СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

9 - 11370

С.Т.Иванов, К.А.Решетникова, Н.А.Филиппова

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

1978

9 - 11370

С.Т.Иванов, К.А.Решетникова, Н.А.Филиппова

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Иванов С.Т., Решетникова К.А., Филиппова Н.А. 9 - 11370

К нелинейной теории взаимодействия электронного пучка с плазмой .

Рассматривается в гидродинамическом приближении нелинейная стационарная задача о взаимодействии релятивистского пучка с однородной неограниченной плазмой. Пучок и плазма замагничены, что позволяет считать движение одномерным. Нелинейность связана с влиянием волны на движение электронов пучка, движение электронов плазмы предполагается линейным.

В работе получено более точное, чем известное в литературе, нелинейное волновое уравнение. Найден его первый интеграл. Это позволило определить значение амплитуды волны,возбуждаемой пучком в плазме и соответственно энергию электромагнитного поля как функцию тока и энергии пучка.

Новый способ решения уравнения позволил расширить область применения теории на случай релятивистского движения пучка в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, что ранее не рассматривалось.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Ivanov S.T., Reshetnikova K.A., Filippova N.A. 9 - 11370

On Non-Linear Theory of the Relativistic Beam and Plasma Interaction

A non-linear stationary solution for relativistic beam and uniform unlimited plasma interaction is considered in hydrodynamics approach. The beam and plasma are magnetized. That allows one to consider the motion to be one - dimensional. Non-linearity is connected with the wave effect on the electron beam motion. Plasma electron motion is thought to be linear.

Non-linear wave equation has been obtained. The equation is of a finer character, than the known one. It's first integral has been found. This permitted to determine the wave amplitude value excited by the beam in plasma and, hence, the electromagnetic field energy as the current and the beam energy function.

The utilization of the new method of the solution has allowed to enlarge the range of the theory application on the occasion of relativistic beam motion in the coordinate system moving with the phase wave velocity. It hasn't been considered earlier.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Известно, что при движении электронного пучка через плазму в системе при определенных условиях может развиться довольно сильная электростатическая неустойчивость, в результате которой возникает электромагнитная волна, а пучок теряет энергию. Вопрос о величине амплитуды такой волны представляет большой интерес для ряда задач ускорительной техники и плазменной электроники.

Обычно электронный пучок характеризуется параметром $S = \beta^2 \gamma \left(\frac{\bar{n}_b}{2\bar{n}_p}\right)^{1/3}$, где $\bar{\beta} = \frac{\bar{v}}{c}$, $\bar{v}$ - начальная скорость пучка, $\gamma = (1-\bar{\beta}^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор пучка, $\bar{n}_b$, $\bar{n}_p$ - начальные плотности электронов пучка и плазмы соответственно. Для характеристики электромагнитной волны вводится параметр $\eta = \frac{E_0^2}{8\pi m_0 c^2 \bar{n}_b \bar{\gamma}}$, где E_0 - амплитуда напряженности поля волны.

Зависимость величины η от параметра S изучалась в ряде работ [1-3]. В [1] Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро и В.И.Шевченко на основе квазилинейной теории получили

$$\eta = 0{,}156\, S . \qquad /1/$$

В работе [2] Р.И.Ковтун и А.А.Рухадзе заложили основы нелинейной теории взаимодействия релятивистского электронного пучка с плазмой для стационарного состояния системы. Они показали, что для $S \ll 1$

$$\eta = 0{,}4\,S. \qquad /2/$$

В работе [3] авторы сняли ограничения на малость параметра S и для $S \le 5$ нашли численно:

$$\eta = \frac{0{,}5\,S}{(1+S)^{5/2}}. \qquad /3/$$

Как следует из /3/, при $S = 0{,}8$ наблюдается максимум η, далее, с ростом S, величина η убывает.

В настоящем сообщении на основе решения самосогласованной стационарной задачи уточняется зависимость величины η от параметра S. Используется постановка задачи, данная в работе [2]. Рассматривается неограниченная однородная плазма и релятивистский электронный пучок. Движение электронов плазмы считается линейным, нелинейность связана с влиянием волны на движение электронов пучка. Используется наличие сильного магнитного поля, что позволяет считать движение одномерным. В отличие от [2] в настоящей работе учитываются в полученном уравнении некоторые отбрасываемые раньше члены и применяется другой способ решения, что расширяет область применимости теории на большие значения параметра S.

