

778



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

---

Ю.Д. Прокошкин

778

ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ  
(Обзор)

Дубна 1961 год

Ю.Д. Прокошкин

778

ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ  
(Обзор)

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА



## О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
I. В В Е Д Е Н И Е . . . . .	5
II. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ	
§ 1.2. Обозначения . . . . .	5
§ 2.2. Основы теории представлений . . . . .	6
§ 3.2. Определение $S$ -матрицы . . . . .	7
§ 4.2. Унитарность $S$ -матрицы . . . . .	8
§ 5.2. Интегралы движения и $S$ -матрица . . . . .	9
§ 6.2. Поперечное сечение . . . . .	10
§ 7.2. Связь между различными каналами реакции . . . . .	11
III. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОРОГА	
§ 1.3. Двухчастичные реакции . . . . .	13
§ 2.3. Трехчастичные реакции . . . . .	13
§ 3.3. Роль взаимодействия в конечном состоянии . . . . .	15
§ 4.3. Влияние кулонова взаимодействия . . . . .	16
IV. ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ В ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ	
§ 1.4. Связь сечений упругого и неупругого рассеяний . . . . .	16
§ 2.4. Форма аномалий . . . . .	18
§ 3.4. Величина аномалий . . . . .	21
§ 4.4. Аномалии высокого порядка . . . . .	22
V. ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ В ТРЕХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ	
§ 1.5. Об аномалии в энергетической зависимости сечений . . . . .	22
§ 2.5. Аномалии в энергетических спектрах . . . . .	22
VI. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ФОРМУ АНОМАЛИИ	
§ 1.6. Наличие нескольких каналов ниже порога . . . . .	23
§ 2.6. Аномалии в случае двух расположенных рядом порогов . . . . .	24
§ 3.6. Влияние кулонова взаимодействия частиц на форму аномалии . . . . .	25
§ 4.6. Аномалии в случае образования нестабильных частиц . . . . .	26
§ 5.6. Аномалии в реакциях с участием частиц, обладающих спином . . . . .	26
VII. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ АНОМАЛИЙ	
§ 1.7. Доступная информация . . . . .	29
§ 2.7. Эксперименты при малых энергиях . . . . .	30
§ 3.7. Эксперименты в области высоких энергий . . . . .	31
§ 4.7. Об аномалии в $p$ - $p$ -рассеянии в области порога образования $\pi$ -мезона . . . . .	35
VIII. З а к л ю ч е н и е . . . . .	38
Л и т е р а т у р а . . . . .	39

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуя общие свойства ядерных реакций вблизи их порога, Вигнер обнаружил<sup>/1/</sup> в 1948 году, что появление новой реакции сопровождается аномальными изменениями в энергетической зависимости сечения упругого рассеяния в области порога, имеющими форму узкого пика. Однако это явление осталось незамеченным, поскольку сам автор утверждал, что величина аномалий ничтожна, в связи с чем они не представляют практического интереса. Лишь через десять лет пороговые аномалии снова привлекли к себе внимание после того, как Базь показал<sup>/2/</sup>, что исследование их дает возможность получения богатой информации о процессах рассеяния и свойствах участвующих в рассеянии частиц. Работа Базь послужила толчком к начавшемуся вскоре интенсивному теоретическому исследованию пороговых аномалий, в результате которого в течение двух-трех лет были изучены все практически важные вопросы, связанные с этой областью.

Цель настоящего обзора - познакомить читателя с основными результатами проведенных до настоящего времени теоретических<sup>/1-14/</sup> и экспериментальных<sup>/15-20/</sup> исследований пороговых аномалий. Изложение будет проведено на основе фундаментального понятия матрицы рассеяния ( $S$ -матрицы). При этом мы не предполагаем у читателя знакомства с теорией  $S$ -матрицы, в связи с чем первая глава обзора посвящена рассмотрению тех вопросов этой теории, которые необходимы для нашего изложения.

## II. МАТРИЦА РАССЕЙНИЯ

### § 1.2. Обозначения

Для упрощения записи формул мы будем всюду, кроме особо оговоренных случаев, опускать знаки суммирования ( $\Sigma$ ) и интегрирования ( $\int$ ), условившись, что наличие в формулах немого (двойного) индекса подразумевает суммирование по нему в случае дискретного спектра и интегрирование - в случае непрерывного спектра (например,  $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} \equiv P_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma}$ ).

Значком  $*$  мы будем обозначать операцию комплексного сопряжения, значком  $+$  - эрмитова сопряжения. Напомним, что матрицы  $V^+$  и  $V$  называются эрмитово-сопряженными, если  $(V^+)_{\alpha\beta} = V^*_{\beta\alpha}$ .

Для обозначения волновой функции  $\Psi_a(x)$  системы, описываемой набором квантовых чисел  $a$  и зависящей от набора переменных  $x$ , мы используем векторный формализм Дирака<sup>/21/</sup>:

$$\langle x | a \rangle \equiv \Psi_a(x) .$$

$a$  будем называть индексом состояния,  $x$  - индексом представления. Иногда мы будем опускать индекс представления, вводя для описания состояния вектор  $|a\rangle$ . При помощи штриха (например,  $a'$  и  $a$ ) мы будем различать наборы квантовых величин, одинаковых по названию, но различных по величине.

Под скалярным произведением двух волновых функций  $\langle x | a \rangle$  и  $\langle x | \beta \rangle$  или двух векторов  $|a\rangle$  и  $|\beta\rangle$  мы будем понимать величину

$$\langle \beta | a \rangle = \langle \beta | x \rangle \langle x | a \rangle \equiv \Psi_\beta^*(x) \Psi_a(x) . \quad (1.2)$$

Здесь суммирование или интегрирование проводится по некому индексу представления  $x$ .

Матричный элемент оператора  $L$   $L_{a\beta} \equiv \Psi_\beta^*(x) L \Psi_a(x)$  в этих обозначениях принимает вид:

$$L_{a\beta} = \langle \beta | L | a \rangle . \quad (2.2)$$

Последнюю форму записи можно использовать в качестве универсальной как для матричных элементов, так и для волновых функций, замечая, что  $\langle \beta | a \rangle = \langle \beta | \mathbf{1} | a \rangle$ , где  $\mathbf{1}$  - единичный оператор.

Символ  $\delta(a, \beta)$  мы будем использовать для обозначения  $\delta$ -функции  $\delta(a - \beta)$  в случае непрерывного спектра или символов Кронекера  $\delta_{a\beta}$  в случае дискретного спектра. Напомним, что  $\delta$ -функция определяется, как

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \text{а символы Кронекера -}$$

$$\delta_{a\beta} = \begin{cases} 1, & a = \beta \\ 0, & a \neq \beta \end{cases} .$$

## § 2.2. Основы теории представлений

Прежде чем начать изложение общей теории матрицы рассеяния, напомним читателю основные сведения из теории представлений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Согласно общим принципам квантовой механики, вероятность обнаружения того, что система, описываемая набором квантовых чисел  $a$ , находится в состоянии с данным значением индекса представления  $x$  (например, координаты  $x$ ), определяется квадратом модуля соответствующей волновой функции  $\langle x | a \rangle$ . Чтобы найти вероятность обнаружения какой-либо физической величины  $q$ , характеризующей систему, нужно разложить  $\langle x | a \rangle$  по собственным функциям  $\langle x | q \rangle$  оператора этой величины:

$$\langle x | a \rangle = \langle x | q \rangle \langle q | a \rangle. \quad (3.2)$$

Искомая вероятность определяется при этом квадратом модуля величины  $\langle q | a \rangle$ , являющейся, по определению, волновой функцией системы в  $q$ -представлении. Соответственно,  $\langle x | a \rangle$  есть волновая функция в  $x$ -представлении. Соотношение (3.2) описывает таким образом преобразование волновой функции системы из  $x$ -представления в  $q$ -представление при помощи функций преобразования  $\langle x | q \rangle$ . Заметим, что функция обратного преобразования  $\langle q | x \rangle$  совпадает с  $\langle x | q \rangle^*$ , что видно из (1.2).

При переходе от одного представления к другому преобразуются и операторы. Формулу этого преобразования можно получить, подставив (3.2) в (2.2):

$$\langle \beta | L | a \rangle = \langle \beta | q' \rangle \langle q' | L | q \rangle \langle q | a \rangle. \quad (4.2)$$

Соотношения (3.2) и (4.2) будут в дальнейшем часто нами использоваться.

### § 3.2. Определение S-матрицы

Задача описания процессов рассеяния частиц в общем случае может быть сформулирована следующим образом: начальное состояние невзаимодействующих частиц описывается волновой функцией  $\Psi_i(-\infty)$  (определяемой, как предел при  $t_0 \rightarrow -\infty$ ), где  $i$  - некоторый набор квантовых чисел; в результате рассеяния состояние системы изменилось; волновая функция конечного состояния (при  $t \rightarrow +\infty$ )  $\Psi_f(+\infty)$  характеризуется набором квантовых чисел  $f$ , в общем случае отличным от первоначального набора; задача решена, если установлено соотношение, связывающее между собой наборы  $i$  и  $f$ .

При решении указанной задачи весьма плодотворным является введение оператора, преобразующего начальное состояние  $|i\rangle$  в конечное  $|f\rangle$ :

$$|f\rangle = S|i\rangle \quad . \quad x) \quad (5.2)$$

Этот оператор называется матрицей рассеяния или  $S$ -матрицей. Изучение общих свойств  $S$ -матрицы позволяет установить ограничения, накладываемые на процессы рассеяния законами сохранения.

Смысл элементов  $S$ -матрицы становится очевидным, если в качестве начального состояния взять состояние  $|q\rangle$  с определенной величиной ( $q_0$ ) какой-нибудь динамической переменной  $q$ . Тогда элементы  $S$ -матрицы совпадают с коэффициентами разложения  $|f\rangle$  по  $|q\rangle$  и, следовательно, квадраты их модулей  $|S_{q'q_0}|^2$  определяют вероятность перехода в результате рассеяния из состояния с  $q_0$ , в состояние с  $q'$ .

#### § 4.2. Унитарность $S$ -матрицы

Разложим, согласно (5.2), волновые функции конечного состояния  $|a\rangle_{+\infty}$  по волновым функциям начального состояния  $|q\rangle_{-\infty}$ :

$$|a\rangle_{+\infty} = S_{aq} |q\rangle_{-\infty} \quad (6.2)$$

Перейдем к сопряженным величинам:

$$\langle a' |_{+\infty} = \langle q' |_{-\infty} S_{a'q'}^* \quad (7.2)$$

Составив из (6.2) и (7.2) скалярное произведение и воспользовавшись условием ортонормированности волновых функций

$$\langle a' | a \rangle = \delta(a', a), \quad (8.2)$$

получаем

$$S_{a'q'}^* S_{aq} = \delta(a', a), \quad (8.2)$$

или в матричной записи:

$$SS^+ = I, \quad (10.2)$$

где  $I$  - единичная матрица.  $S$  - матрица, таким образом, оказалась эрмитово-сопряженной со своей обратной матрицей, т.е. унитарной.

---

x) Соотношение (5.2) следует понимать, как предельное при  $t \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .

