

К-143

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



81/2-78

2/1-78
P9 - 10985

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, В.Ф.Шевцов

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРАХ ПУЧКОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

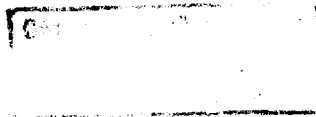
1977

P9 - 10985

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, В.Ф.Шевцов

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРАХ ПУЧКОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Направлено в "Particle Accelerators"



Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф.

P9 - 10985

О среднеквадратичных размерах пучков заряженных частиц в линейных электромагнитных полях

С помощью уравнений для полных моментов функции распределения получена система уравнений для среднеквадратичных размеров произвольных сгустков частиц. Показано, что если собственными полями сгустка можно пренебречь, то уравнения линейны и не зависят от вида функции распределения частиц в фазовом пространстве. Влияние пространственного заряда легко учитывается, если собственные поля линейны.

Полученные уравнения позволяют рассматривать в едином подходе колебания огибающей прямых пучков в фокусирующем потенциале и продольном магнитном поле.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Kazarinov N.Yu., Perelstein E.A., Shevtsov V.F.

P9 - 10985

On RMS Dimensions of Charged Particle Beams in Linear Electromagnetic Fields

The system of equations for the RMS dimensions of charged particle beams were obtained using the momentum method. When the self-fields are too small this equations are linear and do not depend on the distribution function form. The influence of the space charge is accounted easily in the case of linear self-fields. The obtained equations allowed one to consider the envelope oscillations in the focusing potential and the longitudinal magnetic field.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

При исследовании пучков частиц практический интерес зачастую представляют усредненные характеристики пучка, такие как средняя скорость, температура, среднеквадратичные размеры и т.д.

Задача об изменении во времени среднеквадратичных размеров (огибающей) пучков заряженных частиц в электромагнитных полях исследовалась рядом авторов (см., например, библиографию к работе ^{1/}).

В работах ^{2,3/} в рамках самосогласованной модели пучка с равномерной по эллиптическому сечению плотностью заряда получены уравнения для колебаний огибающей (уравнения Владимирского-Капчинского). Характерным для данной модели является тот факт, что эллипс, ограничивающий пучок в конфигурационном пространстве, не вращается.

В ^{4/} была предложена нестационарная самосогласованная модель пучка (модель Яркового), которая снимает ограничения, свойственные модели Владимирского-Капчинского, и включает ее в себя как частный случай. Уравнения колебаний огибающей, полученные в этой работе, представляют собой систему нелинейных дифференциальных матричных уравнений, что несколько затрудняет ее использование.

Недавно в работе ^{5/} в азимутально симметричном случае, было получено уравнение для изменения во времени среднеквадратичного радиуса пучка, находящегося в продольном магнитном поле.

В данной работе с помощью методики, предложенной в ^{6/}, выводятся уравнения для колебаний среднеквадратичных размеров произвольных пучков заряженных час-

тиц в линейных электромагнитных полях. Поперечное движение частиц в пучке считается нерелятивистским. Обобщение на случай релятивистского движения частиц легко проводится ^{/6/}.

1 В ^{/6/} были введены моменты функции распределения частиц по всей совокупности фазовых координат, и получена система дифференциальных уравнений, связывающая между собой моменты различных порядков (для произвольного электромагнитного поля). В случае линейных полей было показано, что эта система распадается на независимые подсистемы для моментов одного порядка.

Следуя ^{/6/}, получим уравнения для среднеквадратичных размеров пучка в линейных полях. В этих полях уравнения движения частицы могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i,$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 (b_{ik}(t)x_k + a_{ik}(t)v_k) + b_i^0(t),$$

$$i = 1, 2, 3,$$

где x_i, v_i - координаты и скорости частиц в декартовой системе координат; b_{ik}, a_{ik} - квадратные матрицы.

Для удобства дальнейшего изложения запишем систему (1) в матричной форме:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B_0;$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}; \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $y = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ - столбец, построенный из координат и скоростей частицы; $A(t)$ - блочная матрица, построенная из матриц a и b ; I - единичная матрица. Смысл B_0 понятен из определения.