Вводим, как и в [2], переменную ξ, $\dfrac{\partial}{\partial \xi} = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial \xi} = -v\dfrac{\partial}{\partial z}$,

где v - фазовая скорость волны. В качестве исходных используем волновые уравнения для потенциалов поля и условие Лоренца:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{j}, \qquad /4а/$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \qquad /4б/$$

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \qquad /4в/$$

Для напряженности поля E имеем:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{v\gamma^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \qquad /5/$$

где $\gamma^2 = (1-\beta^2)^{-1}$, $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Из /4/ при условии: $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0$ при $n_b = n_0$, $n_p = n_{p_0}$,

где n_0, n_{p_0} - плотность электронов пучка и плазмы при $\Phi = 0$, имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = -4\pi c^2 \beta^2 \gamma^2 e\,(n_b + n_p - n_{b_0} - n_{p_0}). \qquad /6/$$

Используем следующие соотношения, полученные в работе [2]:

$$n_b = n_0 \frac{\beta - \beta_0}{\beta - \beta_b}, \qquad /7а/$$

$$\gamma_b (1 - \beta\beta_b) + \frac{e\Phi}{m_0 c^2 \gamma^2} = \gamma_0 (1 - \beta\beta_0), \qquad /7б/$$

где $\beta_b = \dfrac{v_b}{c}$, v_b - скорость электронов пучка,

$\beta_0 = \dfrac{v_0}{c}$, v_0 - скорость электронов пучка при $\Phi = 0$,

n_b - плотность электронов пучка.

Для электронов плазмы используем линейное приближение

$$n_p = \bar{n}_p \left(1 + \frac{\beta_p}{\beta}\right), \qquad /8а/$$

$$\beta_p = \frac{e\Phi}{m_0 c^2 \gamma^2 \beta}. \qquad /8б/$$

Введем обозначения:

$$\gamma' = \gamma\gamma_b(1-\beta\beta_b); \quad \gamma_0' = \gamma\gamma_0(1-\beta\beta_0); \qquad /9а/$$

$$\phi = \frac{e\Phi}{m_0 c^2 \gamma\gamma_0'}. \qquad /9б/$$

Тогда /7б/ можно записать в виде

$$\phi = 1 - \frac{\gamma'}{\gamma_0'}. \qquad /10/$$

Как видно из /10/, при $\gamma' = 1$ ($\gamma_b = \gamma$) величина ϕ достигает максимального значения. Обозначим это значение через $\phi = \phi_0$:

$$\phi_0 = 1 - \frac{1}{\gamma_0'} = 1 - \sqrt{1-\alpha^2}, \qquad /11/$$

$$\alpha^2 = 1 - \frac{1}{\gamma'^2}, \qquad \alpha^2 = \frac{(\beta-\beta_0)^2}{(1-\beta\beta_0)^2}. \qquad /12/$$

Выражение /11/ можно записать в виде

$$\alpha^2 - 2\phi_0 + \phi_0^2 = 0. \qquad /13/$$

Значение $\phi = \phi_0$ называется амплитудой насыщения [2]. Как показано в[4], условие /11/ - это условие захвата электронов электромагнитной волной в релятивистском случае.

Из /10/ нетрудно выразить скорость электронов через величину ϕ:

$$\beta_b = \beta \frac{(1-\phi) \mp \frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha^2 - 2\phi + \phi^2}}{(1-\phi) \mp \beta\sqrt{\alpha^2 - 2\phi + \phi^2}}. \qquad /14/$$

В дальнейшем будем рассматривать меньшие значения скорости β /знак - перед корнем/.
Подставляя в /6/ выражения /7а/, /8/ и /14/, получим:

$$\frac{d^2\phi}{d\psi^2} + \nu_p^2\phi = -\nu_0^2 \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0}\left[\frac{\alpha(1-\phi)}{\sqrt{\alpha^2 - 2\phi + \phi^2}} - 1\right], \qquad /15/$$

где $\psi = \omega\xi$, ω - частота волны,

$$\nu_p^2 = \frac{4\pi e^2 \bar{n}_p}{m_0\omega^2}, \qquad \nu_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_0\omega^2},$$

$$\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}, \qquad \alpha = \frac{\beta-\beta_0}{1-\beta\beta_0}.$$

Уравнение /15/совпадает с уравнением /2,6/ работы [2] при $\phi \ll 1$, что, в конечном итоге, сводится к условию $S \ll 1$.
Будем решать уравнение /15/, не накладывая ограничений на параметры, входящие в уравнение /15/.