Условие (9.2) накладывает определенную связь на амплитуды вероятностей различных процессов, описываемых элементами  $S$ -матрицы. В частности, вероятности переходов из состояния  $q_0 > -\infty$  в состояния  $|q > +\infty$  не являются полностью независимыми:

$$\sum_q |S_{q q_0}|^2 = 1. \quad (11.2)$$

Соотношение (11.2) выражает собой сохранение вероятности.

Унитарность  $S$ -матрицы является ее фундаментальным свойством, приводящим к большому числу практически важных следствий и особенно важным при анализе пороговых аномалий. В связи с этим полезно проследить, из каких основных принципов квантовой механики вытекает это свойство  $S$ -матрицы.

Как известно, в основу квантовой механики положен принцип суперпозиции, утверждающий, что состояние системы в данном представлении может быть описано набором независимых собственных волновых функций  $|q >$ , соответствующих определенным значениям динамической переменной  $q$ . Отсюда следует, что произвольная волновая функция системы  $|a >$  может быть представлена как суперпозиция этих функций:

$$|a > = \sum_q |q > \langle q | a >. \quad (12.2)$$

Умножив (12.2) скалярно на  $\langle q' |$ , получаем:

$$\langle q' | a > = \langle q' | q > \langle q | a >.$$

Но согласно принципу суперпозиции, коэффициенты  $\langle q | a >$  независимы и, следовательно, собственные функции  $|q >$  ортогональны (8.2). Поскольку условие (10.2) вытекает из ортогональности собственных функций (8.2), мы приходим к выводу, что свойство унитарности  $S$ -матрицы является непосредственным следствием принципа суперпозиции.

### § 5.2. Интегралы движения и $S$ -матрица

Из определения  $S$ -матрицы (5.2) видно, что она коммутирует с гамильтонианом<sup>x)</sup>. Отсюда следует, что  $S$ -матрица коммутирует с оператором любого

$$x) \quad \mathbf{S} \mathbf{H} |i > = \mathbf{S} E_i |i > = E_i |f > \quad \mathbf{H} \mathbf{S} |i > = \mathbf{H} |f > = E_i |f >, \quad \mathbf{H} |f > = E_i |f >, \quad \mathbf{H} |i > = E_i |i >$$

где  $E_i, E_f$  - собственные значения оператора энергии. В силу сохранения энергии в процессе рассеяния  $\mathbf{S} \mathbf{H} |i > = \mathbf{H} \mathbf{S} |i >$  при произвольных  $|i >$ , и  $\mathbf{S} \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{S} = 0$ .



интеграла движения  $Q$  и поэтому может быть одновременно с ним приведена к диагональному виду. Таким образом, если в набор квантовых чисел, описывающих состояние, входят интегралы движения, то  $S$ -матрица по ним диагональна:

$$\langle q', a' | S | a, q \rangle = \langle a' | S^q | a \rangle \delta(q', q). \quad (13.2)$$

Применение этого важного соотношения позволяет определить, какие ограничения накладываются законами сохранения на вероятности различных переходов, описываемых  $S$ -матрицей.

После того, как мы выяснили основные свойства  $S$ -матрицы, установим связь ее с экспериментально определяемой величиной - поперечным сечением.

## § 6.2. Поперечное сечение

Как было показано в § 3.2, вероятность перехода в заданном канале реакции определяется квадратом модуля соответствующего элемента  $S$ -матрицы. Чтобы перейти к поперечному сечению (в дальнейшем мы будем использовать термин "сечение"), нужно отнести эту вероятность к единичному временному интервалу.

Предварительно упростим  $S$ -матрицу. В силу закона сохранения энергии  $S$ -матрица имеет диагональный вид в представлении, где энергия  $E$  входит в набор квантовых чисел, задающих состояние системы (см. (13.2)):

$$\langle E_f, f | S | i, E_i \rangle = \langle f | S^E | i \rangle \delta(E_f, E_i).$$

Здесь  $i$  и  $f$  - индексы начального и конечного состояний, включающие в себя спины частиц и их проекции, направления движения  $\vec{n}$  и обозначения частиц (индексы канала). Проинтегрировав квадрат модуля написанного выше элемента  $S$ -матрицы по  $E_f$  и разделив на временной интервал, находим вероятность перехода в единицу времени:

$$w = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle f | S^E | i \rangle|^2. \quad (14.2)$$

Нормируя  $w$  на поток первичных частиц и исключая канал, соответствующий переходу в состояние, тождественное первоначальному, получаем сечение:

$$\sigma(i \rightarrow f) = 4\pi^2 \lambda^2 |\langle f | S^E - I | i \rangle|^2. \quad (15.2)$$

Здесь  $\lambda$  - длина волны де Бройля, деленная на  $2\pi$ .

Соотношение (15.2) устанавливает в общем виде связь сечения с элементами  $S$ -матрицы. Для нахождения сечения, соответствующего конкретной постановке опыта,  $S$ -матрицу, заданную наборами  $i$  и  $f$ , нужно преобразовать в  $S$ -матрицу, заданную набором измеряемых в опыте величин. Так, например, с помощью функции преобразования  $\langle \vec{n} | \ell, m \rangle = Y_{\ell m}(\vec{n})$ , где  $\ell$  и  $m$  - орбитальный момент и его проекция, а  $Y_{\ell m}(\vec{n})$  - шаровая функция, вычисляется дифференциальное сечение  $\sigma(\theta', \phi')$  для случая рассеяния двух частиц с определенным значением  $\ell$  и  $m$  в заданный телесный угол:

$$\sigma(\theta', \phi') = \pi \chi^2 \left| \sum_{\ell} \sqrt{2\ell+1} \langle \theta', \phi' | \ell', m' \rangle \langle \ell', m' | S^E - I | \ell, 0 \rangle \right|^2 \quad (16.2)$$

(падающий пучок направлен по оси  $z$ ).

### § 7.2. Связь между различными каналами реакции.

Сечения, соответствующие различным каналам реакции, не являются независимыми вследствие связи, накладываемой унитарностью  $S$ -матрицы (см. формулу (11.2)). Рассмотрим этот важный для нас вопрос более подробно на сравнительно простом примере рассеяния бесспиновых частиц. В этом случае интегралами движения являются  $E$ ,  $\ell$  и  $m$ , по которым  $S$ -матрица диагональна. Матричный элемент ее имеет вид (см. (13.2)):

$$S_{\alpha}^{E, \ell, m} \delta(\ell, \ell') \delta(m, m') \delta(E, E'). \quad (17.2)$$

Здесь  $\alpha$  - индекс канала.  $S_{\alpha}^{E, \ell, m}$  в дальнейшем кратко обозначим как  $S_{\alpha}^{\ell}$ . Подставив (17.2) в (16.2) и проинтегрировав по  $\theta', \phi'$ , получаем сечение упругого ( $\alpha = s$ ) и неупругого ( $\alpha = a$ ) рассеяния:

$$\sigma_{\alpha} = \pi \chi^2 \sum_{\ell} (2\ell+1) |S_{\alpha}^{\ell} - \delta_{\alpha s}|^2. \quad (18.2)$$

Но в силу унитарности  $S$ -матрицы  $|S_{\alpha}^{\ell}|^2 = 1 - |S_{\beta}^{\ell}|^2$ , и

$$\sigma_s = \pi \chi^2 \sum_{\ell} (2\ell+1) |S_s^{\ell} - 1|^2, \quad (19.2)$$

$$\sigma_a = \pi \chi^2 \sum_{\ell} (2\ell+1) (1 - |S_s^{\ell}|^2). \quad (20.2)$$

Связь между сечениями  $\sigma_s$  и  $\sigma_a$  очевидна. Она особенно наглядна в случае, когда величины  $S_s^l$  действительны. При этом упругое рассеяние полностью определяется неупругим рассеянием:

$$\sqrt{\sigma_s^l} = 1 - \sqrt{1 - \sigma_a^l} \quad (21.2)$$

Здесь  $\sigma_a^l$  - парциальное сечение (член суммы (18.2)), деленное на  $\pi \chi^2 (2l + 1)$ .

В общем случае связь сечений не столь проста, но основной результат остается тем же; неупругое рассеяние всегда сопровождается упругим рассеянием. Действительно, обратившись к формуле (11.2), видим, что если имеет место неупругое рассеяние и, следовательно, один или несколько недиагональных элементов  $S$  - матрицы отличны от нуля, то вследствие унитарности  $S$  - матрицы ее диагональные элементы по модулю меньше единицы, и сечение упругого рассеяния не равно нулю.

Из формулы (11.2) видно также, что существует и более общая связь между различными каналами реакции - процесс, протекающий в одном из каналов, оказывает влияние (или может оказывать влияние) на процессы, протекающие во всех других каналах. Эта связь представляет собой специфическое квантово-механическое явление, вытекающее из закона сохранения вероятности (унитарности  $S$  - матрицы), и, как отмечалось в § 4.2, есть непосредственное следствие фундаментального принципа суперпозиции.

Изменение величины сечения одного из каналов реакции с ростом энергии соударения должно, в силу сказанного выше, влиять на энергетическую зависимость сечений других каналов. Наиболее ярко это проявляется вблизи порога нового канала, где рост сечения происходит особенно быстро. В последнем случае возникают характерные особенности в энергетических зависимостях сечений старых каналов - пороговые аномалии. Вид этих аномалий существенным образом зависит от того, насколько быстро "открывается" новый канал с ростом энергии соударения. Поэтому прежде чем переходить к описанию различных пороговых аномалий, мы рассмотрим общие закономерности, определяющие рост сечения вблизи порога.

### III. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОРОГА

#### § 1.3. Двухчастичные реакции

Поведение сечения вблизи порога в самом общем виде было исследовано Вигнером<sup>1/</sup>. Мы ограничимся качественным рассмотрением этого вопроса. Сначала будем предполагать, что все участвующие в реакции частицы электрически нейтральны. Эффекты, связанные с кулоновым взаимодействием частиц, будут рассмотрены в конце главы. Реакцию, протекающую при столкновении двух частиц, мы будем называть  $n$ -частичной, если она приводит к образованию  $n$ -частиц.

Рассмотрим двухчастичные реакции, представляющие наибольший интерес с точки зрения пороговых аномалий. Величина сечения такой реакции вблизи порога  $E_{\Pi}$  определяется статистическим весом, пропорциональным в нерелятивистском случае импульсу  $p$  вторичных частиц в системе центра инерции (с.ц.и.) и квадратом модуля матричного элемента перехода  $W^{\ell} \sim p^{\ell}$ , где  $\ell$  - орбитальный момент вторичных частиц. Следовательно, энергетическая зависимость сечения вблизи порога имеет вид:

$$\sigma_a^{\ell}(E) \sim p^{2\ell+1} \sim (E - E_{\Pi})^{\ell+1/2} \quad (1.3)$$

При энергиях, близких к пороговой, реакция протекает, в основном, в  $S$ -состоянии (если это не запрещено какими-либо законами сохранения), и

$$\sigma_a^0(E) \sim \sqrt{E - E_{\Pi}} \quad (2.3)$$

Таким образом, двухчастичный канал "открывается" в точке порога внезапно, с бесконечной производной  $d\sigma_a/dE$  (см. рис. 1). При  $\ell > 0$  сечение не претерпевает излома в точке порога, возрастает плавно с ростом энергии, а бесконечный скачок имеет место лишь в  $\ell$ -ой производной от сечения.

