

18
B-99
865



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Г.Н. Вялов, А.И. Захаров

865

О ВЛИЯНИИ КРЫШЕК ВАКУУМНОЙ КАМЕРЫ
НА ФОРМИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
ЦИКЛОТРОНА

Дубна 1961

Г.Н. Вялов, А.И. Захаров

865

13226/3 чг.
О ВЛИЯНИИ КРЫШЕК ВАКУУМНОЙ КАМЕРЫ
НА ФОРМИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
ЦИКЛОТРОНА

Объединенный инс
ядерных исследова...
БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

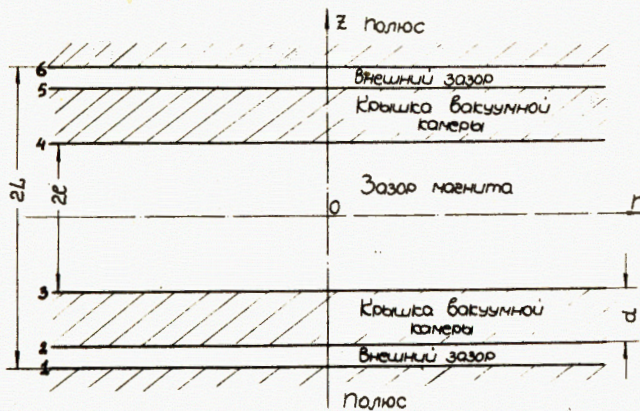
В работе решается задача формирования магнитного поля в многослойном магнетике с шестью плоскостями раздела. Получены общие выражения для эквивалентной намагниченности и поля в параметрической форме. Рассмотрен частный случай формирования аксиально-симметричного магнитного поля. Приведены расчетные значения эквивалентной намагниченности, плотности тока, поля и коэффициентов экранирования по току и по намагниченности для указанного частного случая.

В в е д е н и е

Требуемая форма магнитного поля в средней плоскости магнита циклотрона обычно создается с помощью корректирующих катушек с током, расположенных либо под крышками вакуумной камеры, либо над ними. Целью этой работы является оценка влияния крышек вакуумной камеры на формирование магнитного поля циклотрона.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Решение задачи о влиянии крышек вакуумной камеры на формирование магнитного поля корректирующими катушками с током сводится к сравнению эквивалентных токам намагниченностей $\vec{M}(\vec{r})$ /1,4/ в двух случаях расположения тока: под и над крышками вакуумной камеры. Для этого нужно решить задачу формирования поля в многослойном магнетике с шестью плоскопараллельными поверхностями раздела.



Р и с. 1.

Краевой эффект полюсных наконечников магнита не учитывается. Задача ставится следующим образом: какова эквивалентная токам намагниченность, если однородный по оси z и параллельный плоскости $z=0$ слой ее, расположенный в области $b \geq z \geq a > 0$, создает в средней плоскости зазора электро-

магнита заданную z -компоненту поля $h / \vec{r} /$.
 Фурье - образ намагниченности определяется формулой /1/

$$M(p, q, a, b) = \frac{h(p, q)}{2\pi[\sigma(p, q, c|a) - \sigma(p, q, c|b)]}, \quad /1.1/$$

$$\text{где } \sigma(p, q, z|\zeta) = \sigma_0(p, q, z|\zeta) - \sum_{s=1}^6 \alpha_s \sigma_0(p, q, z|z_s) \sigma_0^{(s)}. \quad /1.2/$$

Величины $\sigma^{(s)} = \sigma(p, q, z_s|\zeta)$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$\sigma^{(s)} + \sum_{\substack{s'=1 \\ s \neq s'}}^6 \alpha_{s'} \sigma_{ss'} \sigma^{(s')} = \sigma_0^{(s)}. \quad /1.3/$$

Функция $\sigma_0(p, q, z|\zeta)$ равна /1/

$$\sigma_0(p, q, z|\zeta) = \epsilon(\zeta - z) e^{-\lambda|\zeta - z|}, \quad /1.4/$$

где $\epsilon(\zeta - z)$ -знаковая функция

$$\epsilon(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ -1, & z < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\sigma(p, q, c|\zeta) = e^{-\lambda\zeta}$ при $\zeta > 0$, $\lambda^2 = p^2 + q^2$.

Определив $M(p, q, a, b)$ из уравнений /1.1/, /1.2/, /1.3/ и совершив с помощью обратного преобразования Фурье переход к координатному представлению, получим решение поставленной задачи.

§ 2. Определение Фурье-образа эквивалентной намагниченности

Чтобы найти $M(p, q, a, b)$, прежде всего необходимо вычислить величины $\sigma^{(s)} = \sigma(p, q, z_s|\zeta)$.

В общем случае $\sigma^{(s)}$ находится из системы шести уравнений /1.3/. Но в данной задаче можно свести шесть уравнений к трем, если использовать симметричное расположение поверхностей раздела магнетиков относительно плоскости $z=0$ /см. рис. 1/.

Магнитные свойства полюсов и крышек вакуумной камеры предполагаются одинаковыми. При этом условия коэффициенты $a_s = \frac{\Delta \epsilon_s}{2 \epsilon_s}$ /1/ могут отличаться один от другого только знаком

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 = a_5 \\ a_2 = a_4 = a_6 \\ a_1 = -a_2 = a = \frac{\mu-1}{\mu+1} \end{aligned} \quad |, \quad /2.1/$$

где μ магнитная проницаемость материала, из которого сделаны полюса магнита и крышки вакуумной камеры.

Эквивалентная намагниченность $M(p, q, a, b)$ в конечном счете выражается через величину $\sigma(p, q, o|\zeta)$. $\sigma(p, q, o|\zeta)$ определяется из выражения /1.2/, которое в общем случае зависит от шести величин $\sigma^{(s)}$. Исходя из симметрии задачи и используя соотношения /2.1/, выражаем $\sigma(p, q, o|\zeta)$ через суммы величин $\sigma^{(s)}$ на симметричных относительно плоскости $z=0$ поверхностях раздела магнетиков

$$\sigma(p, q, o|\zeta) = \sigma_0(p, q, o|\zeta) - a [\sigma_0(p, q, o|z_1) \Phi^{(1)} - \sigma_0(p, q, o|z_2) \Phi^{(2)} + \sigma_0(p, q, o|z_3) \Phi^{(3)}], /2.2/$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \Phi^{(1)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(6)} \\ \Phi^{(2)} &= \sigma^{(2)} + \sigma^{(5)} \\ \Phi^{(3)} &= \sigma^{(3)} + \sigma^{(4)}. \end{aligned} \quad /2.3/$$

Складывая попарно уравнения системы /1.3/ на симметричных поверхностях раздела, сводим систему шести уравнений относительно величин $\sigma^{(s)}$ к системе трех уравнений относительно величин $\Phi^{(s)}$, где $s = 1, 2, 3$.