Найдем первый интеграл уравнения /15/:

$$\dot\phi^2 = -\nu_p^2\phi^2 + 2\nu_0^2 \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0}\left[\alpha\sqrt{\alpha^2 - 2\phi + \phi^2} + \phi\right] + C, \qquad /16/$$

где $\dot\phi = \frac{d\phi}{d\psi}$.

Нетрудно показать, что величина $\dot\phi^2$ достигает максимального значения при $\phi = 0$.
Обозначим $\dot\phi_{max} = \dot\phi_a$.
Тогда

$$C = \dot\phi_a^2 - 2\nu_0^2 \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0}\alpha^2. \qquad /17/$$

Положим $\dot\phi = 0$ при $\phi = \phi_a$.

Из /16/ при учете /17/ получим:

$$\dot\phi_a^2 = \nu_p^2\phi_a^2 + 2\nu_0^2\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0}[\alpha^2-\phi_a - \alpha\sqrt{\alpha^2-2\phi_a+\phi_a^2}\ ]. \qquad /18/$$

При $\dot\phi_a = \phi_0$, $\phi_a = \phi_0$ из /18/ получим:

$$\phi_0^2 = \nu_p^2\phi_0^2 + 2\nu_0^2\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0}(\alpha^2-\phi_0)\ . \qquad /19/$$

Из /19/ очевидно, что $\nu_p^2 < 1$, т.к. $\phi_0 < \alpha^2$. Величину $\eta = E_0^2$ в наших переменных можно записать в виде

$$\eta = \frac{\dot\phi_a^2\,\gamma_0'^2\,\bar\beta^6\,\bar\gamma^2}{4S^3\beta^2\gamma^2\nu_p^2}\ . \qquad /20/$$

Для вычисления η как функции S необходимо определить величины ν_p^2, ν_0^2, $\alpha^2 = 1 - 1/\gamma_0'^2$ при заданных $\bar\beta$, $\frac{\bar n_b}{\bar n_p}$. Используем закон сохранения энергии:

$$\frac{E^2}{8\pi} + m_0c^2(n_b\gamma_b + n_p\gamma_p) = m_0c^2(\bar n_b\bar\gamma_b + \bar n_p\bar\gamma_p)\ . \qquad /21/$$

Заметим, что в этой задаче H = 0. Физический смысл соотношения /21/ - в том, что в однородной неограниченной системе начальная энергия частиц пучка и плазмы расходуется на создание электромагнитного поля и изменение энергии частиц компонентов системы. Для $\phi = 0$, когда $\dot\phi = \phi_0$, $n_b = n_0$, $\gamma_b = \gamma_0$, $n_p = n_{po} = \bar n_p$, $\gamma_p = \bar\gamma_p$, соотношение /21/ можно записать в виде

$$\phi_0^2 = 2\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0'^2}(\bar\nu^2\bar\gamma - \nu_0^2\gamma_0),$$

где

$$\bar\nu^2 = \frac{4\pi e^2\bar n_b}{m_0\omega^2} = \nu\cdot\nu_p^2,\quad \nu = \frac{\bar n_b}{\bar n_p},\quad \nu_p^2 = \frac{4\pi e^2\bar n_p}{m_0\omega^2},$$

$$\nu_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_0\omega^2}\ .$$

Из /22/, учитывая /11/, определим ν_0^2:

$$\nu_0^2 = \bar\nu^2\frac{\bar\gamma}{\gamma_0} - \frac{(\gamma_0'-1)^2}{2\beta^2\gamma^2\gamma_0}\ . \qquad /23/$$

Запишем /19/ в виде

$$(\gamma_0'-1)^2(1-\nu_p^2) = 2\nu_0^2\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0}(\gamma_0'-1)\ . \qquad /24/$$

Подставим /23/ в /24/ :

$$(\gamma_0'-1)^2 + \gamma_0^2(1-\nu_p^2)(\gamma_0'-1) = 4S^3q\ , \qquad /25/$$

где

$$q = \frac{\beta^2\gamma^2}{\bar\beta^6\bar\gamma^2}\nu_p^2\ ,$$

$$S = \frac{1}{2^{1/3}}\nu^{1/3}\bar\beta^2\,\bar\gamma\ .$$

Аналогично работе /2/ примем:

$$\nu_p^2 = \frac{1}{1+2\cdot\delta}\ , \qquad /26a/$$

где

$$\delta = \frac{\beta - \beta_0}{\beta} = \frac{a \cdot \gamma_0'}{\beta \gamma \gamma_0} \ll 1 . \qquad /26б/$$