#### § 2.3. Трехчастичные реакции

В общем случае, для  $n$ -частичной реакции, статистический вес пропорционален  $p_m^{3n-3}$ , где  $p_m$  - максимальный импульс одной из вторичных частиц<sup>х)</sup>. При  $n=3$  статистический вес определяется фактором  $p_m^4$ .

<sup>х)</sup> Элемент фазового объема, проинтегрированный по импульсам всех частиц и выраженный через  $p_m$ , пропорционален  $p_m^{3n-3}$  (-3 возникает в силу закона сохранения импульса). Разделив его на  $E \sim p_m^2$ , получаем статистический вес  $p_m^{3n-5}$ .

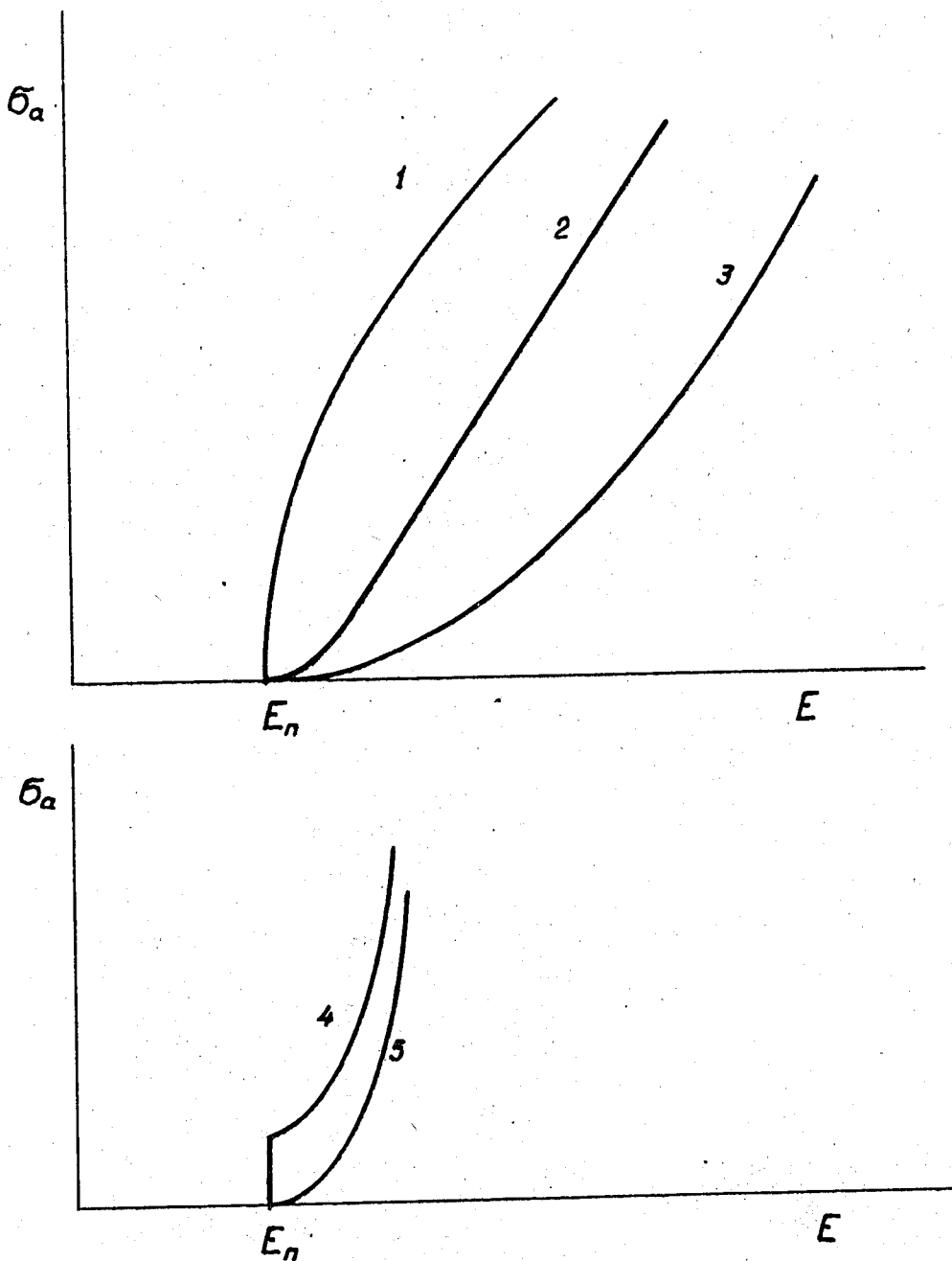


Рис. 1. Зависимость сечения нового канала  $\sigma_a$  от энергии  $E$  вблизи порога. Двухчастичная реакция: 1-  $l=0$ , 3-  $l^a=1$ , 4-  $l=0$ , кулоново притяжение, 5-  $l=0$ , кулоново отталкивание. Трехчастичная реакция: 2-  $l_{12}=l_3=0$ , две частицы в конечном состоянии сильно взаимодействуют при малой энергии (случай (5.3)).

Конечное состояние трехчастичной реакции будем описывать квантовыми числами  $l_{12}$  и  $l_3$ , где  $l_{12}$  - относительный орбитальный момент двух вторичных частиц, а  $l_3$  - момент третьей частицы относительно центра инерции. При этом матричный элемент пропорционален  $p_m^{l_{12}+l_3}$ , если частицы в конечном состоянии не взаимодействуют, и

$$\alpha_a^{l_{12}l_3}(E) \sim p_m^{2l_{12}+2l_3+4} \sim (E-E_{\Pi})^{l_{12}+l_3+2} \quad (3.3)$$

В непосредственной близости от порога существует лишь переход с  $l_{12}=l_3=0$  и

$$\sigma_a^{0,0}(E) \sim (E-E_{\Pi})^2. \quad (4.3)$$

Для других переходов характерны параболические зависимости более высокой степени:  $\sigma_a^{2,0}(E) \sim (E-E_{\Pi})^3$ ,  $\sigma_a^{1,0}(E) \sim (E-E_{\Pi})^4$  и т.д.

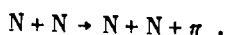
Из формулы (3.3) следует, что при любых  $l$  трехчастичный канал "открывается" плавно. В точке порога испытывает скачок лишь вторая (или еще более высокая) производная от сечения, и в отличие от двухчастичной реакции этот скачок конечен.

Обобщение изложенного выше на случай еще больших  $l$  очевидно.

Следует заметить в заключение, что бесконечный скачок производной в точке порога двухчастичной реакции имеет место лишь в абстрактном случае, когда взаимодействие длится бесконечно долго, частицы абсолютно стабильны, и система полностью изолирована. В реально встречающихся случаях точка порога не локализована, согласно соотношению неопределенностей, и энергетическая зависимость сечения не имеет излома. Поэтому отличие энергетических зависимостей сечений двухчастичной и трехчастичной реакций носит лишь количественный характер.

### § 3.3. Роль взаимодействия в конечном состоянии

В некоторых реакциях энергетическая зависимость сечения вблизи порога может быть существенно изменена вследствие взаимодействия частиц в конечном состоянии. Примером такой реакции является процесс образования  $\pi$ -мезонов нуклонами:





В конечном  $S$  - состоянии приведенной выше реакции нуклоны сильно взаимодействуют при малых энергиях, вследствие чего энергетическая зависимость сечения вблизи порога имеет вид не  $\sim (E - E_{\Pi})^2$ , а

$$\sigma_a^{0,0}(E) \sim \frac{(E - E_{\Pi})^2}{\epsilon + E - E_{\Pi}} \quad (5.3)$$

где  $\epsilon$  - энергия уровня (реального или виртуального). Величина  $\epsilon$  мала, и сечение (5.3) сравнительно быстро растет с энергией в области, не слишком близкой к порогу, изменяясь как  $(E - E_{\Pi})$ . Рассмотренный нами пример занимает промежуточное место между случаями двухчастичной и трехчастичной (свободной) реакцией (см. рис. 1).

### § 4.3. Влияние кулонова взаимодействия

При наличии у частиц в конечном состоянии электрических зарядов, их притяжение или отталкивание изменяет поведение сечения вблизи порога. В ряде случаев, как будет показано в дальнейшем, это изменение существенно влияет на характер пороговой аномалии.

Если знаки зарядов частиц одинаковы, то вследствие отталкивания частицы быстро покидают область взаимодействия, и сечение вблизи порога оказывается небольшим. В случае двухчастичной реакции, протекающей в  $S$  - состоянии, это приводит к исчезновению излома в энергетической зависимости сечения (см. рис. 1). Наоборот, если частицы электрически притягиваются, то особенность в точке порога становится еще более существенной - возникает скачок в самом сечении (см. рис. 1).

## 1У. ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ В ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ

### § 1.4. Связь сечений упругого и неупругого рассеяний

Как было показано в предыдущей главе, для двухчастичных реакций характерен особо быстрый рост сечения с энергией вблизи порога. Естественно ожидать, что возмущения, возникающие в других каналах реакции, будут наиболее значительны именно в этом случае.

Рассмотрим упругое рассеяние двух частиц (индекс канала  $a = s$ ) вблизи порога нового канала неупругого рассеяния ( $a = a$ ). Для простоты сначала поло-

жим, что спины всех частиц равны нулю и что кулоново взаимодействие отсутствует. Согласно формулам (1.3) и (15.2), элемент  $S$  - матрицы, соответствующий каналу  $a$ , имеет вблизи порога вид

$$|S_a^l| = \sqrt{2} b_l p^{l+1/2}, \quad (1.4)$$

где  $\sqrt{2} b_l$  - коэффициент пропорциональности, не зависящий от  $p$ . Воспользовавшись условием унитарности (11.2)

$$|S_a^l|^2 + |S_b^l|^2 = 1,$$

находим элемент  $S_b^l$ , который мы для краткости обозначим в дальнейшем, как  $S^l$ :

$$|S^l| = 1 - b_l^2 p^{2l+1} \quad (2.4)$$

(при малых  $p$ ). Отсюда:

$$S^l = e^{2i\delta_l} (1 - b_l^2 p^{2l+1}). \quad (3.4)$$

Фаза  $\delta_l(p)$  должна быть действительной и ниже порога при мнимых  $p$ , поскольку там имеет место только упругое рассеяние и поэтому  $|S^l| = 1$  из условия унитарности.

Вблизи порога, при малых  $p$ , можно пренебречь всеми степенями  $p$ , кроме первой. При этом

$$S^0 = e^{2i\delta_0} (1 - b_0^2 p) \quad \text{и} \quad S^l = e^{2i\delta_l}, \quad l > 0. \quad (4.4)$$

В качестве фаз  $\delta_l$  здесь берутся значения  $\delta_l(p)$  при  $p = 0$ , так как в силу аналитичности функции  $\delta_l(p)$  ее разложение в ряд по  $p$  не содержит первой степени (как и других нечетных степеней)  $p$ .

