cos k\phi + b_{kj} \sin k\phi). \quad /46/$$

Имеем:

$$a_{0j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta B_j(\phi) d\phi. \quad /47/$$

Так как $\Delta B_j(\phi)$ - стационарная случайная функция, согласно эргодической теореме усреднение по множеству реализаций равносильно усреднению по ϕ . Следовательно,

$$a_{0j} = m_1^{\Delta B_j}(\phi) \equiv 0. \quad /48/$$

Таким образом, в наших фурье-разложениях будут отсутствовать постоянные составляющие.

Для дисперсии K -ых фурье-амплитуд согласно теории случайных функций:

$$\sigma_{a_{kj}}^2 = 2 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) m_2(z) \cos kz dz - \frac{1}{2\pi k} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} m_2(z) \sin kz dz \right\}. /49/$$

Согласно /44, 45/:

$$\sigma_{a_{kj}}^2 = \frac{2}{\pi} \sigma_{\Delta B}^2 \Delta\phi_j \quad /50/$$

и аналогично:

$$\sigma_{b_{kj}}^2 = \frac{2}{\pi} \sigma_{\Delta B}^2 \Delta \phi_j.$$

Тогда на основании /3, 14, 37/ для дисперсии фурье-амплитуд орбиты имеем:

$$\sigma_{u_k}^2 = \sum \left[\left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} - \frac{\beta_j^{3/2}}{B_0 \rho} \right)^2 \frac{2}{\pi} \Delta \phi_j \sigma_B^2 + \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} - \frac{\beta_j^{3/2} g_j}{B \rho} \right)^2 \frac{2}{\pi} \Delta \phi_j \sigma_g^2 \right] = \text{const} \left(\frac{1}{Q^2 - k^2} \right)^2. \quad /52/$$

Введем так называемое качество коррекции как отношение среднеквадратичного отклонения скорректированной орбиты к среднеквадратичному отклонению некорректированной орбиты:

$$K = \frac{\sigma_{\text{корр.}}}{\sigma_{\text{некорр.}}} \quad /53/$$

При рассмотрении метода коррекции в предыдущем параграфе в /29/ мы минимизировали $\Sigma_1 + \Sigma_2$, что нам дает основание считать, что в скорректированной орбите будет присутствовать только Σ_3 , но $\Delta_{\text{min}}^2 \neq 0$?

Тогда можно получить:

$$K^2 = \frac{A^2}{B^2}, \quad /54/$$

где

$$A^2 = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{(Q^2 - k^2)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(Q^2 - (2Nj)^2)^2} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(Q^2 - (2Nj - k)^2)^2} + \frac{1}{(Q^2 - (2Nj + k)^2)^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{(Q^2 - N^2)^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(Q^2 - (2Nj - N)^2)^2} + \frac{1}{(Q^2 - (2Nj + N)^2)^2} \right), \quad /55/$$