Положим

$$\gamma_0' - 1 = \frac{a^2}{2}, \quad \gamma_0 = \gamma, \quad \bar{\gamma} = \gamma, \quad \gamma_0' = 1, \quad \frac{a}{\beta \gamma^2} \ll 1 .$$

Тогда из соотношения /25/ получим:

$$\frac{a^3}{\beta} (1 + \frac{a\beta}{4}) = \frac{4S^3}{\beta^4} . \qquad /27/$$

При условии

$$\frac{a\beta}{4} \ll 1 \qquad /28/$$

уравнение /27/ можно решить методом последовательных приближений. В результате получим:

$$a = \frac{2^{2/3} S}{\beta (1 + \frac{S}{2^{4/3}})} . \qquad /29/$$

Соотношение /2О/ для рассcматриваемого случая можно записать в виде

$$\eta = \frac{(\gamma_0' - 1)^2 \beta^4}{4S^3 \nu_p^2} = \frac{a^4 \beta^4}{16 S^3} . \qquad /3О/$$

Подставляя /29/ в /3О/, найдем:

$$\eta = \frac{S}{2^{4/3} (1 + \frac{S}{2^{4/3}})^4} . \qquad /31/$$

Легко показать, что величина η как функция S имеет максимум при $S = 0{,}83$, что согласуется с утверждением работы /3/. При $S \ll 1$ имеем результат работы /2/, т.е. $\eta = 0{,}4\,S$. Соотношение /31/ справедливо при условии, что движение электронов плазмы под воздействием электромагнитной волны, возбуждаемой пучком, линейно.

Условие линейности известно: $\frac{\beta_p}{\beta} \ll 1$. С учетом соотношений /8б/ и /9б/ его можно записать в виде

$$\frac{\phi_0 \gamma_0'}{\beta^2 \gamma} \ll 1 . \qquad /32/$$

Из /32/, имея в виду /11/, можно найти предельное значение параметра γ_0', ниже которого движение электронов плазмы линейно:

$$(\gamma_0')_{пр} = 1 + \epsilon \beta^2 \gamma , \qquad /33/$$

где $\epsilon \ll 1$.

Как видно из /33/, для релятивистских пучков ($\gamma \gg 1$), даже для линейной плазмы, движение электронов пучка в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, может иметь релятивистский характер ($\gamma_0' \geq 1$).

В этом случае откажемся от предположения, что $\dot{\phi}_a = \phi_0$, однако оставим $\phi_a = \phi_0$. Соотношение /18/ тогда будет иметь вид:

$$\dot{\phi}_a^2 = \nu_p^2 \phi_0^2 + 2\nu_0^2 \frac{\beta^2 \gamma^2}{\gamma_0} (a^2 - \phi_0) , \qquad /34/$$

где

$$\nu_0^2 = \nu \cdot \nu_\rho^2 \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} - \frac{(\gamma_0' - 1)^2}{2\beta^2 \gamma^2 \gamma_0} . \qquad /35/$$

Для величины ν_p^2 примем

$$\nu_p^2 = \frac{1}{1+2\delta}, \qquad /36а/$$

где

$$\delta = \frac{\beta\gamma - \beta_0\gamma_0}{\beta\gamma}. \qquad /36б/$$

С учетом /7/

$$\delta = \frac{\gamma - \gamma_0 + \phi_0 \frac{\gamma_0'}{\gamma}}{\beta^2\gamma}. \qquad /37/$$

Из /34/ и /35/ получим:

$$\dot{\phi}_a^2 = \frac{\nu_p^2 \cdot [\phi_0^2 + 2\frac{\beta^2\gamma^2\bar{\gamma}}{\gamma_0^2}\cdot\nu\,(a^2 - \phi_0)]}{1 + \frac{\gamma_0'^2}{\gamma_0^2}(a^2 - \phi_0)}. \qquad /38/$$

Положим в /38/ $\gamma = \bar{\gamma}$, $\gamma_0' = (\gamma_0')_{пр}$, при этом $(\gamma_0')_{пр}$ определяется из /33/.
В /38/ значения a, ϕ_0, γ_0 равны:

$$a = \frac{\sqrt{\gamma_0' - 1}}{\gamma_0'}, \qquad a^2 - \phi_0 = \frac{\gamma_0' - 1}{\gamma_0'^2}.$$

$$\phi_0 = 1 - \frac{1}{\gamma_0'},$$

$$\gamma_0 = \gamma \cdot \gamma_0'(1 - a\beta), \qquad /39/$$

Подставляя /38/ с учетом /39/ в /2О/, найдем:

$$\eta = \frac{[(\gamma_0' - 1)^2 + 4S^3\frac{(\gamma_0' - 1)}{\bar{\beta}^4\gamma_0^2}]\,\bar{\beta}^4}{4S^3\,[1 + \frac{(\gamma_0' - 1)}{\gamma_0^2}]}.$$