При переходе от шести уравнений к трем, мы воспользовались следующими свойствами коэффициентов системы /1.3/:

$$\begin{aligned} \sigma_{aa} &= -\sigma_{aa} \\ -\sigma_0(p, q, 0 | z_1) &= \sigma_0(p, q, 0 | z_6) \\ -\sigma_0(p, q, 0 | z_2) &= \sigma_0(p, q, 0 | z_5) \\ -\sigma_0(p, q, 0 | z_3) &= \sigma_0(p, q, 0 | z_4) \end{aligned} \quad /2.4/$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{36} & \sigma_{15} &= \sigma_{26} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{46} & \sigma_{23} &= \sigma_{45} \\ \sigma_{14} &= \sigma_{36} & \sigma_{24} &= \sigma_{35} \end{aligned} \quad /2.5/$$

Соотношения /2.4/ и /2.5/ следуют из симметрии задачи. Система трех уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - a\sigma_{16})\Phi_0^{(1)} - a(\sigma_{12} - \sigma_{13})\Phi_0^{(2)} + a(\sigma_{13} - \sigma_{14})\Phi_0^{(3)} &= \Phi_0^{(1)} \\ -a(\sigma_{12} + \sigma_{13})\Phi_0^{(1)} + (1 - a\sigma_{25})\Phi_0^{(2)} + a(\sigma_{23} - \sigma_{24})\Phi_0^{(3)} &= \Phi_0^{(2)} \\ -a(\sigma_{13} + \sigma_{14})\Phi_0^{(1)} + a(\sigma_{23} + \sigma_{24})\Phi_0^{(2)} + (1 - a\sigma_{34})\Phi_0^{(3)} &= \Phi_0^{(3)} \end{aligned} \quad /2.6/$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)} &= \sigma_0^{(1)} + \sigma_0^{(6)} \\ \Phi_0^{(2)} &= \sigma_0^{(2)} + \sigma_0^{(5)} \\ \Phi_0^{(3)} &= \sigma_0^{(3)} + \sigma_0^{(4)} \end{aligned}$$

Решение системы /2.6/ запишем в виде

$$\Phi_0^{(a)} = \frac{M_0^{(a)}}{D} \quad / a = 1, 2, 3 / \quad /2.7/, \text{ где}$$

D - определитель системы, а $M_0^{(a)}$ получается из D заменой соответствующего столбца правой частью /2.6/.

Используя формулу /1.4/, получим

$$\begin{aligned} D = 1 - a(e^{-2\lambda L} + e^{-2\lambda l} - e^{-2\lambda(L+d)}) - a^2(e^{-2\lambda d} + \\ + e^{-2\lambda(L-l-d)} - e^{-2\lambda(L-l)}) + a^3 e^{-2\lambda(L-d)}, \end{aligned} \quad /2.8/$$

где приняты следующие обозначения /см. рис. 1/

- L - полузазор магнита,
 d - толщина крышки вакуумной камеры,
 l - расстояние от поверхности крышки до средней плоскости магнита.

$M_0^{(a)}$ зависят от координат тока. Поэтому перейдем к раздельному рассмотрению двух возможных расположений токового слоя / под и над крышкой вакуумной камеры/.

1. Ток под крышкой вакуумной камеры

При таком расположении тока выполняются следующие неравенства

$$\begin{aligned} a < b < z_4 < z_5 < z_6 \\ b > z > a > 0 \end{aligned} \quad /2.9/$$

Исходя из /1.4/, /2.9/ и /2.6/, получим

$$M_0^{(1)} = e^{-\lambda(L+\zeta)} (1-\alpha^2) (1 - e^{-2\lambda\zeta}) \quad /2.10/$$

$$M_0^{(2)} = e^{-\lambda(l+d+\zeta)} (1-\alpha) (1 - e^{-2\lambda\zeta}) (1 + \alpha e^{-2\lambda(L-l-d)}) \quad /2.11/$$

$$\begin{aligned} M_0^{(3)} = & (1 - e^{-2\lambda\zeta}) \left[e^{-\lambda(l+\zeta)} (1 - \alpha e^{-2\lambda(L-l-d)}) - \right. \\ & \left. - \alpha e^{-\lambda(l+2d+\zeta)} (1 - e^{-2\lambda(L-l-d)}) \right] \quad /2.12/ \end{aligned}$$

Для $\sigma(p, q, o|\zeta)$ из /2.2/ и /2.7/ имеем

$$\begin{aligned} \sigma(p, q, o|\zeta) = & \sigma_0(p, q, o|\zeta) - \frac{\alpha}{D} \left[\sigma_0(p, q, o|z_1) M_0^{(1)} - \sigma_0(p, q, o|z_2) M_0^{(2)} + \right. \\ & \left. + \sigma_0(p, q, o|z_3) M_0^{(3)} \right], \quad /2.13/ \end{aligned}$$

где

$$\sigma_0(p, q, o|z_1) = e^{-\lambda L}$$

$$\sigma_0(p, q, o|z_2) = e^{-\lambda(l+d)}$$

$$\sigma_0(p, q, 0|z_3) = -e^{-\lambda l}$$

$$\sigma_0(p, q, 0|\zeta) = e^{-\lambda \zeta}$$

Окончательно для $\sigma(p, q, 0|\zeta)$ получаем

$$\sigma(p, q, 0|\zeta) = e^{-\lambda \zeta} \left\{ \frac{1 - a^2 [e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-l-d)} - e^{-2\lambda(L-l)}] + 2e^{-2\lambda L} - 2e^{-2\lambda(l+d)}}{1 - a(e^{-2\lambda L} + e^{-2\lambda l} - e^{-2\lambda(l+d)}) - a^2(e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-l-d)})} \right\} -$$

/2.14/

$$\frac{-ae^{-2\lambda \zeta} [(1-2a)(e^{-2\lambda L} - e^{-2\lambda(l+d)}) + e^{-2\lambda l} (1 - a^2 e^{-2\lambda(L-l-d)})]}{-e^{-2\lambda(L-l)} + a^3 e^{-2\lambda(L-d)}} \Bigg\}.$$

Зная $\sigma(p, q, 0|\zeta)$, из /1.1/ находим выражение для Фурье-образа эквивалентной намагниченности

$$M(p, q, a, b, \Delta, L, l, d) = \frac{h(p, q) e^{\lambda a} [1 - a(e^{-2\lambda L} + e^{-2\lambda l} - e^{-2\lambda(l+d)})]}{2\pi(1 - e^{-\lambda \Delta}) \left\{ [1 - a^2(e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-l-d)} - e^{-2\lambda(L-l)}) + a^2 e^{-2\lambda(L-d)}] - \right.}$$

$$\left. \frac{-e^{-2\lambda(L-l)} + 2e^{-2\lambda L} - 2e^{-2\lambda(l+d)}}{-e^{-2\lambda(L-l)} + 2e^{-2\lambda L} - 2e^{-2\lambda(l+d)}} + ae^{\lambda k} [(1-2a)(e^{-2\lambda L} - e^{-2\lambda(l+d)}) + e^{-2\lambda l} (1 - a^2 e^{-2\lambda(L-l-d)})] \right\}}$$

/2.15/, где

$\Delta = b - a$ — толщина токового слоя,

$k = b + a$,

a и b — расстояния соответственно от нижней и верхней границ тока до средней плоскости зазора магнита.