Будем считать, что столкновениями частиц в системе можно пренебречь. Тогда функция распределения частиц в фазовом пространстве f удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (3)$$

Введем моменты функции распределения по всей совокупности фазовых координат:

$$M^0 = \int f dy; \quad M^I = \bar{y} = \frac{1}{M^0} \int y f dy;$$

$$M^{II} = \frac{1}{M^0} \int (y - \bar{y})(y - \bar{y})^* f dy.$$

Интегрирование в (4) проводится по фазовому объему, занимаемому частицами ($dy = d\vec{x}d\vec{v}$). Знак "*" означает транспонирование матрицы.

Образует из моментов второго порядка блочную матрицу:

$$M^{II} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xv} \\ M_{xv}^* & M_{vv} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

элементы которой являются квадратными матрицами. Так, например, M_{xx} есть симметричная матрица среднеквадратичных размеров пучка:

$$M_{xx} = \begin{pmatrix} \overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2} & \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} & \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3)} \\ \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} & \overline{(x_2 - \bar{x}_2)^2} & \overline{(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)} \\ \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3)} & \overline{(x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)} & \overline{(x_3 - \bar{x}_3)^2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из (2), (3) следует, что моменты (4) изменяются во времени согласно уравнениям:

$$\frac{dM^0}{dt} = 0; \quad \frac{dM^I}{dt} = AM^I + B_0;$$

$$\frac{dM^{II}}{dt} = AM^{II} + M^{II}A^*.$$

Уравнение для моментов второго порядка совпадает с уравнением, полученным в работе ^{/7/}.

Воспользовавшись определением матрицы А (2), из (7) легкополучить уравнения для элементов матрицы M^{II} :

$$\frac{dM_{xx}}{dt} = M_{xv} + M_{xv}^* \quad (8a)$$

$$\frac{dM_{vv}}{dt} = bM_{xv} + M_{xv}^* b^* + aM_{vv} + M_{vv} a^* \quad (8б)$$

$$\frac{dM_{xv}}{dt} = M_{vv} + M_{xx} b^* + M_{xv} a^* \quad (8в)$$

Введем матрицу J следующим образом:

$$J = M_{xv} - M_{xv}^* \quad (9)$$

Элементы этой матрицы связаны с вектором среднего момента импульса

$$\vec{j} = \frac{1}{M^0} \int [(\vec{x} - \vec{x})(\vec{v} - \vec{v})] f dy,$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & j_3 & -j_2 \\ -j_3 & 0 & j_1 \\ j_2 & -j_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Исключим из системы (8) матрицу M_{vv} . Для этого продифференцируем (8a) по времени:

$$\frac{d^2 M_{xx}}{dt^2} = 2M_{vv} + bM_{xx} + M_{xx} b^* + \frac{1}{2} \left(a \frac{dM_{xx}}{dt} + \frac{dM_{xx}}{dt} a^* \right) + \frac{1}{2} (aJ^* + Ja^*) \quad (11)$$

Дифференцируя (11), с помощью уравнения (8б) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 M_{xx}}{dt^3} &= \left(2b - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} \frac{da}{dt} \right) \frac{dM_{xx}}{dt} + \frac{dM_{xx}}{dt} \left(2b^* - \frac{1}{4} a^{*2} + \frac{1}{2} \frac{da^*}{dt} \right) - \frac{3}{2} a \frac{dM_{xx}}{dt} a^* + \frac{3}{2} \left(a \frac{d^2 M_{xx}}{dt^2} + \frac{d^2 M_{xx}}{dt^2} a^* \right) + \\ &+ \left(\frac{db}{dt} - \frac{1}{2} ab \right) M_{xx} + M_{xx} \left(\frac{db^*}{dt} - \frac{1}{2} b^* a^* \right) - \frac{3}{2} a M_{xx} b^* - \\ &- \frac{3}{2} b M_{xx} a^* + \left(b + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} \frac{da}{dt} \right) J + \\ &+ J^* \left(b^* + \frac{1}{4} a^{*2} - \frac{1}{2} \frac{da^*}{dt} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Матрица J, как это следует из (8в) и (10), удовлетворяет уравнению

$$\frac{dJ}{dt} = M_{xx} b^* - b M_{xx} + \frac{1}{2} \left(-\frac{dM_{xx}}{dt} a^* - a \frac{dM_{xx}}{dt} \right) + \frac{1}{2} (Ja^* - aJ^*) \quad (13)$$

Система (12), (13) вместе с начальными условиями для моментов и формулами (8), (11), взятыми в начальный момент времени, решают поставленную задачу.