Здесь

$$\gamma_0' = (\gamma_0')_{пр}.$$

Как видно из /4О/, величина η является функцией двух параметров: $\nu = \frac{\bar{n}_b}{\bar{n}_p}$, $\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\beta}^2}}$.
Напомним, что

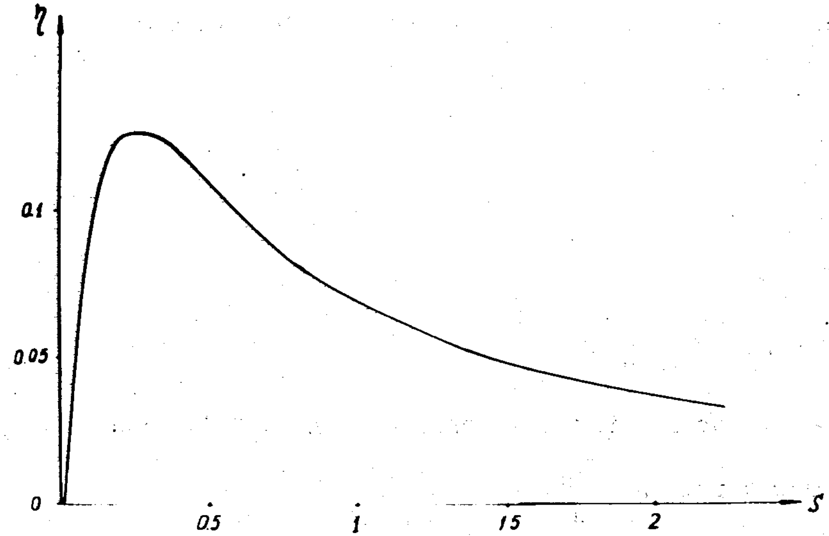
$$S^3 = \frac{\bar{\beta}^6\bar{\gamma}^3\cdot\nu}{2}.$$

Расчеты на ЭВМ проводились при разных значениях $\nu, \bar{\gamma}$. Они показали, что при $\nu = \mathrm{const}$ и переменном $\bar{\gamma}$ зависимость величины η от S аналогична найденной в работе [3], однако максимум величины η приходится на значения S, меньшие, чем найденные в [3].

На *рисунке* представлена соответствующая кривая $\eta = \eta(S)$ для $\nu = 0{,}02$ при переменном релятивистском факторе пучка $\bar{\gamma}$. Как видно, максимум η приходится на значения $S \approx 0{,}33$.

Что касается зависимости $\eta = \eta(S)$ при $\bar{\gamma} = \mathrm{const}$ и переменном ν, то, как показали расчеты, для диапазона $\bar{\gamma} = 1{,}01 \div 10{,}51$ величина η с ростом ν монотонно убывает.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы. При взаимодействии релятивистского электронного пучка с плазмой существенное значение имеет, даже для линейной плазмы, релятивистский характер движения электронов пучка в системе координат, дви-



Зависимость величины η *от параметра* S *при* ν *= 0,02.*

жущейся с фазовой скоростью волны. Амплитуда волны, возбуждаемой пучком в плазме /а следовательно и коэффициент трансформации энергии пучка в электромагнитную энергию поля (η) /, в общем случае не определяется однозначно параметром S, а зависит при n_p = const от двух параметров пучка: тока и энергии. Для перехода к большим значениям этих параметров необходимо учесть нелинейный характер движения электронов плазмы и поперечное движение электронов пучка.

В заключение авторы благодарят товарищей по работе за обсуждение и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. ЖЭТФ, 1969, 57, с.966.*
2. *Ковтун Р.И., Рухадзе А.А. ЖЭТФ, 1970, 58, с.1708.*
3. *Thode, L.E., Sudan R.N. Phys.Rev.Lett.1973,30,p.732.*
4. *Иванов С.Т., Макаренко Г.М., Решетникова К.А. Препринт ОИЯИ, Р9-10447, 1977.*

Рукопись поступила в издательский отдел 6 марта 1978 года.