При $d \rightarrow 0$, $l \rightarrow L$ формула /2.15/ переходит в выражение для эквивалентной намагниченности, формирующей то же поле в плоском зазоре^{/1/}.

2. Ток над крышкой вакуумной камеры

В этом случае выполняются следующие неравенства

$$\left. \begin{aligned} z_4 < z_5 < a < b < z_6 \\ b \geq z \geq a > 0 \end{aligned} \right\} \quad /2.16/$$

Вычисление $M(p, q, a, b)$ производится точно так, как это было сделано для тока под крышкой. Необходимо лишь учесть в формулах изменения, обусловленные другим расположением тока. Выпишем основные формулы

$$\begin{aligned} M_0^{(1)} = & e^{-\lambda(L+\zeta)} (1 - e^{-2\lambda\zeta}) + a e^{-\lambda(L-2\ell-2d+\zeta)} (1 - e^{-2\lambda(2\ell+2d-\zeta)}) - \\ & - a e^{-\lambda(L-2\ell+\zeta)} (1 - e^{-2\lambda(2\ell-\zeta)}) - a^2 e^{-\lambda(L-2d+\zeta)} (1 - e^{-2\lambda(2d-\zeta)}) \end{aligned} \quad /2.17/$$

$$M_0^{(2)} = e^{-\lambda(\ell+\zeta)} (1 - a e^{-2\lambda(L-\zeta)}) [e^{\lambda d} (1 + e^{-2\lambda(\ell+d)}) - a e^{-\lambda d} (1 + e^{-2\lambda(\ell-d)})] \quad /2.18/$$

$$M_0^{(3)} = e^{-\lambda(\ell+\zeta)} (1-a)(1 + e^{-2\lambda\ell}) (1 - a e^{-2\lambda(L-\zeta)}) \quad /2.19/$$

Из /2.13/ и /2.8/ получим для $\sigma(p, q, a | \zeta)$

$$\begin{aligned} \sigma(p, q, a | \zeta) = & \frac{e^{-\lambda\zeta} (1-a^2) (1 - a e^{-2\lambda(L-\zeta)})}{1 - a (e^{-2\lambda L} + e^{-2\lambda\ell} - e^{-2\lambda(\ell+d)}) - a^2 (e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-\ell-d)})} \quad /2.20/ \\ & \frac{e^{-2\lambda(L-\ell)} + a^3 e^{-2\lambda(L-\ell)}}{} \end{aligned}$$

Фурье-образ эквивалентной намагниченности оказывается равным

$$\begin{aligned} M(p, q, a, b, \Delta, \beta, L, \ell, d) = & \frac{h(p, q) e^{\lambda a} [1 - a (e^{-2\lambda L} + e^{-2\lambda\ell} - e^{-2\lambda(\ell+d)}) - a^2 (e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-\ell-d)})]}{2\pi (1-a^2) (1 - e^{-\lambda\Delta}) (1 + a e^{-2\lambda\beta})} \quad /2.21/ \\ & \frac{-a^2 (e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-\ell-d)}) - e^{-2\lambda(L-\ell)} + a^3 e^{-2\lambda(L-d)}}{} \end{aligned}$$

где $\beta = L - \frac{a+b}{2}$ - среднее расстояние от тока до поверхности полюса магнита.

В пределе при $d \rightarrow 0$, $\ell \rightarrow L$ /2.21/ переходит в Фурье-образ эквивалентной намагниченности, формирующей то же поле в плоском зазоре /1/.

Для окончательного решения задачи надо перейти от Фурье-образов эквивалентных намагниченностей в координатное представление.

§ 3. Эквивалентная намагниченность в координатном представлении

Фурье-образ эквивалентной токам намагниченности в любом из рассматриваемых вариантов расположения тока может быть представлен в виде

$$M(p, q, a, b, \Delta, L, \ell, d) = \frac{h(p, q) e^{\lambda a} P(\lambda, a, L, \ell, d)}{2\pi Q(\lambda, a, \Delta, a, b, L, \ell, d)}. \quad /3.1/$$

В дальнейшем для краткости будем писать

$$P(\lambda, a, L, \ell, d) = P(\lambda)$$

$$Q(\lambda, a, \Delta, a, b, L, \ell, d) = Q(\lambda)$$

$$M(p, q, a, b, \Delta, L, \ell, d) = M(p, q)$$

$$M(x, y, a, b, \Delta, L, \ell, d) = M(x, y).$$

Конкретный вид функций $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ будет указан ниже.

Для вычисления эквивалентной намагниченности $M(x, y)$ в координатном представлении надо выполнить обратное преобразование Фурье в формуле /3.1/. В общем случае произвольных Δ, a, b, L, ℓ, d и $h(p, q)$ связь между намагниченностью и полем в координатном пространстве оказывается весьма сложной

$$M(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} e^{\lambda a + ipx + iqy} dp dq \iint_{-\infty}^{\infty} h(x', y') e^{-ipx' - iqy'} dx' dy' \quad /3.2/$$

Можно пытаться искать более простые соотношения для предельных значений параметров $\Delta, \beta, L, \ell, a$, как это сделано, например, в работе ^{/1/}.

Однако при этом получаются довольно громоздкие ряды, причем разложение по степеням Δ при $\Delta \rightarrow 0$ справедливо лишь асимптотически. Чтобы обойти трудности, связанные с вычислением интеграла /3.2/, воспользуемся математическим приемом, который позволит нам заменить четырехкратный интеграл двумя двойными. Вычисление двойных интегралов значительно проще, чем вычисление 4-х кратного интеграла.