Отметим, что в случае малой плотности частиц (когда собственными полями сгустка можно пренебречь), уравнения (12,13) линейны и не зависят от вида функции распределения f . Аналогичный результат в одномерном случае был получен в /5,6/. Для линейных собственных полей решения этих уравнений дают самосогласованные колебания огибающей пучка (см. II). Во всех других случаях систему (12,13) можно рассматривать как самосогласованную приближенно, если удерживать в силе Лоренца собственного электромагнитного поля сгустка члены, линейные по скоростям и координатам частиц.

II. Если движения разделяются, можно рассматривать бесконечный в одном направлении (ось x_3) пучок

чок и строить систему моментов (4) для поперечного движения. Матрицы M_{xx} и J , входящие в (12,13), будут тогда квадратными матрицами второго порядка, а производная по времени понимается как

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (14)$$

где v_0 — скорость продольного движения частиц.

Рассмотрим задачу о колебаниях среднеквадратичных размеров пучка в статическом потенциале

$$U(x_1, x_2) = \frac{b_1}{2} x_1^2 + b x_1 x_2 + \frac{b_2}{2} x_2^2 \quad (15)$$

и продольном стационарном магнитном поле

$$\vec{H} = (0, 0, H_3). \quad (16)$$

В этом случае матрицы a и b записываются в следующем виде:

$$a = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = - \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b & b_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Параметр a равен удвоенной ларморовской частоте:

$$a = 2\omega_L = \frac{eH_3}{mc \gamma_0}, \quad (18)$$

где e , m — заряд и масса частицы, соответственно; c — скорость света в вакууме; γ_0 — релятивистский фактор продольного движения.

Уравнения (12,13) инвариантны относительно унитарного преобразования, приводящего матрицу b к диагональному виду, причем матрица a не меняется при этом преобразовании. Поэтому без ограничения общности можно считать матрицу b диагональной:

$$b = \begin{pmatrix} -\nu_1^2 & 0 \\ 0 & -\nu_2^2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

с элементами ν_1, ν_2 , равными частотам нормальных колебаний в потенциале (15).

В этом случае компоненты матриц M_{xx} и J удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^3 M_{xx}^{11}}{dt^3} = \ddot{g}_1 = -(4\nu_1^2 - \frac{a^2}{2})\dot{g}_1 - \frac{3}{2}a^2\dot{g}_2 + a(\nu_2^2 + 3\nu_1^2)g + 3a\ddot{g};$$

$$\frac{d^3 M_{xx}^{22}}{dt^3} = \ddot{g}_2 = -(4\nu_2^2 - \frac{a^2}{2})\dot{g}_2 - \frac{3}{2}a^2\dot{g}_1 - a(\nu_1^2 + 3\nu_2^2)g - 3a\ddot{g};$$

$$\frac{d^3 M_{xx}^{12}}{dt^3} = \frac{d^3 M_{xx}^{21}}{dt^3} = \ddot{g} = -2(\nu_1^2 + \nu_2^2 - a^2)\dot{g} + \quad (20)$$

$$+ 2a(\nu_2^2\dot{g}_2 - \nu_1^2\dot{g}_1) + \frac{3}{2}a(\ddot{g}_2 - \ddot{g}_1) - (\nu_1^2 - \nu_2^2)J;$$

$$\frac{dJ_{12}}{dt} = - \frac{dJ_{21}}{dt} = \dot{J} = (\nu_1^2 - \nu_2^2)g - \frac{1}{2}a(\dot{g}_1 + \dot{g}_2).$$

Собственные частоты колебаний системы (20) ω определяются из уравнения:

$$\omega^2 [\omega^4 - 4\omega^2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + a^2) + 16\nu_1^2\nu_2^2] \times \quad (21)$$

$$\times [(\omega^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - a^2)^2 - 4\nu_1^2\nu_2^2] = 0.$$

Решения уравнения (21) действительны при действительных значениях параметров ν_1, ν_2, a , следовательно, система (20) определяет устойчивые колебания среднеквадратичных размеров пучка. Вырождение собственных частот в случае $\nu_1 = \nu_2 = 0$ не приводит, как это будет показано ниже, к линейному росту амплитуды колебаний. Отметим, что первый из сомножителей в квадратных скобках дает удвоенные частоты колебаний одной частицы в полях (15,16).