Выразим дифференциальное сечение упругого рассеяния  $\sigma_e(E, \theta')$  через написанные выше элементы  $S$  - матрицы. Воспользуемся для этого формулой (16.2). В случае рассеяния бесспиновых частиц  $S$  - матрица имеет вид (17.2). Подставив ее в (16.2), находим:

$$\sigma_e(E, \theta') = \frac{\kappa^2}{4} \left| \sum_l (2l+1)(S^l - 1) P_l(\cos \theta') \right|^2. \quad (5.4)$$

Используя разложение  $S^l$  по импульсу  $p$  (4.4) и введя амплитуду рассеяния  $f_s(E, \theta') = -i e^{i\chi(E, \theta')} \sqrt{\sigma_s(E, \theta')}$ , получаем

$$\sigma_s(E, \theta') = |f_s(E, \theta') - \frac{\lambda}{2} b_0^2 e^{2i\delta_0} p|^2$$

Отсюда находим, отбрасывая член  $\sim p^2$

$$\sigma_s(E, \theta') = \sigma_s(E_{\Pi}, \theta') - \frac{\sqrt{\sigma_s(E_{\Pi}, \theta')}}{2\pi\lambda} \sigma_s(E - E_{\Pi}) \sin[2\delta_0 - \chi(E_{\Pi}, \theta')], \quad E \geq E_{\Pi} \quad (6.4)$$

Здесь мы воспользовались тем, что вблизи порога

$$\sigma_s = \pi\lambda^2 |S_a^0|^2 = 2\pi\lambda^2 b_0^2 p$$

с точностью до членов  $\sim p^2$ .

#### § 2.4. Форма аномалий

Из формулы (6.4) видно, что выше порога имеет место специфическое дополнительное упругое рассеяние. С точностью до знака сечение этого рассеяния изменяется в околороговой области с ростом энергии совершенно так же, как и сечение неупругого рассеяния  $\sigma_a$ , следуя зависимости  $\sqrt{E - E_{\Pi}}$  и под-  
ходя к точке порога сверху с бесконечной производной.

Однако влияние нового канала не ограничивается изменением упругого рассеяния в области выше порога. Амплитуда упругого рассеяния является аналитической функцией  $p$ , что приводит к связи неупругого процесса с рассеянием и ниже порога. Вследствие аналитичности  $S^l$  формула (2.4) остается справедливой и при мнимых  $p$ , то есть при  $E < E_{\Pi}$ . Поэтому связь сечения  $\sigma_s(E, \theta')$  ниже порога с сечением  $\sigma_a$  имеет вид, аналогичный (6.4):

$$\sigma_s(E, \theta') = \sigma_s(E_{\Pi}, \theta') - \frac{\sqrt{\sigma_s(E_{\Pi}, \theta')}}{2\pi\lambda} \sigma_a(|E - E_{\Pi}|) \cos[2\delta_0 - \chi(E_{\Pi}, \theta')], \quad E \leq E_{\Pi} \quad (7.4)$$

Отсюда видно, что ниже порога сечение дополнительного рассеяния следует зависимости  $\sqrt{E_{\Pi} - E}$ , под-  
ходя к точке порога снизу с бесконечной производной.

Форма пороговой аномалии определяется знаком относительной фазы  $\xi = 2\delta_0 - \chi(E_{\Pi}, \theta')$ . Если  $0 < \xi < \frac{1}{2}\pi$ , то, как видно из (6.4) и (7.4), сечение дополнительного рассеяния уменьшается с приближением к точке порога как

сверху, так и снизу. Аномалия в этом случае имеет вид острого пика, направленного вниз. При  $\pi \leq \xi \leq 3/2 \pi$  знак второго члена в (6.4) и (7.4) положителен, в точке порога возникает пик, направленный вверх. В остальных двух случаях,  $1/2 \pi \leq \xi \leq \pi$  и  $3/2 \pi \leq \xi \leq 2\pi$ , аномалия имеет форму ступеньки (см.рис. 2).

Аналогичным образом решается задача об аномалии в энергетической зависимости интегрального сечения  $\sigma_s(E)$  (т.е. сечения  $\sigma_s(E, \theta')$ , проинтегрированного по  $\theta'$ ). Подставив в формулу для сечения  $\sigma_s(E)$  (19.2) элементы S-матрицы вблизи порога (4.4), получаем:

$$\sigma_s(E) = \pi \kappa^2 \left\{ \sum_{l=1} (2l+1) |e^{2i\delta_l} - 1|^2 + |e^{2i\delta_0}(1 - b_{0p}^2) - 1|^2 \right\}$$

или

$$\sigma_s(E) = \sigma_s(E_{\Pi}) - 2\sigma_a(|E - E_{\Pi}|) \begin{cases} \sin^2 \delta_0 & \text{при } E \geq E_{\Pi} \\ \sin \delta_0 \cos \delta_0 & \text{при } E \leq E_{\Pi} \end{cases} \quad (8.4)$$

Заметим, что в рассмотренном случае аномалия имеет вид либо пика, направленного вверх (см.рис. 2а) - при  $0 \leq \delta_0 < 1/2 \pi$  и  $\pi \leq \delta_0 \leq 3/2 \pi$ , либо "спускающейся" ступеньки (см.рис. 2г) - при  $1/2 \pi \leq \delta_0 \leq \pi$  и  $3/2 \pi \leq \delta_0 \leq 2\pi$ . Два других вида аномалии (см.рис. 2б и 2в) не осуществляются. Сечение дополнительного (аномального) рассеяния, описываемого интерференционным членом в формуле (8.4), всегда имеет отрицательный знак в области выше порога. Тем самым происходит своеобразная компенсация быстрого роста сечения нового канала ( $\sigma_a$ ) за счет уменьшения сечения старого канала ( $\sigma_s$ ).

Остановимся на последнем вопросе несколько подробнее. Прибавив к обеим частям равенства (8.4) величину  $\sigma_a$ , получаем, что полное сечение  $\sigma_t$  x) вблизи порога следует зависимости

$$\sigma_t(E) = \sigma_t(E_{\Pi}) + \sigma_a(|E - E_{\Pi}|) \begin{cases} \cos 2\delta_0 & \text{при } E \geq E_{\Pi} \\ \sin 2\delta_0 & \text{при } E \leq E_{\Pi} \end{cases} \quad (9.4)$$

x)  $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$

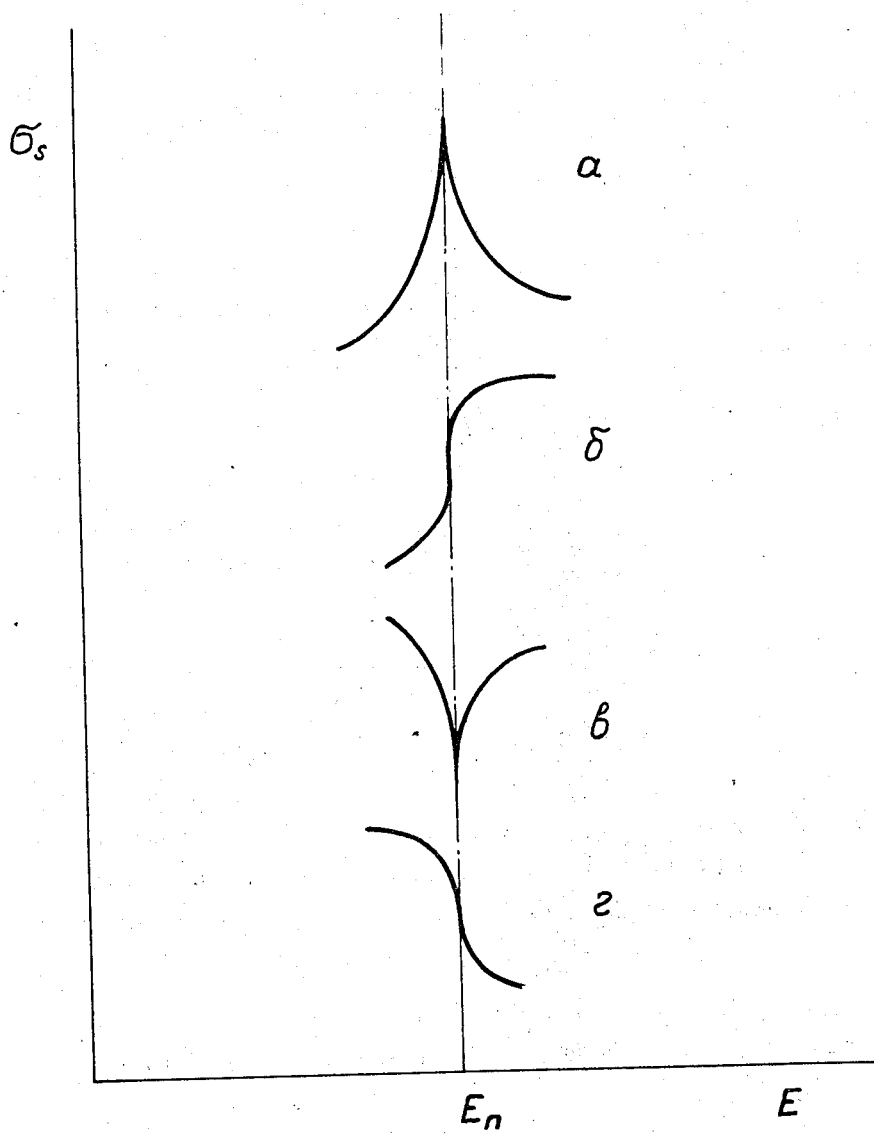


Рис. 2. Возможные формы пороговой аномалии.

Отсюда видно, что в энергетической зависимости полного сечения могут иметь место аномалии всех четырех типов, приведенных на рис. 2.: положительный пикок ( $\frac{1}{4}\pi \leq \delta_0 \leq \frac{1}{2}\pi$ ), отрицательный пикок ( $\frac{3}{4}\pi \leq \delta_0 \leq \pi$ ), "поднимающаяся" и "спускающаяся" ступеньки ( $0 \leq \delta_0 \leq \frac{1}{4}\pi$  и  $\frac{3}{4}\pi \leq \delta_0 \leq \pi$ ).

Таким образом, упомянутая выше компенсация носит различный характер в зависимости от того, какова величина фазы  $\delta_0$ : в одном случае она может быть малой, и полное сечение  $\sigma_t$  быстро растет выше порога, в другом же (например, при  $\frac{1}{2}\pi \leq \delta_0 \leq \frac{3}{4}\pi$ ) может иметь место даже "перекомпенсация", приводящая к уменьшению сечения  $\sigma_t$  с ростом энергии. В последнем случае явление приобретает парадоксальный характер - сечение реакции падает (!) вследствие того, что открывается новый канал.

#### § 3.4. Величина аномалий

Формулы (6.4) - (9.4) справедливы в малой окрестности порога, определяемой неравенством:

$$|k|R \ll 1, \quad (10.4)$$

где  $k = \frac{\sqrt{2\mu(E - E_{II})}}{\hbar}$  - волновой вектор;  $\mu$  - приведенная масса вторичных частиц, а  $R$  - радиус взаимодействия. При больших значениях  $(E - E_{II})$  необходимо учитывать более высокие члены разложения элементов  $S$ -матрицы по  $r$ . Здесь становится существенным изменение фаз  $\delta_l$ , и для изучения поведения сечения  $\sigma_t$  вне области, определяемой неравенством (10.4), требуется применение других методов - например, развитого в работе [10] метода, основанного на использовании дисперсионных соотношений.