Введем некоторую функцию $g(p, q)$, которую определим следующим образом:

$$g(p, q) = \frac{h(p, q)}{Q(\lambda)}, \quad /3.3/$$

где $g(p, q)$ — компонента Фурье произвольной функции $g(x, y)$, достаточно быстро убывающей на бесконечности $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$. Тогда

$$h(p, q) = g(p, q) Q(\lambda) \quad M(p, q) = 1/2\pi e^{\lambda a} g(p, q) P(\lambda). \quad /3.4/$$

Связь между эквивалентной намагниченностью $M(x, y)$ и полем $h(x, y)$ в координатном представлении и функцией $g(p, q)$ имеет следующий вид

$$M(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(p, q) e^{\lambda a} P(\lambda) e^{ipx + iqu} dp dq \quad /3.5/$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g(p, q) Q(\lambda) e^{ipx + iqu} dp dq. \quad /3.6/$$

Переходя в /3.5/ и /3.6/ в полярные координаты, в общем случае получим

$$M(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(\lambda, \phi) e^{\lambda a} P(\lambda) e^{i\lambda r \cos \phi} \lambda d\lambda d\phi \quad /3.7/$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{00}^{2\pi} g(\lambda, \phi) Q(\lambda) e^{i\lambda r \cos \phi} \lambda d\lambda d\phi, \quad /3.8/$$

где

$$\lambda^2 = p^2 + q^2, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

В рассматриваемых нами случаях функции $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ можно представить следующим образом:

$$P(\lambda) = 1 + \sum_n A_n e^{-n\lambda} \quad /3.9/$$

$$Q(\lambda) = 1 + \sum_m B_m e^{-m\lambda}. \quad /3.10/$$

Значения параметров $n = n(L, l, d)$, $m = m(L, l, d, \Delta, a, b)$ и коэффициентов A_n , B_m определяются при рассмотрении различных вариантов расположения тока. Исходя из /3.3/, /3.4/, /3.9/ и /3.10/, функции $h(x, y)$ и $M(x, y)$ можно относительно просто связать с функцией $g(x, y)$, а именно

$$h(x, y) = g(x, y) + \sum_m \frac{m B_m}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x', y') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + m^2]^{3/2}} \quad /3.11/$$

$$M(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ -a \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x', y') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + a^2]^{3/2}} + \sum_n A_n (n-a) \iint_{-\infty}^{\infty} x \frac{g(x', y') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (n-a)^2]^{3/2}} \right\}. \quad /3.12/$$

Выражение /3.12/ справедливо при отрицательных значениях a . Чтобы получить значения $M(x, y)$ для положительных a необходимо аналитически продолжить результат, получающийся из /3.12/'2/.

Выражения /3.11/ и /3.12/ для формируемого поля и формирующей это поле намагниченности оказались параметризованными, т.е. представленными через функциональный параметр $g(x, y)$. Поэтому использованный нами прием определения $M(x, y)$ через $h(x, y)$ можно назвать функциональной параметризацией.

Введение функционального параметра $g(x, y)$, связывающего между собой $M(x, y)$ и $h(x, y)$ значительно упростило эту связь, так как вместо трехкратного интеграла

$$M(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{P(\lambda) e^{\lambda a}}{Q(\lambda)} \lambda d\lambda \iint_{-\infty}^{\infty} J_0(\lambda \rho) h(x', y') dx' dy', \quad /3.13/$$

где $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, эквивалентного 4-х кратному интегралу /3.2/, мы имеем теперь два двойных интеграла /3.11/ и /3.12/. Это значительно упрощает численные расчеты, связанные с задачей формирования магнитного поля.

Мы рассмотрим некоторые интегрируемые в конечном виде частные случаи задачи формирования аксиально-симметричного магнитного поля. Эти случаи соответствуют выбору простейшей параметризующей функции $g(\lambda) = e^{-\lambda s}$, где $s > 0$ - некоторый фиксированный параметр, характеризующий размеры магнитной системы.

При этом для намагниченности и поля получим следующие разложения Фурье-Бесселя

$$M(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(s-a)} P(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad /3.14/$$

$$h(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} Q(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad /3.15/$$

Перейдем к рассмотрению различных вариантов расположения тока.

1. Ток под крышкой вакуумной камеры

В этом случае

$$P(\lambda) = \frac{1}{1-a^2} [1 - a(e^{-2\lambda L} + e^{-2\lambda l} - e^{-2\lambda(l+d)}) - a^2(e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-l-d)} - e^{-2\lambda(L-l)}) + a^3 e^{-2\lambda(L-d)}] \quad /3.16/$$

$$\begin{aligned}
 Q(\lambda) = & \frac{1 - e^{-\lambda L}}{1 - a^2} \{ [1 - a^2 (e^{-2\lambda d} + e^{-2\lambda(L-l-d)} - e^{-2\lambda(L-l)} + \\
 & + 2e^{-2\lambda L} - 2e^{-2\lambda(l+d)})] + a e^{\lambda k} [(1 - 2a)(e^{-2\lambda L} - e^{-2\lambda(l+d)} + \\
 & + e^{-2\lambda l} (1 - a^2 e^{-2\lambda(L-l-d)})] \}.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Множитель $\frac{1}{1-a^2}$ введен в /3.16/ и /3.17/ для того, чтобы $M(x, y)$ и $h(x, y)$ в пределе при $d \rightarrow 0$, $l \rightarrow L$ сводились к соответствующим выражениям, получающимся в случае формирования поля в плоском зазоре^{/1/}. Выражения /3.14/ и /3.16/ позволяют вычислить $M(x, y)$ ^{/3/}.

Необходимо отметить, что интегралы, появляющиеся при вычислении $M(x, y)$, существуют при отрицательных значениях показателей в экспонентах. Поэтому на параметр $s > 0$ накладывается дополнительное условие: он выбирается так, чтобы показатели во всех экспонентах были отрицательными.

Учитывая сказанное выше, получим^{/3/}

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \equiv M(r) = & \frac{1}{2\pi(1-a^2)} \left\{ \frac{s-a}{[(s-a)^2 + r^2]^{3/2}} - \frac{a(2L+s-a)}{[(2L+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} - \right. \\
 & - \frac{a(2l+s-a)}{[(2l+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} + \frac{a[2(l+d)+s-a]}{[(2l+2d+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} - \frac{a^2(2d+s-a)}{[(2d+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} - \\
 & \left. - \frac{a^2[2(L-l-d)+s-a]}{[(2L-2l-2d+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} + \frac{a^2[2(L-l)+s-a]}{[(2L-2l+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} + \frac{a^3[2(L-d)+s-a]}{[(2L-2d+s-a)^2 + r^2]^{3/2}} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Из /3.15/ и /3.17/ аналогичным способом получаем выражение для поля $h(x, y)$ в средней плоскости зазора магнита

$$\begin{aligned}
h(x, y) = h(r) = & \frac{1}{1-\alpha^2} \left[\frac{s}{(s^2+r^2)^{3/2}} - \alpha^2 \left\{ \frac{2d+s}{[(2d+s)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{2(L-\ell-d)+s}{[(2L-2\ell-2d+s)^2+r^2]^{3/2}} - \right. \right. \\
& - \frac{2(L-\ell)+s}{[(2L-2\ell+s)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{2(2L+s)}{[(2L+s)^2+r^2]^{3/2}} - \left. \frac{2[2(\ell+d)+s]}{[(2\ell+2d+s)^2+r^2]^{3/2}} \right\} - \frac{s+\Delta}{[(s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} + \\
& + \alpha^2 \left\{ \frac{2d+s+\Delta}{[(2d+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{2(L-\ell-d)+s+\Delta}{[(2L-2\ell-2d+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{2(L-\ell)+s+\Delta}{[(2L-2\ell+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} + \right. \\
& + \frac{2(2L+s+\Delta)}{[(2L+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} - \left. \frac{2[2(\ell+d)+s+\Delta]}{[(2\ell+2d+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} \right\} + \alpha(1-2\alpha) \left\{ \frac{2L+s-k}{[(2L+s-k)^2+r^2]^{3/2}} \right. \\
& - \frac{2(\ell+d)+s-k}{[(2\ell+2d+s-k)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{2L+s-k+\Delta}{[(2L+s-k+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} + \left. \frac{2(\ell+d)+s-k+\Delta}{[(2\ell+2d+s-k+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} \right\} + \\
& + \frac{\alpha(2\ell+s-k)}{[(2\ell+s-k)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{\alpha^3[2(L-d)+s-k]}{[(2L-2d+s-k)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{\alpha(2\ell+s-k+\Delta)}{[(2\ell+s-k+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{\alpha^3[2(L-d)+s-k+\Delta]}{[(2L-2d+s-k+\Delta)^2+r^2]^{3/2}}
\end{aligned}$$