$$B^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(Q^2 - k^2)^2}.$$

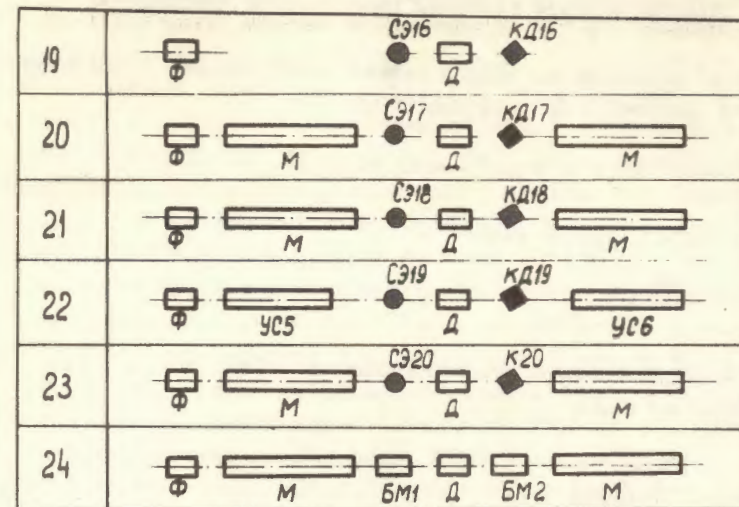
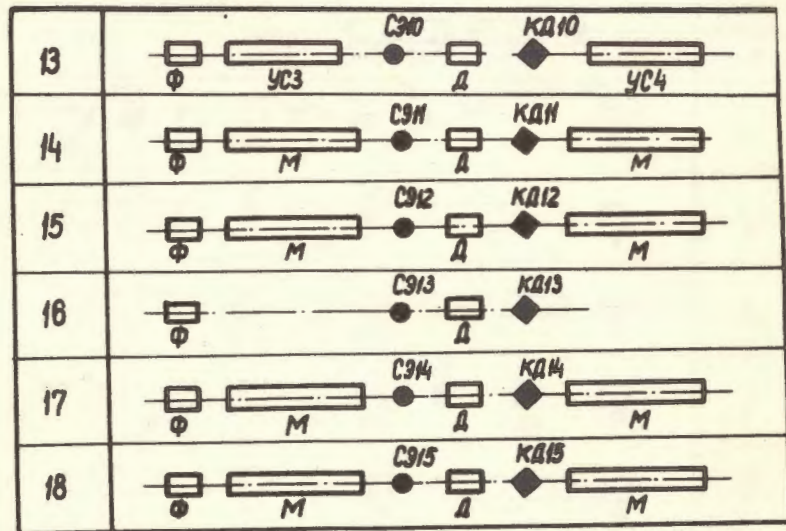
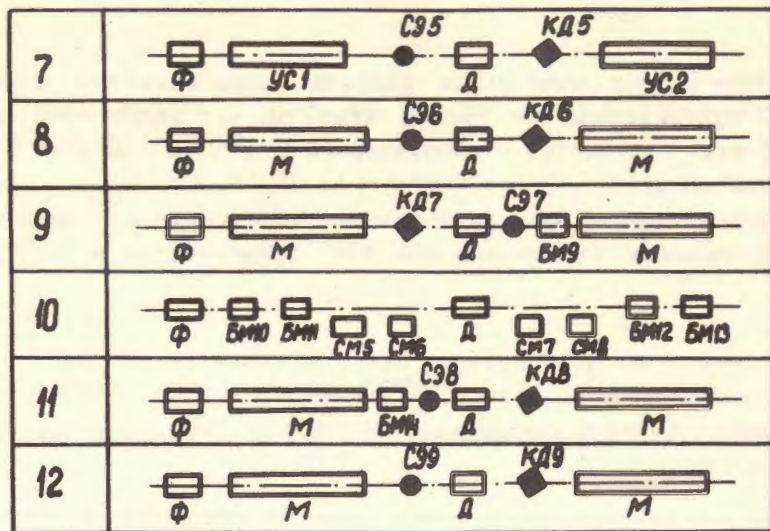
Результаты вычисления качества коррекции для случая ТИС представлены на рис. 1. Отметим, что полученный здесь результат отличается от полученного в /9/. Для случая ТИС мы выбираем $2N = 20$, что отвечает на $K = 8\%$.

Предлагаемое нами расположение корректирующих магнитов и сигнальных электродов для ТИС представлено в таблице.

Таблица

Расположение корректирующих диполей и сигнальных электродов в ТИС.

№ Периода	Схема размещения элементов
Тракт-инжек-ции	
1	
2	
3	
4	
5	
6	



● Сигнальный электрод
◆ Корректирующий диполь

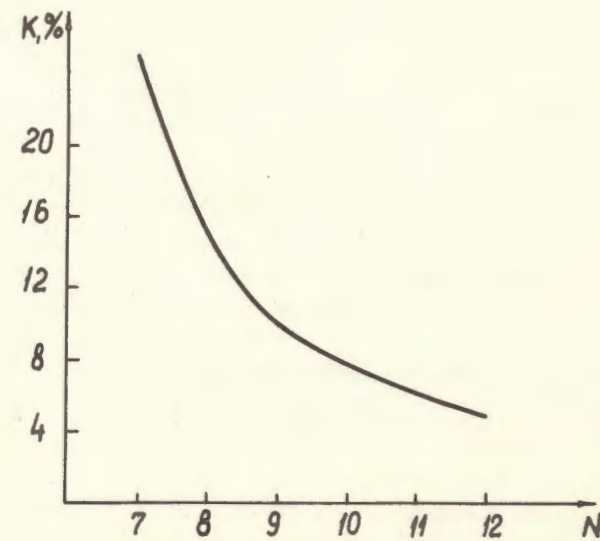


Рис.1. Зависимость качества коррекции /K/ от числа корректирующих диполей ($2N$) для случая ТИС /Q = 5,8/.