Неравенство (10.4) ограничивает область, где происходит специфическое, носящее универсальный характер изменение сечения упругого рассеяния, обусловленное общими пороговыми особенностями открывающегося канала, которое мы и называем пороговой аномалией. Вне этой области термин "аномалия" теряет смысл, здесь имеет место обычное рассеяние "упругое от неупругого", для описания которого требуется уже знание конкретных свойств процессов рассеяния.



#### § 4.4. Аномалии высокого порядка

Если по каким-либо причинам интенсивность  $S$ -перехода в новом канале мала, то вблизи порога становятся существенными переходы в состоянии с более высокими моментами  $\ell$ . При  $\ell > 0$  энергетическая зависимость сечения (см. § 1.3),

$$\sigma_a(E) \sim (E - E_{\Pi})^{\ell + \frac{1}{2}}$$

уже не претерпевает излома в точке порога, и аномалия в сечении  $\sigma_a$  не возникает.

В точке порога имеет место излом  $\ell$ -ой производной и бесконечный скачок ( $\ell + 1$ )-ой производной от сечений неупругого рассеяния. По аналогии со случаем  $\ell = 0$  можно заключить, что при этом должна иметь место аномалия в  $\ell$ -ой производной от сечения упругого рассеяния, имеющая форму пичка или ступеньки (см. рис. 2).

### У. ПОРОГОВЫЕ АНОМАЛИИ В ТРЕХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЯХ

#### § 1.5. Об аномалии в энергетической зависимости сечения

В случае трехчастичной реакции сечение  $\sigma_a$  сравнительно медленно возрастает вблизи порога, следуя зависимости

$$\sigma_a(E) \sim (E - E_{\Pi})^m,$$

где  $m$  - целое число (см. гл. III). В отличие от двухчастичной реакции разложение элемента  $S^{\ell}$  по  $p$  ((1.4)-(4.4)) уже не содержит члена, пропорционального  $P$ , и аномалия в энергетической зависимости сечения  $\sigma_a$  не возникает.

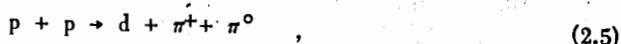
#### § 2.5. Аномалии в энергетических спектрах

Взаимодействие частиц в конечном состоянии трехчастичной реакции может привести к появлению аномалии несколько иного типа, чем обсуждавшийся ранее.

Рассмотрим для определенности, трехчастичную реакцию образования  $\pi$ -мезонов:



При энергии выше 587,5 Мэв становится возможной реакция образования двух  $\pi^-$ -мезонов;



которую можно рассматривать как протекающую в две стадии — сначала осуществляется реакция (1.5), а затем нейтрон и протон взаимодействуют:



При фиксированной энергии соударения первичных протонов и заданной энергии  $\pi^+$ -мезона взаимодействие нейтрона и протона в конечном состоянии реакции (1.5) можно рассматривать как упругое рассеяние нейтрона на протоне при определенной полной энергии системы нейтрон-протон  $E_{np}$ . Если уменьшать энергию  $\pi^+$ -мезона (и, следовательно, увеличивать  $E_{np}$ ), то при некоторой пороговой энергии "открывается" новый канал, эквивалентный неупругому рассеянию (3.5) в конечном состоянии. Этот канал "открывается" с бесконечной производной, что приводит к появлению заметных аномалий в канале (1.5). Рассмотренный случай аналогичен возникновению аномалий в двухчастичной реакции, только роль энергии соударения  $E$  здесь играет энергия  $\pi^-$ -мезона  $E_\pi$ , а роль сечения  $\sigma(E)$  — дифференциальное сечение  $d^2\sigma(E_\pi, \theta)/d\Omega_\pi dE_\pi$ .

Пороговые аномалии в энергетических спектрах могут иметь место во многих реакциях:  $p + p \rightarrow \Lambda^0 + \kappa^+ + p$  вблизи порога  $\Lambda^0 + p \rightarrow \Sigma^0 + p$ ,  $\gamma + p \rightarrow p + 2\pi^0$  и  $\pi^- + p \rightarrow p + 2\pi^0$  вблизи порога  $\pi^0 + \pi^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$  и т.д.

## У1. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ФОРМУ АНОМАЛИИ

### § 1.6. Наличие нескольких каналов ниже порога

До сих пор мы рассматривали сравнительно простой случай, когда ниже порога нового канала открыт лишь один канал — упругое рассеяние. Полученные при этом результаты нетрудно обобщить на случай, когда ниже порога нового

канала реакция протекает по нескольким различным каналам. Таковы, например, процессы рассеяния  $\pi^-$ -мезонов на протонах



вблизи порога реакции



(более подробно мы обсудим этот случай в § 5.6).

Как отмечалось в § 7.2, унитарность  $S$ -матрицы приводит к связи не только упругого и неупругого рассеяния, но и к более общей связи любого канала реакции с любым другим. Отсюда следует, что резкое изменение сечения нового канала, имеющее место вблизи его порога, должно приводить к появлению аномалий во всех каналах реакции, протекающих при этой энергии. Поясним сказанное выше на примере реакций (1.6)–(4.6). Ради простоты изложения будем полагать при этом, что спины всех частиц равны нулю. Тогда условие унитарности (11.2) принимает вид:

$$|S_1^{\ell}|^2 + |S_2^{\ell}|^2 + |S_3^{\ell}|^2 + |S_a|^2 = 1,$$

где индексами канала  $a = 1, 2, 3$ , а пронумерованы процессы (1.6)–(4.6). Так как  $|S_a^{\ell}|^2$  линейно зависит от  $p$  вблизи порога (см. (1.4)), то все остальные матричные элементы  $S_{1,2,3}^0$  также являются линейными функциями импульса и имеют вид (4.4). Последнее, как было показано в § 1.4, приводит к появлению аномалий во всех реакциях (1.6)–(3.6).

### § 2.6. Аномалии в случае двух расположенных рядом порогов

К рассмотренному в предыдущем параграфе случаю непосредственно примыкает и более сложный, когда пороги двух каналов расположены по соседству друг с другом. Подобное имеет место в приведенном выше примере рассеяния  $\pi^-$ -мезонов на протонах, где вблизи от порога реакции (4.6), на расстоянии  $(1.0 \pm 1.6)$  Мэв находится порог другой реакции:



Взаимное влияние аномалий начинает сказываться тогда, когда расстояние между порогами  $E_{\Pi_1} - E_{\Pi_2}$  близко к ширине аномалий  $\Delta$ , определяемой неравенством (10.4). Если  $|E_{\Pi_1} - E_{\Pi_2}| \gg \Delta$ , то каждая из аномалий является независимой. При совпадении двух порогов, то есть при  $|E_{\Pi_1} - E_{\Pi_2}| \ll \Delta$  имеет место одна, "суммарная" аномалия. В промежуточном случае происходит своеобразная "интерференция" аномалий, а не простое наложение их. Последнее связано с изменением пороговой зависимости одного канала под влиянием другого, соседнего канала. При этом разложение (4.4) справедливо лишь в сравнительно малой области.

### § 3.6. Влияние кулонова взаимодействия частиц на форму аномалий

Электрическое притяжение или отталкивание частиц в конечном состоянии открывающегося канала реакции изменяет энергетическую зависимость сечения этого канала  $\sigma_a$  вблизи порога (см. рис. 1). Соответственно изменяется и форма аномалий в других каналах реакции. Степень этого изменения определяется величиной энергии кулонова взаимодействия  $\epsilon_K = z_1 z_2 e^2 / r$ , где  $r$  — расстояние между частицами, примерно равное радиусу взаимодействия  $R$ . Если эта энергия, составляющая  $\ll 1$  Мэв, существенно меньше ширины аномалии, определяемой (10.4), то форма аномалии мало изменяется. Изменение затрагивает лишь область  $|E - E_{\Pi}| \approx \epsilon_K$ , где энергетическая зависимость сечения становится более плавной, чем если бы частицы были электрически нейтральны.

Подобный случай имеет место на порогах реакций образования большинства элементарных частиц, для которых аномалия имеет ширину  $\approx 10$  Мэв. Влияние кулонова взаимодействия особенно мало, если одна из образующихся частиц имеет малую массу (например, в реакции  $p + p \rightarrow d + \pi^+$ ), поскольку ширина аномалии, как видно из (10.4), обратно пропорциональна приведенной массе  $\mu$ .

Если ширина, определяемая (10.4), значительно меньше, чем  $\epsilon_K$ , то кулоново взаимодействие практически полностью сглаживает аномалию. Последнее имеет место во всех ядерных реакциях, для которых характерна малая ширина (10.4) — около 0,1 Мэв.

#### § 4.6. Аномалии в случае образования нестабильных частиц

Если одна из частиц, образующихся в новом канале, нестабильна, то точка порога не локализована и энергетическая зависимость сечения нового канала не испытывает излома при  $E = E_{\text{п}}$  (см. также замечание в конце § 2.3). Это приводит к изменению формы аномалии. Область энергий, где это изменение существенно, определяется полушириной  $\Gamma$  уровня нестабильной частицы, то есть величиной  $\hbar/T$ , обратной времени жизни частицы  $T$ . Если это время мало и  $\Gamma$  превышает ширину (10.4), то аномалия полностью сглаживается.

#### § 5.6. Аномалии в реакциях с участием частиц, обладающих спином

Большинство известных реакций в области высоких энергий протекает с участием элементарных частиц, спин которых отличен от нуля. В этих реакциях также возникают аномалии на пороге нового канала, однако, расшифровка их становится более сложной, чем для бесспиновых частиц.

Последнее связано с тем, что  $S$ -матрица, имеющая весьма простой вид (17.2) в случае бесспиновых частиц, приобретает сложную структуру при наличии у частиц спинов. При этом интегралами движения являются уже не орбитальный момент и его проекция, а полный момент  $J$  и его проекция  $M$ , и  $S$ -матрица имеет вид:

$$S^J \delta(J, J') \delta(M, M') \delta(E, E').$$

Заданным значениям  $J$  и  $M$  отвечает набор значений орбитального и спиновых моментов, сложением которых может быть получен момент  $J$ . Поэтому  $S^J$  является матрицей, вид которой усложняется по мере увеличения спинов частиц. Если все спины равны нулю, то порядок  $S$ -матрицы становится равным единице и  $S^J = S^L$  есть просто число, как было показано ранее (17.2).

Соотношение, выражающее связь сечения и  $S$ -матрицы при помощи коэффициентов векторного сложения моментов (коэффициентов Клебша-Жордана), слишком громоздко, чтобы его можно было анализировать в общем виде. Рассмотрим в качестве сравнительно простого примера случай рассеяния частиц со спинами, равными  $1/2$  и  $0$  (таковы, в частности, реакции (1.6), (3.6) и (4.6)). Пусть частицы в конечном состоянии обладают теми же спинами. До сих пор при

определении вида  $S$  - матрицы мы использовали только законы сохранения энергии, импульса и полного момента. "В запасе" у нас остается еще закон сохранения четности (речь идет только о сильных взаимодействиях, где четность сохраняется) и обратимость движения во времени (т.н. теорема взаимности для  $S$  - матрицы:  $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ ).