2. Ток над крышкой вакуумной камеры

Выражение для $M(x, y)$ в этом случае в точности совпадает с формулой /3.18/. Это объясняется тем, что $P(\lambda)$ не зависит от координат тока. Перейдем к вычислению магнитного поля $h(x, y)$.

В этом случае из /2.21/ имеем

$$Q(\lambda) = (1 - e^{-\lambda\Delta}) (1 + \alpha e^{-2\lambda\beta}) \quad /3.20/$$

Из /3.15/ и /3.20/, вычисляя соответствующие интегралы^{/3/}, получим

$$h(x, y) = h(r) = \frac{s}{(s^2+r^2)^{3/2}} + \frac{\alpha(2\beta+s)}{[(2\beta+s)^2+r^2]^{3/2}} \quad /3.21/$$

$$-\frac{s+\Delta}{[(s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{\alpha(2\beta+s+\Delta)}{[(2\beta+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}}.$$

3. Ток в плоском зазоре /крышки отсутствуют/

Для выяснения влияния крышек вакуумной камеры на магнитное поле ускорителя нам понадобятся выражения для намагниченности $M(x, y)$ и соответствующего ей магнитного поля $h(x, y)$ в случае формирования поля в плоском зазоре.

Выражение для Фурье-образа эквивалентной намагниченности в плоском зазоре получено в работе ^{/1/}.

$$M(p, q) = \frac{h(p, q) e^{\lambda a} (1 - \alpha e^{-2\lambda L})}{2\pi(1 - e^{-\lambda\Delta})(1 + \alpha e^{-2\lambda\beta})} \quad /3.22/$$

Исходя из /3.22/, запишем выражения для $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$

$$P(\lambda) = 1 - \alpha e^{-2\lambda L} \quad /3.23/$$

$$Q(\lambda) = (1 - e^{-\lambda\Delta})(1 + \alpha e^{-2\lambda\beta}). \quad /3.24/$$

Из /3.14/, /3.15/, /3.23/, /3.24/ тем же методом, что и ранее, получаем

$$M(x, y) \equiv M(r) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s-a}{[(s-a)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{\alpha(2L+s-a)}{[(2L+s-a)^2+r^2]^{3/2}} \right\} \quad /3.26/$$

$$h(x, y) \equiv h(r) = \frac{s}{(s^2+r^2)^{3/2}} - \frac{s+\Delta}{[(s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{\alpha(2\beta+s)}{[(2\beta+s)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{\alpha(2\beta+s+\Delta)}{[(2\beta+s+\Delta)^2+r^2]^{3/2}}.$$

4. Плотности токов

Эквивалентная намагниченность $\vec{M}(\vec{r})$ связана с плотностью тока

$$\vec{\rho}(\vec{r}) \text{ соотношением /1,4/} \quad \text{rot } \vec{M}(\vec{r}) = \vec{\rho}(\vec{r}) . \quad /3.27/$$

В рассматриваемых частных случаях эта связь имеет более простой вид

$$\rho(r) = - \frac{\partial M(r)}{\partial r} . \quad /3.28/$$

Следовательно, дифференцируя выражения /3.18/ и /3.25/, получим плотности токов $\rho(r)$.

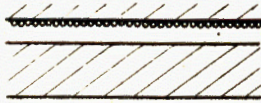
Обсуждение результатов

Мы решали задачу формирования магнитного поля в многослойном магнетике, ограниченном шестью поверхностями раздела. В результате получены общие выражения для эквивалентной намагниченности и соответствующего ей поля /формулы 3.11 и 3.12/. Для некоторых случаев аксиально-симметричного магнитного поля найдены $M(x, y)$ и $h(x, y)$ для тока под и над крышкой вакуумной камеры и тока в плоском зазоре. Были проведены численные расчеты, результаты которых представлены на графиках. Радиальная зависимость намагниченностей и соответствующих им магнитных полей не нуждается в дополнительных пояснениях. Из кривых для плотностей тока видно, что максимумы $\rho(r)$ при наличии железного экрана сдвигаются влево относительно соответствующих максимумов при формировании поля током в плоском зазоре.

Из постановки задачи ясно, что магнитное поле в средней плоскости машины задается и, следовательно, не должно зависеть от магнитной проницаемости железа μ . Но в связи с вычислительными трудностями мы воспользовались методом функциональной параметризации. Применение этого математического приема обусловило появление μ в формулах для магнитного поля. Однако, как видно из результатов численного расчета, поле тока над крышкой и в плоском зазоре, а также намагниченность и плотность тока в плоском зазоре слабо зависят от μ . Поэтому на соответствующих графиках приведены кривые только для одного значения $\mu = 200$.

Для практики формирования магнитных полей в ускорителях представлялось наиболее интересным рассмотреть следующие варианты расположения тока (см. рис.2и3)

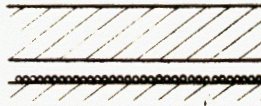
Ток над крышкой
вакуумной камеры.



Ток в плоском
зазоре.

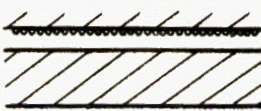


2-0



Р и с. 2.

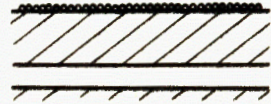
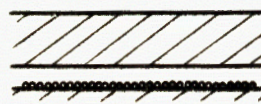
Ток над крышкой
вакуумной камеры.



Ток под крышкой
вакуумной камеры.



2-0



Р и с. 3.

Сравнивая токи и намагниченности в первом случае, получим оценку экранирующего влияния крышек вакуумной камеры на магнитное поле ускорителя. Это влияние можно учесть с помощью коэффициентов экранирования K_p — по току и K_M — по намагниченности. Коэффициент экранирования по току $K_p = \rho_1 / \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 плотности тока соответственно над крышкой вакуумной камеры и в плоском зазоре, показывает, во сколько раз экран ослабляет магнитное действие тока. Коэффициент экранирования по намагниченности K_M определяется аналогичным образом, но вместо отношения токов берется отношение соответствующих намагниченностей. K_p и K_M не совпадают. Это объясняется тем, что распределение токов и намагниченностей не является локальным. Из /3.21/ и /3.26/ видно, что магнитные поля тока в плоском зазоре и тока над крышкой совпадают, что является следствием применения метода функциональной параметризации при вычислении интегралов.