5. ВЫБОР СИЛЫ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ДИПОЛЕЙ

При определении максимально необходимой силы корректирующих диполей будем исходить из:

$$\eta_i = \eta_i^{(B+g)} + \sum_{j=1}^{2N} a_{ij} \delta_j^{BC} = 0. \quad /57/$$

Из /57/ следует, что:

$$\sigma_\eta^2 \approx \sum_{j=1}^{2N} a_{ij}^2 \sigma_{BC,j}^2. \quad /58/$$

После некоторых преобразований /58/ можно привести к следующему виду:

$$\sigma_\eta^2 = \sum_{k=1}^{N_p} A_k \sigma_{BC,k}^2, \quad /59/$$

где

$$A_k = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{p-1}{2}y\right) \frac{\sin \frac{py}{2}}{\sin \frac{y}{2}}, \quad /60/$$

$$x = 2Q(\phi_i + \pi - \phi_k), \quad /61/$$

$$y = -2Q \frac{2\pi}{p}. \quad /62/$$

Для случая ТИС из /59/ получаем: $\sigma_{BC}=95$ Гс для горизонтальной плоскости, $\sigma_{BC}=21$ Гс для вертикальной плоскости.

Здесь мы будем использовать для оценки максимального поля в корректорах интервал 2σ , что отвечает вероятности 0,95. Тогда будем иметь следующие максимальные поля в корректорах:

$B_c = 200$ Гс для горизонтальной плоскости,

$B_c = 50$ Гс для вертикальной плоскости.

6. КОРРЕКЦИЯ ПЕРВОГО ОБОРОТА

Предложенный выше метод - это метод коррекции в течение цикла ускорения. На первом обороте, т.е. непосредственно

после инжекции, равновесная орбита еще не является замкнутой кривой, и мы располагаем информацией о ее отклонении от оси только на части периметра ускорителя. Это обстоятельство особо выделяет проблему коррекции первого оборота цикла ускорения. Самый распространенный метод коррекции первого оборота - это метод "шаг за шагом", и мы здесь будем его использовать. Суть метода состоит в том, что отклонение орбиты в i -ом сигнальном электроде сводится к нулю при помощи $i-1$ / корректирующего диполя.

Следуя по ходу пучка, при помощи корректирующего диполя КДО направляем пучок так, чтобы он проходил в середине КДОО. Потом при помощи корректирующего диполя КДОО компенсируем отклонение пучка в сигнальном электроде СЭ1; при помощи КД1 в сигнальном электроде СЭ2 и т.д. Наконец, последний корректирующий диполь КД2N настраиваем так, чтобы снова аннулировалось отклонение в СЭ1. Начинается второй оборот пучка. Если при этом равновесная орбита не замкнута, то показания СЭ2 будут отличными от нуля. Это может случиться при ненулевых условиях инжекции, для чего два корректирующих диполя расположены в области инжекции - КДО и КДОО. С их помощью мы варьируем угол входа пучка в СЭ1 и тем самым добиваемся выполнения условия замкнутости орбиты.

Автор выражает признательность И.Б.Иссинскому за внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.
2. Васильев А.А. и др. Труды VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Ереван, 1970.
3. Васильев А.А. и др. Труды IV Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. "Наука", М., 1973.
4. Дзергач А.И., Карпов В.А. Международная конференция по ускорителям. Дубна, 1963. Атомиздат, М., 1964.

5. Averill R. Part. Acc. Conf., Washington, 1965.
6. Bossart R., Bosser I. CERN 77-2, Geneva, 1977.
7. Baconnier Y. CERN 65-35, Geneva, 1965.
8. Guignard G. CERN 70-1, Geneva, 1970.
9. Guignard G. CERN 70-2, Geneva, 1970.
10. Lapostolle P. GES 69-04, Saclay, 1969.
11. Балдин А.М. и др. Ускорительный комплекс тяжелых ионов. ОИЯИ, 9-11796, Дубна, 1978.

*Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1979 года.*