Воспользуемся первым из этих законов. В силу сохранения полной четности системы

$$(-1)^{\ell} = (-1)^{\ell'}, \quad (5.6)$$

если внутренняя четность при рассеянии не меняется (например, в реакции (1.6)),

$$\text{и} \quad -(-1)^{\ell} = (-1)^{\ell'} \quad (6.6)$$

при изменении внутренней четности. Остановимся на первом случае. Из (5.6) следует, что  $\ell'$  может отличаться от  $\ell$  только на какое-либо четное число.

Но, с другой стороны, из закона сохранения полного момента вытекает, что

$\ell' = \ell \pm 1$  или  $\ell' = \ell$ . Несовместимость первого из этих равенств с условием (5.6) приводит к обращению в нуль элементов  $S$  -матрицы, связанных с переходами  $\ell \rightarrow \ell + 1$  и  $\ell \rightarrow \ell - 1$ .

При заданном  $J$  остаются возможными лишь два перехода без изменения  $\ell$ :

$$\ell = J + \frac{1}{2} \rightarrow \ell' = J + \frac{1}{2} \quad \ell = J - \frac{1}{2} \rightarrow \ell' = J - \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае  $S$  -матрица является матрицей второго порядка, диагональной по  $\ell$ :

$$S = S^{J,\ell} \delta(J, J') \delta(M, M') \delta(\ell, \ell') \delta(E, E'). \quad (7.6)$$

Если имеет место только упругое рассеяние, то вследствие унитарности  $S$  -матрицы  $|S^{J,\ell}|^2 = 1$  и  $S^{J,\ell} = e^{2i\delta_{J,\ell}}$ , то есть оказывается возможным ввести фазы рассеяния, аналогичные фазам  $\delta_{\ell}$  упругого рассеяния бесспиновых частиц. Наличие спина, таким образом, привело к тому, что фазы стали зависеть не только от  $\ell$ , но и от  $J$ .

Чтобы выразить интегральное сечение  $\sigma$  через  $S^{J,\ell}$  нужно, согласно § 6.2, перейти из представления, описываемого набором  $i$  (см. § 6.2), в представление, заданное набором  $J, M$ . Соответствующая функция преобразования есть коэффициент Клебша-Жордана  $\langle J, M | \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \ell, 0 \rangle$ . Усреднив по направлениям спинов, получаем:



$$\sigma_s = \pi \kappa^2 \sum_{\ell} \{ (\ell+1) |S_s^{\ell+\frac{1}{2}, \ell} - 1|^2 + \ell |S_s^{\ell-\frac{1}{2}, \ell} - 1|^2 \}. \quad (8.6)$$

Для определения дифференциального сечения нужно дополнительно преобразовать  $S$ -матрицу при помощи функции преобразования  $\langle \theta, \phi | \ell, m \rangle$  (см. § 6.2). Так как проекция орбитального момента  $m$  в рассматриваемом случае не сохраняется, то  $m'$  может принимать два значения (в конечном состоянии):  $m'=0$ , если проекция спина не изменяется, и  $|m'|=1$ , если происходит рассеяние с перебросом спина. Соответственно, дифференциальное сечение будет представлено шаровыми функциями  $Y_{\ell m}(\theta', \phi') = \langle \theta', \phi' | \ell, m' \rangle$  нулевого и первого порядка:

$$\sigma_s(\theta') = |g_s(\theta')|^2 + |h_s(\theta')|^2, \quad (9.6)$$

где

$$g_s(\theta') = \frac{\kappa}{2i} \sum_{\ell} \{ (\ell+1) (S_s^{\ell+\frac{1}{2}, \ell} - 1) + \ell (S_s^{\ell-\frac{1}{2}, \ell} - 1) \} P_{\ell}(\cos \theta') \quad (10.6)$$

и

$$h_s(\theta') = -\frac{\kappa}{2i} \sum_{\ell} (S_s^{\ell+\frac{1}{2}, \ell} - S_s^{\ell-\frac{1}{2}, \ell}) P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta') \quad (11.6)$$

есть амплитуды рассеяния без переброса и с перебросом спина, соответственно, а  $P_{\ell}^{(1)}(\cos \theta')$  - присоединенная функция Лежандра 1-го порядка.

Установив связь сечения с  $S$ -матрицей, мы можем перейти к рассмотрению аномалий так же, как это делалось в §§ 1.4 и 2.4. Определим связь между элементами  $S$ -матрицы, входящими в (8.6) - (10.6) и матричными элементами, соответствующими новому каналу ( $S_a$ ). Образование новых частиц в этом канале вблизи порога протекает, в основном, в  $S$ -состоянии, и, следовательно,  $J = 1/2$ . Так же, как и в случае бесспиновых частиц (§ 1.4), матричный элемент нового канала изменяется вблизи порога пропорционально  $\sqrt{p}$ :

$$|S_a^{\frac{1}{2}, 0}| = \sqrt{2} b p^{\frac{1}{2}}. \quad (12.6)$$

Соотношение унитарности связывает его с элементом  $S$ -матрицы, соответствующим упругому рассеянию, и приводит к линейной зависимости этого элемента от импульса  $p$ , аналогичной (4.4):

$$S_s^{\frac{1}{2}, \ell} = e^{2i\delta_{\frac{1}{2}, \ell}} (1 - b^2 p). \quad (13.6)$$

Остальные элементы  $S$  - матрицы вблизи порога постоянны:

$$S_{\cdot}^{J,\ell} = e^{2i\delta_{J,\ell}}, J \neq \frac{1}{2}. \quad (14.6)$$

Значения  $\ell$  определяются с учетом закона сохранения четности (см. (5.6) и (6.6)). Так, если внутренняя четность в результате рассеяния не изменяется, то  $\ell = 0$ .

Полученный результат является весьма общим. Не только в рассмотренном случае, но и при произвольных спинах частиц условие унитарности всегда приводит к линейной зависимости от импульса  $P$  ряда матричных элементов, описывающих рассеяние в старом канале в области порога нового канала. Наличие же такой зависимости вызывает, как было показано ранее, появление аномалий вблизи порога.

Поскольку все измеряемые в опытах характеристики процесса рассеяния выражаются через элементы  $S$  - матрицы, то аномалии в энергетической зависимости имеют место для всех измеряемых величин (сечений, поляризаций, корреляций поляризаций и т.д.).

Проведенное выше рассмотрение аномалий в реакциях типа (3.6) показывает, что в зависимости от того, изменяется или не изменяется при рассеянии внутренняя четность частиц, линейно зависят от  $P$  различные элементы  $S$  - матрицы (с различными  $\ell$ ). Таким образом, изучение аномалий позволяет установить внутреннюю четность новых частиц (например, относительную четность  $\Sigma$  и  $\Lambda$  - гиперонов в реакциях (3.6), (4.6)) путем определения величины орбитального момента, при котором происходит аномальное рассеяние. Аналогичным образом при известном спине одной из вторичных частиц может быть получена оценка величины спина другой вторичной частицы, например,  $\kappa$  - мезона в реакции (3.6).

## VII. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ АНОМАЛИЙ

### § 1.7. Доступная информация

Пороговые аномалии представляют большой интерес не только как экзотическое квантово-механическое явление, но главным образом потому, что экспериментальное изучение их открывает новые богатые возможности получения информации о свойствах и взаимодействиях частиц.

Поясним это на рассмотренном ранее примере рассеяния бесспиновых частиц (см. §§ 1.4, 2.4). Как видно из формул (6.4) и (7.4), измерение аномалии позволяет определить три величины в точке порога: сечение (или поляризацию, корреляцию поляризаций и т.д.),  $\sin [2\delta_0 - \chi(E_{\text{п}}, \theta')]$  и  $\cos [2\delta_0 - \chi(E_{\text{п}}, \theta')]$  вместо одной - в "обычных" экспериментах, где измеряется только сечение, поляризация и т.д. По найденным в точке порога величинам можно построить функцию угла  $\theta'$ :

$$e^{i[\chi(E_{\text{п}}, \theta') - 2\delta_0]} \sqrt{\sigma_{\text{с}}(E_{\text{п}}, \theta')} = e^{-2i\delta_0} f_{\text{с}}(E_{\text{п}}, \theta'),$$

которая определяет амплитуду рассеяния  $f_{\text{с}}(E_{\text{п}}, \theta')$ . Разложение этой функции в ряд по полиномам Лежандра позволяет решить такую важную задачу, как проведение фазового анализа.

Измерение аномалии в интегральном или полном сечениях позволяет, как видно из (8.4), (9.4), определить фазу  $\delta_0$  в точке порога.

В более сложных случаях, когда спины частиц не равны нулю, исследование пороговых аномалий хотя и не дает возможности полностью восстановить амплитуду рассеяния, однако значительно облегчает громоздкую задачу фазового анализа. Наряду с этим, как было показано в § 5.6, изучение аномалий позволяет в ряде случаев сделать определенные заключения о спинах и четности участвующих в реакциях частиц.

Пороговые аномалии являются обильным, но, к сожалению, труднодоступным источником информации. Изучение этих аномалий требует высокой экспериментальной точности, которая значительно превышает точность, достигнутую при проведении "обычных" экспериментов по измерению сечений. В большинстве случаев требуемое увеличение точности лежит в пределах от 10 до 100. В связи с этим лишь в последнее время стали предприниматься попытки экспериментального исследования пороговых аномалий.

## § 2.7. Эксперименты при малых энергиях

Существование пороговых аномалий впервые было обнаружено при исследовании ядерных реакций в области малых энергий. В 1954 году Эннис и Хеммендингер<sup>/15/</sup> заметили небольшую немонотонность в энергетической зависимости дифференциального сечения реакции упругого рассеяния.



в области порога эндотермической реакции



( $E_{п} \approx 1$  Мэв). Однако авторы не были убеждены в действительном существовании этой немотонности вследствие сопутствовавших опыту значительных систематических погрешностей, неизбежных при проведении измерений в области столь малых энергий.

Более убедительные доказательства существования пороговых аномалий следовало искать при сравнительно высокой энергии. Такой эксперимент был выполнен в 1956 году Молибергом<sup>/16/</sup>, изучавшим упругое рассеяние протонов на литии:



На пороге реакции



( $E_{п} \approx 2$  Мэв) им был обнаружен четкий узкий пик (см.рис.3) в энергетической зависимости сечения реакции (3.7), достигавший  $\approx 20\%$  от величины сечения. Форма найденной аномалии хорошо описывается формулами (6.4), (7.4). Полагая радиус взаимодействия  $R$  равным  $\approx 10^{-12}$  см, получаем из оценки (10.4), что ширина аномалии  $\Delta \ll 0,5$  Мэв. Эта оценка согласуется с экспериментально найденной шириной  $\Delta \approx 70$  Кэв.

### § 3.7. Эксперименты в области высоких энергий

Исследование пороговых аномалий в области высоких энергий представляет особый интерес, так как наряду с возможностью получения дополнительной информации о процессах рассеяния, они открывают новую возможность поисков не известных ранее частиц. В точке порога канала, связанного с образованием новой частицы, должны иметь место аномалии в старых каналах реакции. Обнаружение и изучение формы этих аномалий позволило бы определить такие важные характеристики новой частицы, как спин, четность, массу.