Это обстоятельство позволяет выяснить зависимость коэффициентов экранирования от радиуса /рис. 13,14/.

Сравнение токов и намагниченностей, расположенных над крышкой и в плоском зазоре, позволяет выделить эффект экранирования в чистом виде. Но это сравнение является несколько идеализированным, поскольку при рассмотрении тока в плоском зазоре предполагается отсутствие крышек вакуумной камеры. Практически более интересно установить разницу между токами и намагниченностями, которые требуются для формирования одного и того же поля в средней плоскости машины при расположении тока под и над крышкой вакуумной камеры. Провести сравнение токов в этом случае не удалось, т.к. поля /3.19/ и /3.21/ различны по форме. Для полей, одинаковых по форме, требуются довольно громоздкие расчеты. По этой же причине не была исследована радиальная зависимость коэффициента экранирования по намагниченности. Под коэффициентом экранирования в этом случае имеется в виду отношение эквивалентных намагниченностей над и под крышкой при формировании одного и того же поля. Термин "коэффициент экранирования" введен для краткости и является условным. Разница в намагниченностях, требуемых для создания одного и того же поля в средней плоскости машины и расположенных под и над крышкой вакуумной камеры, обусловлена, кроме экранирования, различием в расстояниях от намагниченностей до

средней плоскости зазора магнита и сильной поляризацией крышки, когда слой намагниченности расположен под ней. Величина коэффициента экранирования в максимуме намагниченности равна

$$K_M = \kappa \nu \quad /4.1/, \quad \text{где}$$

$$\kappa = M_1 / M_2 \quad /4.2/$$

$$\nu = h_2 / h_1 \quad /4.3/, \quad \text{причем}$$

M_1, h_1 намагниченность и поле тока над крышкой при $r = 0$,

M_2, h_2 намагниченность и поле тока под крышкой при $r = 0$.

Значения K_M приведены в таблице 1.

Из таблицы и графиков видно, что K_M и K_ρ сильно зависят от параметра s . Эта зависимость обусловлена тем, что в разложении полей и намагниченностей в интегралы Фурье входит множитель $e^{-\lambda s}$, который вне области $0 \leq \lambda \leq 1/s$ близок к нулю.

Коэффициент экранирования для тока, помещенного над плоским железным экраном толщиной δ равен /1/

$$K(\lambda\delta) = \frac{1 - \alpha^2 e^{-2\lambda\delta}}{1 - \alpha^\lambda} \quad /4.4/.$$

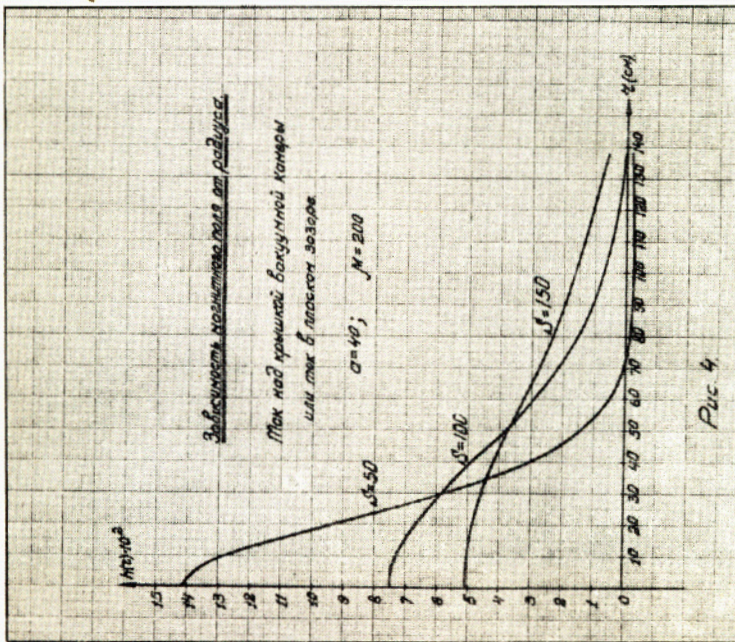
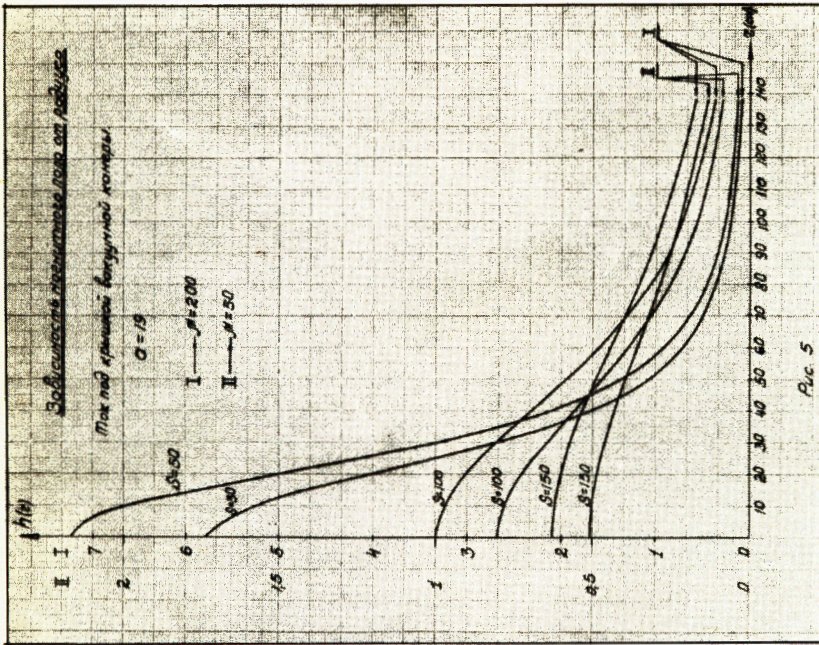
В области больших s при $\lambda \sim 1/s$ получаем