Собственное поле легко вводится в рассмотрение для равномерно заряженного пучка эллиптического сечения с плотностью заряда ρ , определяемой формулой:

$$\rho = \rho_0 \sigma [1 - x^* G(t) x], \quad (22)$$

где G - квадратная симметричная матрица, σ - ступенчатая функция Хевисайда.

В работе /4/ на основе билинейного инварианта системы линейных дифференциальных уравнений вида (1) была построена функция распределения (модель Яркового), дающая плотность (22). Можно показать, что матрица G^{-1} (матрица, обратная G) удовлетворяет уравнениям, эквивалентным системе (12,13). Следовательно, матрицы M_{xx} и G^{-1} должны совпадать с точностью до постоянного множителя. Непосредственное вычисление дает

$$M_{xx} = \frac{1}{4} G^{-1}. \quad (23)$$

Воспользовавшись выражением собственного поля пучка через элементы матрицы $G^{-1/4}$, получим:

$$b = b^s + b^{ext},$$

где $b^s = \frac{4\nu c^2}{\gamma_0^3} \frac{M_{xx}^{-1/2}}{Sp M_{xx}^{1/2}}, \quad (24)$

а матрица b^{ext} определяется внешним электрическим полем (15). В формуле (24) использованы следующие обозначения:

$\nu = N_L \Gamma_e$ - параметр Будкера; N_L - линейная плотность частиц в пучке; Γ_e - классический радиус электрона. Матрица $M_{xx}^{1/2}$ определена так, что

$$M_{xx}^{1/2} M_{xx}^{1/2} = M_{xx}. \quad (25)$$

Таким образом, система (12,13) вместе с (24) дает самосогласованные колебания огибающей пучка с постоянной плотностью.

III. В отсутствие внешнего продольного магнитного

поля (14) ($\alpha=0$) уравнения (20) упрощаются, и их решения имеют вид:

$$g_1 = g_1^0 + \frac{\ddot{g}_1^0}{4\nu_1^2} - \frac{\ddot{g}_1^0}{4\nu_1^2} \cos 2\nu_1 t + \frac{\dot{g}_1^0}{2\nu_1} \sin 2\nu_1 t;$$

$$g_2 = g_2^0 + \frac{\ddot{g}_2^0}{4\nu_2^2} - \frac{\ddot{g}_2^0}{4\nu_2^2} \cos 2\nu_2 t + \frac{\dot{g}_2^0}{2\nu_2} \sin 2\nu_2 t;$$

$$g = \frac{1}{4\nu_1\nu_2} \{ -[\ddot{g}^0 + (\nu_1 - \nu_2)^2 g^0] \cos(\nu_1 + \nu_2)t + [(\nu_1 + \nu_2)\dot{g}^0 + (\nu_1 - \nu_2)J^0] \sin(\nu_1 + \nu_2)t + [\ddot{g}^0 + (\nu_1 + \nu_2)^2 g^0] \cos(\nu_1 - \nu_2)t - [(\nu_1 - \nu_2)\dot{g}^0 + (\nu_1 + \nu_2)J^0] \times \sin(\nu_1 - \nu_2)t \}; \quad (26)$$

$$J = -\frac{\nu_1 - \nu_2}{4\nu_1\nu_2} \{ [(\nu_1 + \nu_2)\dot{g}^0 + (\nu_1 - \nu_2)J^0] \cos(\nu_1 + \nu_2)t + [\ddot{g}^0 + (\nu_1 - \nu_2)^2 g^0] \sin(\nu_1 + \nu_2)t \} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{4\nu_1\nu_2} \{ [(\nu_1 - \nu_2)\dot{g}^0 + (\nu_1 + \nu_2)J^0] \cos(\nu_1 - \nu_2)t + [\ddot{g}^0 + (\nu_1 + \nu_2)^2 g^0] \sin(\nu_1 - \nu_2)t \}.$$

В формулах (26) и ниже индексом "о" отмечены величины, взятые в начальный момент времени. Диагональные матричные элементы g_1, g_2 изменяются во времени по гармоническому закону с частотами $\omega_{1,2} = 2\nu_{1,2}$, и решение для них совпадает (по форме) с общим решением уравнения Владимирского-Капчинского^{/3/}.