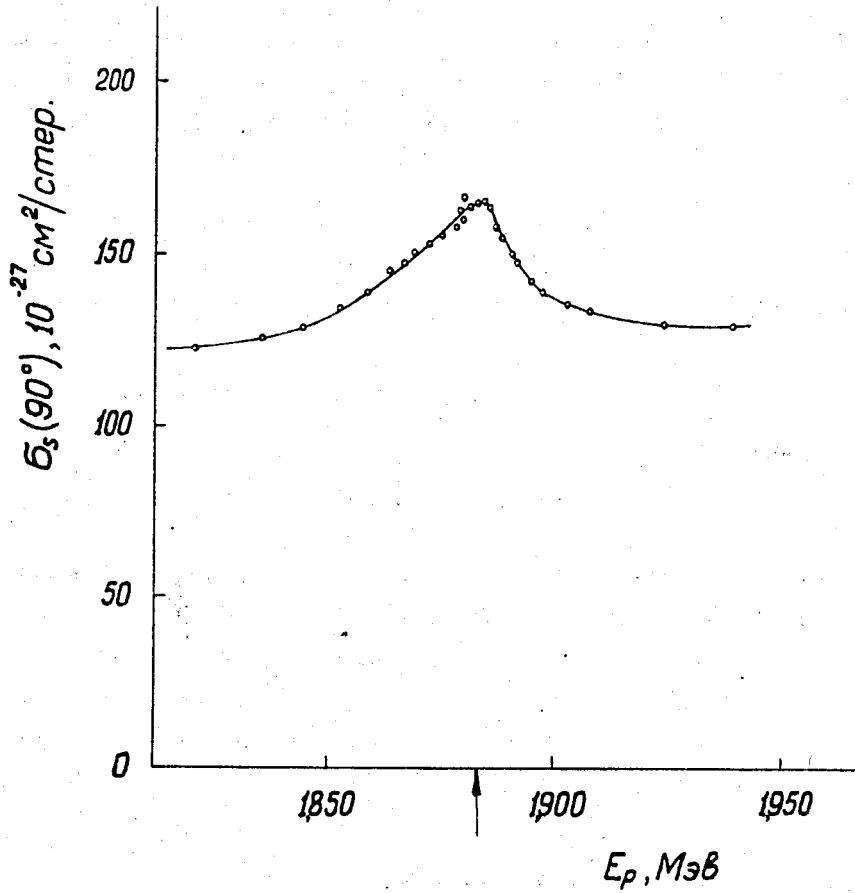
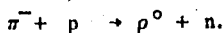


Рис. 3. Зависимость дифференциального сечения  $\sigma_s(90^\circ)$  реакции (3.7) от энергии протона  $E_p$  в области порога реакции (4.7). Порог указан стрелкой.

Эксперименты подобного типа были выполнены в 1959 году с целью обнаружения гипотетического  $\rho^0$ -мезона<sup>/9,17/</sup>, который мог бы образоваться в реакции



В этой работе была исследована при помощи сцинтилляционных счетчиков энергетическая зависимость сечения реакции упругого рассеяния  $\pi^-$ -мезонов на протонах в интервале энергий  $\pi^-$ -мезонов 140-360 Мэв. В пределах точности эксперимента ( $\approx 3-4\%$ ) никаких аномалий не было обнаружено.

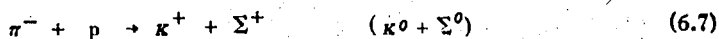
В следующем году были предприняты поиски аномалии в энергетической зависимости полного сечения  $p-p$  рассеяния<sup>/18/</sup> в интервале энергий 490-640 Мэв. Несмотря на то, что в этих опытах, благодаря применению дифференциальной ионизационной камеры была достигнута точность  $\approx 0,1\%$ , никаких аномалий, свидетельствующих о существовании новой частицы либо связанного состояния " $\pi^-$ -мезон+нуклон" (с малой энергией связи), не обнаружено.

Не было найдено также аномалий (в пределах точности  $\approx 2\%$ ) при исследовании энергетической зависимости реакции  $p + p \rightarrow d + \pi^+$  в области энергий 575-650 Мэв<sup>/19/</sup>.

Предварительные данные<sup>/20/</sup>, указывающие на возможность существования аномалии в энергетической зависимости дифференциальных сечений реакций



в районе порога реакции



(см. §§ 1,6 и 5,6), были получены недавно при облучении двухметровой жидководородной камеры  $\pi^-$ -мезонами высокой энергии. В этой работе изучалось изменение углового распределения в реакции (5,7) с уменьшением энергии  $\pi^-$ -мезонов и было обнаружено, что в точке порога угловое распределение почти изотропно, в то время как выше и ниже порога оно вытянуто назад.

Изменение углового распределения имеет характерный для пороговых аномалий вид узкого пика (см. рис.4). Ширина этого пика составляет  $\approx 1$  Мэв в согласии с оценкой (10,4). Обращает на себя внимание неожиданно большая



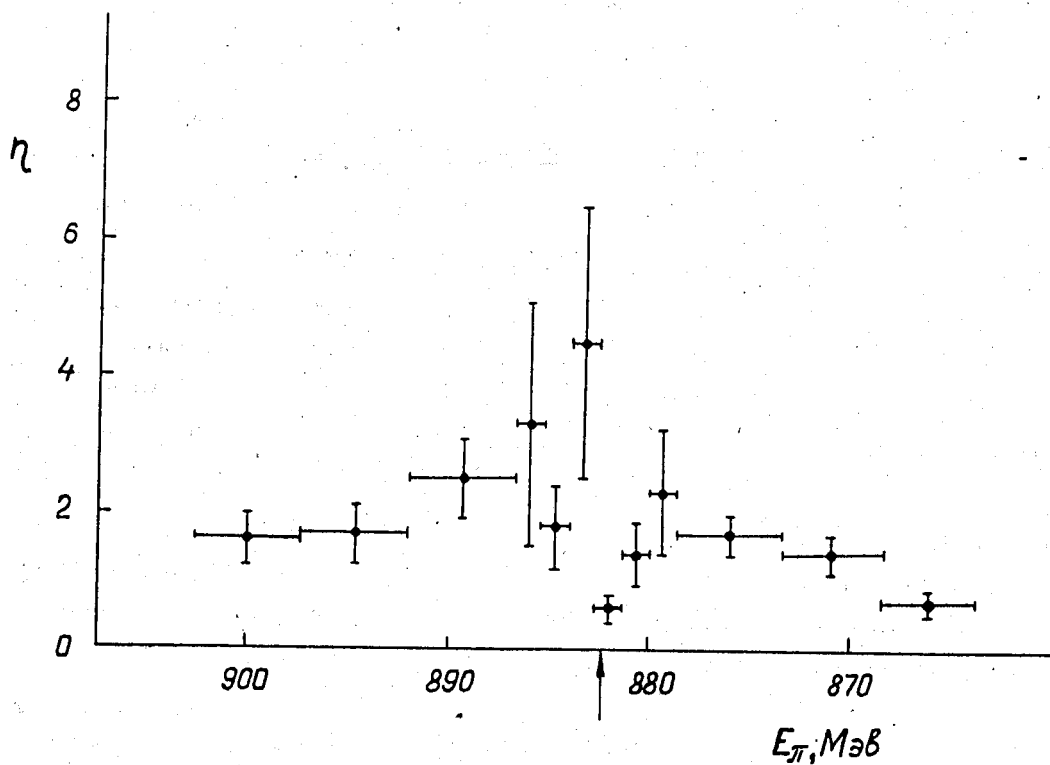


Рис. 4. Угловое распределение  $\Lambda^0$ -гиперонов в реакции (5.7). По оси ординат отложена величина асимметрии  $\eta$  углового распределения, определяемая как отношение "назад/вперед" (т.е. отношение чисел  $\Lambda^0$ -гиперонов, летящих в интервале углов  $90-180^\circ$  и  $0-90^\circ$ ) при разных энергиях  $\pi^-$ -мезонов  $E_{\pi^-}$ . Стрелкой указан порог реакции (6.7).

величина наблюдаемого эффекта. Аномалии в интегральном сечении в этой работе не обнаружено. Если существование аномалии в дифференциальном сечении будет в дальнейшем подтверждено, то изучая ее, можно будет определить относительную четность  $\Lambda$  и  $\Sigma$  - гиперонов (см. § 5,6).

#### § 4.7. Об аномалии в p-p рассеянии в области порога образования $\pi$ -мезона

Среди процессов, представляющих интерес с точки зрения исследования пороговых аномалий, особое место занимает реакция упругого рассеяния протонов



вблизи порога двухчастичной реакции образования  $\pi$ -мезона:



Малая величина пороговой энергии ( $E_{\pi} = 288$  Мэв), доступная многим современным ускорителям, высокая интенсивность имеющихся на этих ускорителях пучков протонов, необходимая для достижения нужной точности измерений, благоприятствует проведению исследования этой аномалии. Отметим также, что облегчающим эксперименты обстоятельством является и сравнительно большая ширина ожидаемой аномалии, что связано с относительно малой величиной массы  $\pi$ -мезона (см. § 3-6). Последнее делает также несущественным кулоново взаимодействие частиц в реакции (8.7), которое в случае малой ширины аномалии могло бы сгладить аномалию.

Исследование аномалии в области порога реакции (8.7) дает возможность сразу определить одну из фаз упругого p-p-рассеяния (см. ниже) и устранить тем самым существующую в настоящее время неоднозначность фазового анализа рассеяния протонов.

К сожалению, аномалия в реакции (7.7) не может быть большой. Связано это с тем, что хотя реакция (8.7) протекает весьма интенсивно, но образующиеся в ней частицы разлетаются преимущественно в p-состоянии. Как было показано в главе IV, наиболее существенные аномалии связаны лишь с процессами, протекающими в новом канале при  $\ell' = 0$ , сечение же этого процесса в нашем случае сравнительно невелико <sup>/22/</sup>:

$$\sigma_a^0 \approx 0,15 (p/m_{\pi} c) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2 \quad (9.7)$$

Здесь  $m_{\pi}$  - масса  $\pi$ -мезона.

Для оценки величины аномалии в энергетической зависимости интегрального сечения реакции (7.) воспользуемся формулой (8.4), но учтем, что спины частиц не равны нулю, определив "аномальную" фазу рассеяния исходя из закона сохранения четности, как это было сделано в §5.6. Так как спины дейтрона и  $\pi$ -мезона равны, соответственно, единице и нулю, то полный момент конечного состояния при  $l' = 0$  равен единице (дейтрон находится преимущественно в S-состоянии). Четность конечного состояния совпадает с четностью  $\pi$ -мезона и отрицательна. Четность начального состояния также должна быть отрицательной, и следовательно,  $l$  - нечетное число. При  $J = 1$  единственным возможным начальным состоянием в реакции (7.7), допускаемым принципом Паули, является состояние с  $l = 1: {}^3P_1$ . Фаза рассеяния в этом состоянии  $\delta_{1,1}$  и должна фигурировать вместо  $\delta_0$  в формуле (8.4), определяющей форму аномалии<sup>x)</sup>.