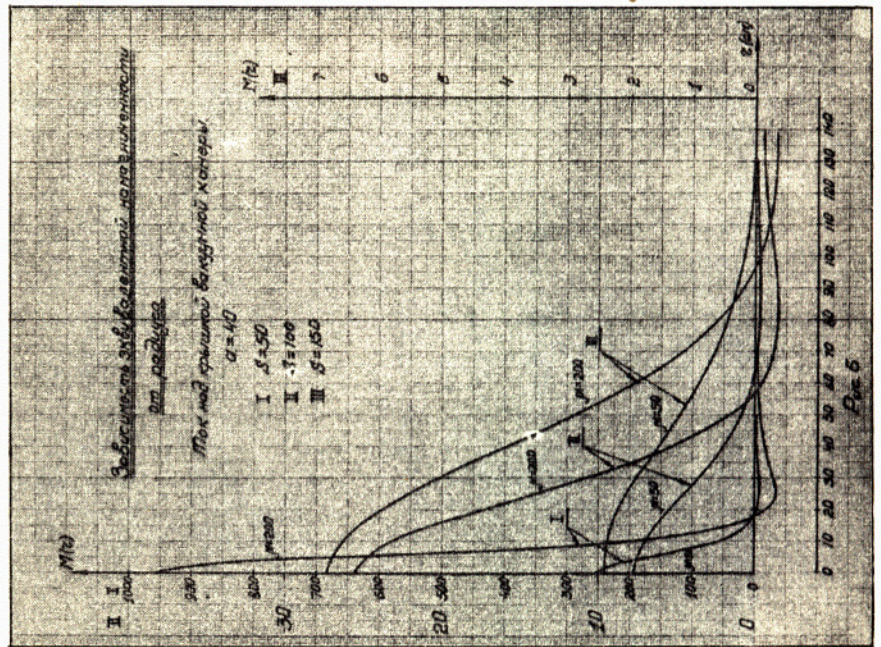
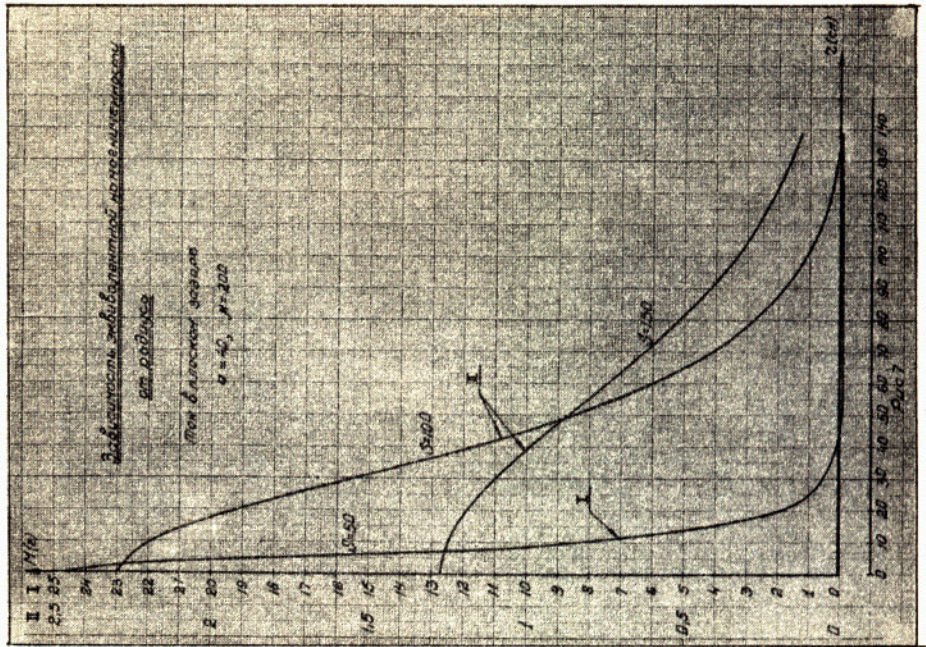
$$e^{-2\lambda\delta} \sim e^{-\frac{2\delta}{s}} \approx 1, \quad \text{т.к., } s \gg \delta.$$

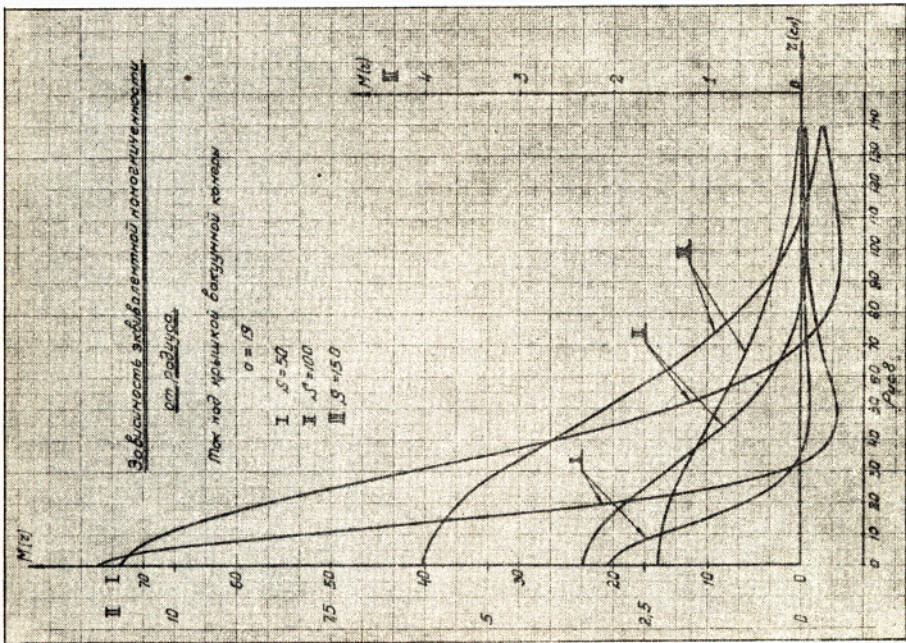
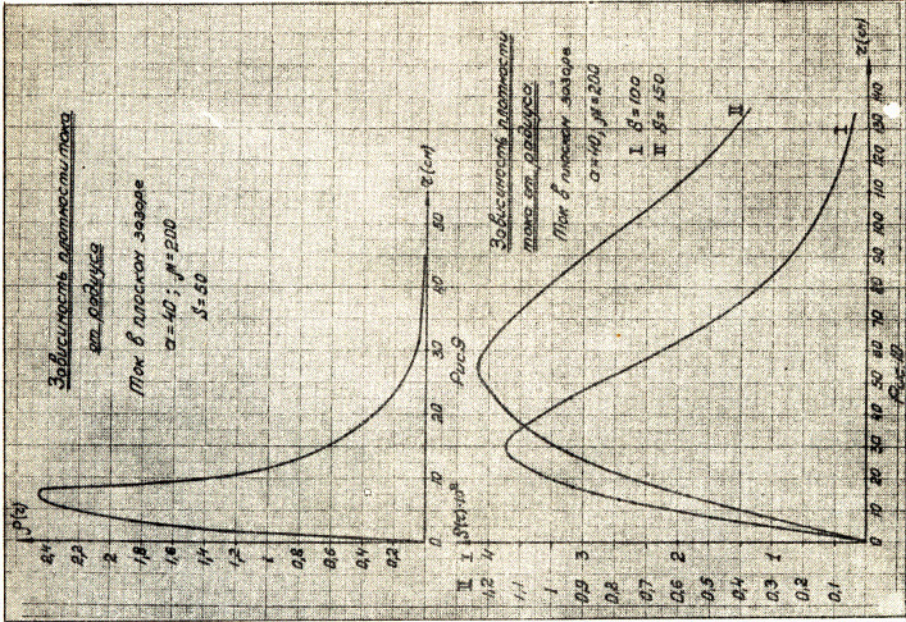
Следовательно, $K_{M,\rho} \sim 1$ и мало меняется при изменении s .