Изменение во времени элемента g и среднего момента J обусловлено поворотами эллиптического сечения пучка вокруг начала координат. Эти повороты представляют собой колебания с комбинационными частотами $\omega_{3,4} = \nu_1 \pm \nu_2$. Действительно, согласно (23):

$$M_{xx} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_1^2 \cos^2 \phi + r_2^2 \sin^2 \phi & \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2) \sin 2\phi \\ \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2) \sin 2\phi & r_1^2 \sin^2 \phi + r_2^2 \cos^2 \phi \end{pmatrix}. \quad (27)$$

отсутствие поворота ($\phi = 0$) означает $g \equiv 0$. Здесь $r_{1,2}$ - полуоси эллипса, ϕ - угол между полуосью r_1 и осью x_1 . Таким образом, общее решение уравнений (20) в случае $\alpha = 0$ дает в отличие от^{/3/} не только колебания полуосей эллипса, ограничивающего пучок, но и его повороты в плоскости (x_1, x_2).

Предположим, что эллипс не вращается ($g \equiv 0$). Покажем, что уравнения (12,13) эквивалентны тогда уравнениям Владимирского-Капчинского. Рассмотрим для определенности элемент g_1 . Уравнение для него, согласно (12), имеет вид

$$\frac{d^3 g_1}{dt^3} + 4\nu_1^2 \frac{dg_1}{dt} + 2 \frac{d\nu_1^2}{dt} g_1 = 0. \quad (28)$$

Уравнение (25) совпадает с уравнением, полученным в работе^{/6/} в одномерном случае.

Сделаем замену неизвестной функции:

$$g_1 = \frac{1}{4} r_1^2. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28) и умножая полученный результат на r_1^2 , имеем

$$\frac{d}{dt} [r_1^3 (\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \nu_1^2 r_1)] = 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) легко интегрируется:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \nu_1^2 r_1 = \frac{F^2}{r_1^3}. \quad (31)$$

Постоянная F определяется из начальных условий для моментов и уравнений (8), (11), взятых в начальный момент времени:

$$F^2 = 4M_{vv}^{11} (r_1^o)^2 - 16M_{xv}^{11} = -16 \{ (\nu_1 - \bar{\nu}_1)^2 (x_1 - \bar{x}_1)^2 - [(x_1 - \bar{x}_1)(\nu_1 - \bar{\nu}_1)]^2 \}_{t=0}. \quad (32)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского величина, стоящая в фигурных скобках, неотрицательна. Поэтому постоянная F для произвольной функции распределения является аналогом фазового объема, входящего в уравнения Владимирского-Капчинского. Выражение для квадрата фазового объема, аналогичное (32), было получено в работе^{/8/}.

Вычисление моментов, входящих в (32), с функцией распределения, использовавшейся в^{/3/} (формула (3.13)), дает

$$F = F_0, \quad (33)$$

где F_0 - величина фазового объема пучка на каждой из фазовых плоскостей (x_1, ν_1), (x_2, ν_2), деленная на π .

Учитывая влияние собственных полей пучка (24), получим уравнения Владимирского-Капчинского:

$$\ddot{r}_1 + \nu_1^2 r_1 - \frac{F_1^2}{r_1^3} - \frac{4\nu}{\gamma_0^3} \frac{C^2}{r_1 + r_2} = 0; \quad (34)$$

$$\ddot{r}_2 + \nu_2^2 r_2 - \frac{F_2^2}{r_2^3} - \frac{4\nu}{\gamma_0^3} \frac{C^2}{r_1 + r_2} = 0.$$

IV. Рассмотрим далее колебания огибающей в продольном стационарном магнитном поле (матрица $b=0$). Из (21) в этом случае следует, что собственные частоты колебаний вырождаются. Однако это не приводит к росту амплитуды колебаний. Общее решение (20) имеет вид:

$$g_1 = [g_1^o + \frac{\ddot{g}_1^o}{4a^2} + \frac{3}{4}(\frac{\ddot{g}_2^o}{a^2} + \frac{2}{a}\dot{g}^o)] + \sin at [\frac{3}{2a}\dot{g}_1^o - \frac{1}{2a}\dot{g}_2^o + \frac{\ddot{g}^o}{a^2}] - \cos at [\frac{2}{a}\dot{g}^o + \frac{\ddot{g}_2^o}{a^2}] + \sin 2at [\frac{1}{4a}\dot{g}_2^o - \frac{1}{4a}\dot{g}_1^o - \frac{\ddot{g}^o}{2a^2}] + \cos 2at [\frac{\ddot{g}_2^o}{4a^2} - \frac{\ddot{g}_1^o}{4a^2} + \frac{\dot{g}^o}{2a}];$$