Подставив в (8.4) величину  $\delta_{1,1}$ , найденную Стапфом и др.<sup>/23/</sup> ( $\delta_{1,1} \approx -12^\circ$ ), и взяв в качестве радиуса взаимодействия комптоновскую длину  $\pi$ -мезона, получаем, что величина аномалии составляет около  $3 \cdot 10^{-29} \text{ см}^2$ , то есть равна примерно 0,1% от интегрального сечения упругого рассеяния (7.7). Эта величина хотя и очень мала, но вполне доступна существующим методам измерения<sup>/18/</sup>.

Так как фаза  $\delta_{1,1}$  расположена в четвертом квадранте, то аномалия, согласно формуле (8.4), имеет вид несимметричной "спускающейся" ступеньки (см. рис. 5).

В энергетической же зависимости полного сечения (9.4) должен наблюдаться пикок, направленный вниз (см. рис. 5).

<sup>x)</sup> Соотношение (8.4) определяет аномалию в сечении рассеяния бесспиновых частиц и, строго говоря, неприменимо для случая рассеяния частиц, обладающих спином. Однако, изменения, связанные с появлением спинов, оказываются в рассматриваемом примере несущественными. Формула, определяющая форму аномалии в энергетической зависимости сечения p-p рассеяния, отличается от (8.4) лишь множителем перед вторым членом суммы, равным 3/4. Здесь фактор 3 возникает из-за статистического веса  $(2J+1)$  рассматриваемого состояния  ${}^3P_1$ , а фактор 1/4 есть следствие усреднения по различным спиновым состояниям в случае неполяризованных пучка и мишени.

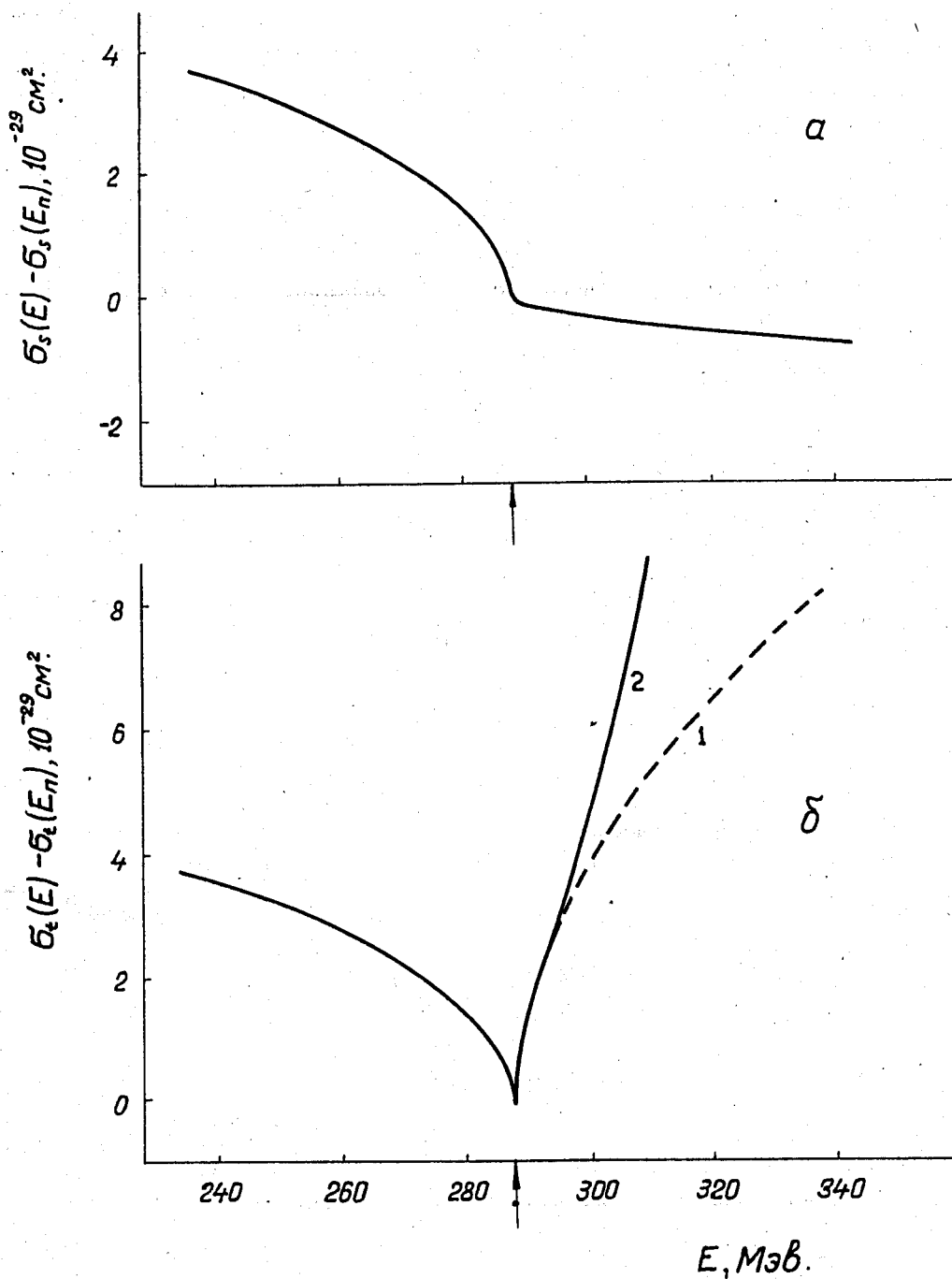


Рис. 5. Пороговые аномалии в сечении рассеяния протонов: а - в интегральном сечении упругого рассеяния  $\sigma_s$ , б - в полном сечении  $\sigma_t$ .  $\delta_{l=1}^+ = -12^\circ$ ,  $\sigma^0 = 0,15$  (р/м $\pi$ с)  $\cdot 10^{-27}$  см $^2$ . Стрелкой указан порог реакции  $p + p \rightarrow d + \pi^+$  ( $E_\pi = 287,9$  Мэв). Кривая 1 соответствует  $\sigma^0$  (образование мезонов только в S-состоянии). Кривая 2 - полное сечение, включающее в себя сечения образования мезонов в состояниях и с более высокими моментами, а также сечение трехчастичной реакции  $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ , порог которой расположен при  $E = 292,6$  Мэв.

Аномалия в интегральном сечении оказалась ничтожной в рассмотренном выше случае вследствие того, что и сечение  $\sigma_a^0$ , и "аномальная" фаза  $\delta_{1,1}$  невелики. Более удобным в экспериментальном отношении может оказаться исследование аномалии не в интегральном, а в дифференциальном сечении. В этом случае возможна интерференция<sup>х)</sup> малой фазы  $\delta_{1,1}$  с какой-либо большой фазой (аналогичная интерференции между  $\delta_0$  и  $\chi$ , см. (6.4), (7.4)), что может привести к аномалии, достигающей нескольких процентов от величины сечения рассеяния. Интерференционные члены существенны в области углов, близких к  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , где и следует в первую очередь пытаться искать аномалии.

Проведенная выше оценка величины аномалии является приближенной. Как фаза  $\delta_{1,1}$ , так (в меньшей мере) и сечение  $\sigma_a^0$  могут в действительности значительно отличаться от принятых нами. Поэтому вполне возможно, что наша оценка аномалии существенно занижена (или, что было бы менее приятно, завышена). Максимально возможную величину аномалии можно получить из (8.4), положив  $\delta_{1,1} = \arccos(1 - 1/\sqrt{2}) \approx 67^\circ$ . В этом случае амплитуда аномалии составляет (1-2)% от интегрального сечения рассеяния, если принять для  $\sigma_a^0$  величину (9.7).

### УШ. З а к л ю ч е н и е

Заканчивая обзор, хотелось бы еще раз подчеркнуть, что новая область исследований в физике частиц высокой энергии, открывшаяся в связи с обнаружением явления пороговой аномалии, таит в себе исключительно богатые возможности изучения процессов рассеяния и свойств элементарных частиц. В ряде случаев эти возможности являются уникальными, например, устранение неоднозначности фазового анализа.

Теоретическое исследование явления пороговой аномалии сейчас, по существу, уже завершено. В экспериментальном же изучении аномалий сделаны лишь первые шаги. Следует ожидать, что в ближайшее время эта область подвергнется самому интенсивному экспериментальному исследованию.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить А.И.База и Л.И.Лапидуса за многочисленные дискуссии.

х) При переходе от дифференциального к интегральному сечению эта интерференция естественно, исчезает.

Л и т е р а т у р а

1. E.P.Wigner. Phys.Rev., 73, 1002 (1948).
2. А.И.Базь. ЖЭТФ, 33, 923, 1957.
3. А.И.Базь, Л.Б.Окунь. ЖЭТФ, 35, 757, 1958.
4. R.K.Adair. Phys.Rev., 111, 632 (1958).
5. R.G.Newton. Phys.Rev., 114, 1611 (1959).
6. L.Fonda, R.G.Newton. Nuovo Cim., 14, 1027 (1959).
7. А.И.Базь. ЖЭТФ, 36, 1782, 1959.
8. R.J.N.Phillips. Nucl.Phys., 14, 133 (1959).
9. В.Г.Зинов, А.Д.Конин, С.М.Коренченко, Б.Понтекорво. ЖЭТФ, 36, 1948,1959;  
В.И.Гольданский, Я.А.Сморodinский. ЖЭТФ, 36, 1950, 1959.
10. Л.И.Лapidус, Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ, 39, 112, 1960.
11. Л.И.Лapidус, Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ, 39, 364, 1960.
12. L.Fonda. 'Inelastic collisions and threshold effects'. Preprint, 1960.
13. J.Sucher, G.A.Snow, T.V.Day. 'Cusp phenomena in the region of two neighbouring thresholds'.  
Preprint, 1960; M.Nauenberg, A.Pais. 'Correlations between cusps in differential cross sections  
and in polarizations'. Preprint, 1961.
14. R.J.N.Phillips. Nucl.Phys., 23, 345 (1961).
15. M.E.Ennis, A.Hemmendinger. Phys.Rev., 95, 772 (1954).
16. P.R.Malmberg. Phys.Rev., 101, 114 (1956).
17. В.Г.Зинов, А.Д.Конин, С.М.Коренченко, Б.Понтекорво. ЖЭТФ, 38, 1708,1960.
18. И.М.Василевский, Ю.Д.Прокошкин, В.И.Рыкалин. ЖЭТФ, 40, 1524, 1961.
19. Ю.К.Акимов, О.В.Савченко, Л.М.Сороко. ЖЭТФ, 40, 1528, 1961.
20. M.I.Alston, J.A.Anderson, P.G.Burke, D.D.Garmony. F.S.Crawford, N.Schmitz, S.E.Wolf.  
Proc. 1960 Ann. Intern. Conf. on High Energy Physics at Rochester. p. 378.
21. П.А.М.Дирак. "Принципы квантовой механики". ГИФМЛ, Москва, 1960.
22. A.H.Rosenfeld. Phys. Rev., 96, 139 (1954).
23. Ч.Р.Stapp, Т.Ypsilantis, N.Metropolis. Phys.Rev., 105, 302 (1957).  
P.Cziffra, M.MacGregor, M.J.Moravcsik, H.P.Stapp. Phys.Rev., 114, 880 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 июля 1961 года.