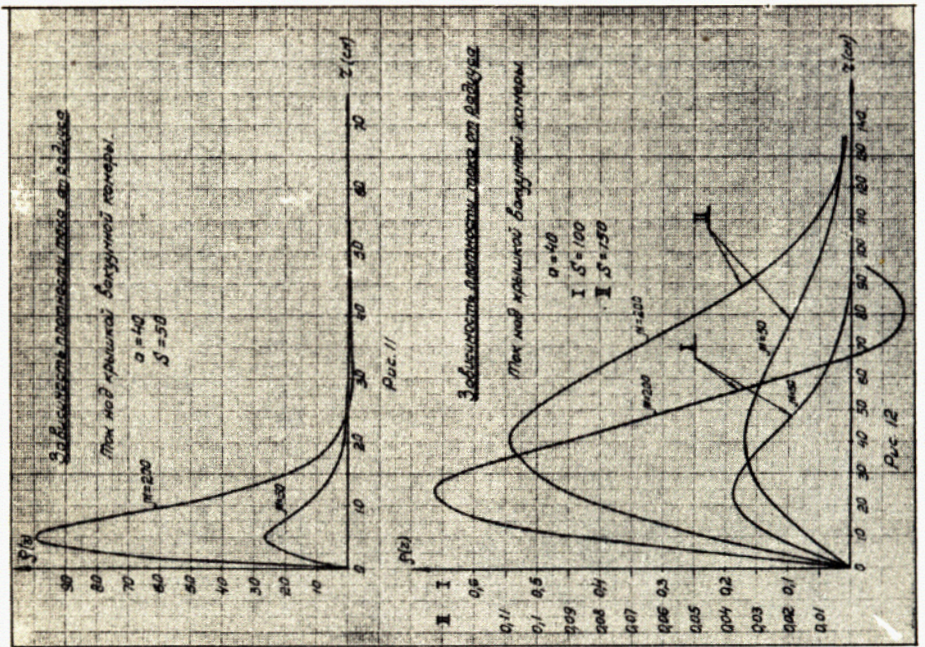
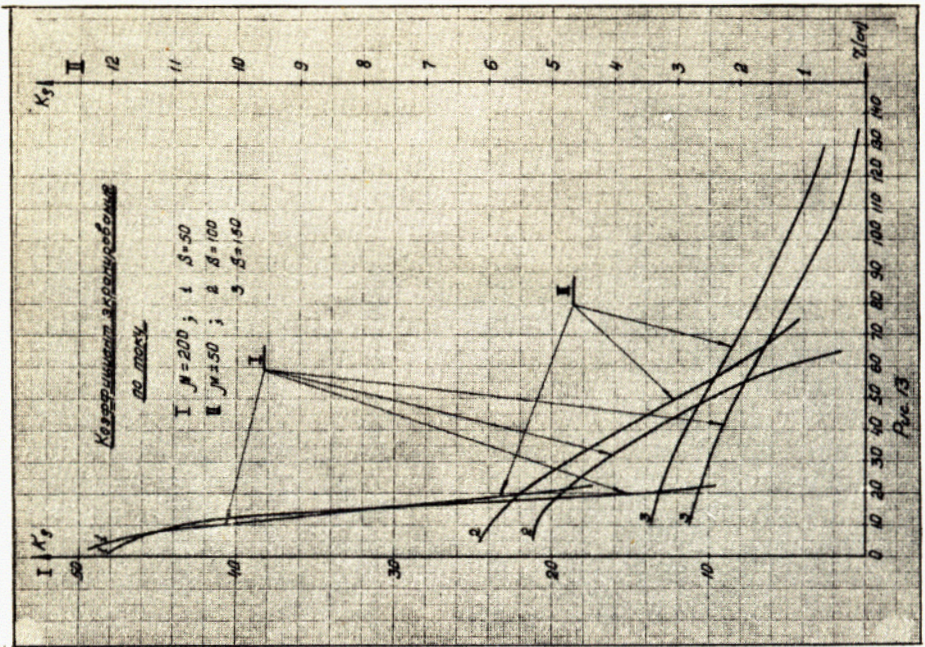
Для малых s при $\lambda \sim 1/s$ $e^{-2\delta/s} \approx 0$.

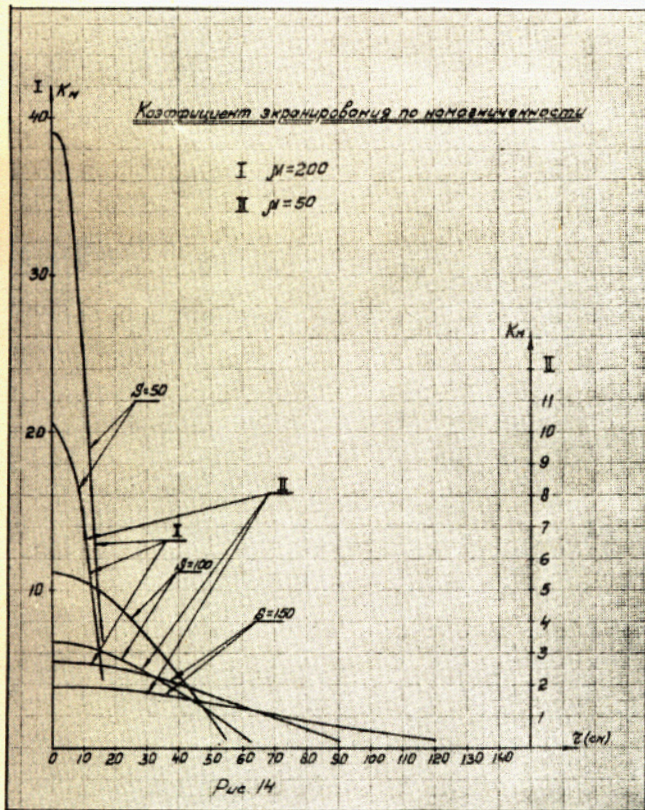
Следовательно, $K_{M,\rho} \sim \frac{1}{1 - \alpha^2}$ большая величина, сильно зависящая от s .











Л и т е р а т у р а

1. Г.Н. Вялов. "Некоторые задачи формирования магнитного поля током", ОИЯИ, ЛЯР, 735, Дубна, 1961.
2. Г.Н. Вялов. "Об одном методе расчета формы магнита по заданному полю", ОИЯИ, ЛЯР, 708, Дубна, 1961.
3. Н.Н. Лебедев. "Специальные функции и их приложения". ГИТТЛ, М, 1953.
4. И.Е. Тамм. "Основы теории электричества", изд. пятое, ГИТТЛ, М, 1954.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1961 года.