$$g_2 = [g_2^o + \frac{\ddot{g}_2^o}{4a^2} + \frac{3}{4}(\frac{\ddot{g}_1^o}{a^2} + \frac{2}{a}\dot{g}^o)] + \sin at [\frac{3}{2a}\dot{g}_2^o - \frac{1}{2a}\dot{g}_1^o + \frac{\ddot{g}^o}{a^2}] - \cos at [\frac{2}{a}\dot{g}^o + \frac{\ddot{g}_1^o}{a^2}] + \sin 2at [\frac{1}{4a}\dot{g}_1^o - \frac{1}{4a}\dot{g}_2^o + \frac{\ddot{g}^o}{2a^2}] + \cos 2at [\frac{\ddot{g}_1^o}{4a^2} - \frac{\ddot{g}_2^o}{4a^2} + \frac{\dot{g}^o}{2a}];$$

$$g = [-\frac{3}{4a}(\dot{g}_1^o - \dot{g}_2^o) + g^o - \frac{\ddot{g}^o}{2a^2}] + \sin at [-\frac{\ddot{g}_1^o}{2a^2} + \frac{\ddot{g}_2^o}{2a^2} + \frac{2}{a}\dot{g}^o] + \cos at [\frac{\ddot{g}^o}{a^2} + \frac{1}{a}(\dot{g}_1^o - \dot{g}_2^o)] + \sin 2at [\frac{(\ddot{g}_1^o - \ddot{g}_2^o)}{4a^2} - \frac{\dot{g}^o}{2a}] + \cos 2at [\frac{(\ddot{g}_1^o - \ddot{g}_2^o)}{4a^2} + \frac{\dot{g}^o}{2a}];$$

$$J = J^o - \frac{1}{2a}(\ddot{g}_1^o + \ddot{g}_2^o) - \frac{1}{2}\sin at (\dot{g}_1^o + \dot{g}_2^o) + \frac{1}{2a}\cos at (\ddot{g}_1^o + \ddot{g}_2^o).$$

Таким образом, в продольном магнитном поле среднеквадратичные размеры пучка совершают колебания, аналогичные колебаниям в фокусирующем потенциале (15), с частотами $\omega_1 = a$, $\omega_2 = 2a$.

В азимутально симметричном случае (пучок с круговым сечением) из уравнений системы (12,13) можно получить уравнение, аналогичное уравнению Владимирского-Капчинского^{15/}.

Для круглого пучка имеем

$$g_1 = g_2, \quad g = 0 \quad (36)$$

и как следствие (36) - $\nu_1 = \nu_2$.

В случае нестационарного магнитного поля нужно учесть вихревое электрическое поле. Это поле дает дополнительный вклад в матрицу b :

$$b^{ind} = \frac{1}{2} \frac{da}{dt} \quad (37)$$

Подставляя (36,37) в (12,13), получим два независимых уравнения:

$$\frac{d^3 g_1}{dt^3} + 4(\nu_1^2 + \frac{a^2}{4}) \frac{dg_1}{dt} + 2g_1 \frac{d}{dt} (\nu_1^2 + \frac{a^2}{4}) = 0; \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} (J + ag_1) = 0.$$

Нетрудно видеть, что первое из уравнений (38) совпадает с уравнением (28) с заменой ν_1^2 на $\nu_1^2 + a^2/4$. Поэтому для радиуса окружности $R = 4g_1$, ограничивающей пучок, имеем

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + (\nu_1^2 + \frac{a^2}{4})R - \frac{F_1^2}{R^3} - \frac{2\nu}{\gamma_0^3} \frac{1}{R} = 0. \quad (39)$$

Второе из уравнений (38) является выражением закона сохранения среднего обобщенного момента количества движения (теорема Буша):

$$M_3 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)(P_2 - \bar{P}_2) - (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)(P_1 - \bar{P}_1). \quad (40)$$

Действительно, в рассматриваемом случае обобщенные импульсы $P_{1,2}$ равны:

$$P_1 = v_1 - \omega_L x_2; \quad P_2 = v_2 + \omega_L x_1. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40) и производя усреднение, получим

$$M_3 = J + a g_1 = \text{const}. \quad (42)$$

Для определения постоянной F_1 в (39), так же как в п. III, воспользуемся уравнениями (8), (11):

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F^2 - 4J^2 + 4M_3^2 = \\ &= 16 \{ \overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2 (v_1 - \bar{v}_1)^2} - [\overline{(x_1 - \bar{x}_1)(v_1 - \bar{v}_1)}]^2 - \\ &\quad - [\overline{(x_1 - \bar{x}_1)(v_2 - \bar{v}_2)}]^2 \}_{t=0} + 4M_3^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Можно показать, что выражение, стоящее в фигурных скобках, инвариантно относительно поворота системы координат:

$$x = Qx'; \quad v = \dot{Q}x' + Qv', \quad (44)$$

где матрица

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & \sin \psi(t) \\ -\sin \psi(t) & \cos \psi(t) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Записывая выражение (43) в системе координат, в которой выполняется условие

$$\overline{(x_1' - \bar{x}_1')(v_2' - \bar{v}_2')} = 0, \quad (46)$$

легко видеть, что полученная величина совпадает с (32) и, следовательно, неотрицательна. Вычисляя моменты в системах (x, v) и (x', v') , получаем

$$\begin{aligned} \overline{(x_1 - \bar{x}_1)(v_2 - \bar{v}_2)} &= \overline{(x_1' - \bar{x}_1')(v_1' - \bar{v}_1')} + \dot{\psi} \overline{(x_1' - \bar{x}_1')^2}; \\ \overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2} &= \overline{(x_1' - \bar{x}_1')^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Требую выполнения равенства (46), находим

$$\dot{\psi} = \frac{\overline{(x_1 - \bar{x}_1)(v_2 - \bar{v}_2)}}{\overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2}} = \frac{J}{2g_1}. \quad (48)$$

Уравнение (39) вместе с (43) дает устойчивые нелинейные колебания радиуса круглого заряженного пучка в продольном магнитном поле вокруг стационарной точки, которую можно найти по формуле

$$R_c = \frac{\frac{2\nu}{\gamma_0^3} + \{ (\frac{2\nu}{\gamma_0^3})^2 + 4F^2(\nu_1^2 + \frac{a^2}{4}) \}^{1/2}}{2(\nu_1^2 + \frac{a^2}{4})}. \quad (49)$$

V. В заключение кратко изложим основные результаты. С помощью уравнений для полных моментов функции распределения второго порядка была получена система уравнений для среднеквадратичных размеров произвольных сгустков частиц. Если собственными полями сгустка можно пренебречь, то уравнения линейны и не зависят от вида функции распределения частиц в сгустке. Влияние пространственного заряда легко учитывается, если собственные поля линейны.

Полученные уравнения позволяют рассматривать в едином подходе колебания огибающей прямых пучков в фокусирующем потенциале и продольном магнитном поле.

Показано, что в отсутствие продольного магнитного поля уравнения эквивалентны уравнениям Влади-

мирского-Капчинского, если эллипс, ограничивающий пучок в конфигурационном пространстве, не вращается.

Для среднеквадратичного размера круглого пучка в продольном магнитном поле выводится, при довольно общих предположениях, уравнение, совпадающее с уравнением, полученным Ли и Купером.

Авторы благодарят Г.Д.Ширкова за помощь в работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawson J.D. In: Proceedings of the Symposium on Ion Sources and Formation of Ion Beams. Brookhaven National Laboratory, BNL-50310, 1972.
2. Kapchinsky I.M., Vladimirovsky V.V. In: Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators and Instruments. CERN, Geneva, 1959, p.274.
3. Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. Атомиздат, М., 1966.
4. Ярковой О.И. ЖТФ, 1966, 36, с.986.
5. Lee E.P., Cooper R.K. Particle Accelerators, 1976, 7, p.83.
6. Дымников А.Д., Перельштейн Э.А., ОИЯИ, Р9-10620, Дубна, 1977.
7. Перельштейн Э.А., Ширков Г.Д., ОИЯИ, Р9-10468, Дубна, 1977.
8. Lapostolle P.M. In: Proceedings of Particle Accelerator Conference, Chicago, IEEE Trans, 1971, NS - 18, 3, p.1101.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября 1977 года.