

14
M-48

+

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ



Н.Н.Мельникова

755

756

УЧЕТ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ КАМЕРЫ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ
Ж.Тяж., 1962, № 1, с 32-36.

Дубна 1961 год

Н.Н.Мельникова

755

УЧЕТ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ КАМЕРЫ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1142/5 24.

Направлено в ПТЭ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

При облучении пузырьковой камеры пучком ядерных частиц в результате взаимодействия их с веществом, заполняющим объем камеры, образуются следы вторичных частиц.

Во многих физических задачах нас интересуют те вторичные частицы, которые еще раз провзаимодействовали в веществе камеры или претерпели распад. Следы такого типа можно характеризовать параметром \vec{l} — длиной от места образования до распада или взаимодействия и направлением по отношению к первичному пучку. Из-за ограниченного размера камеры часть случаев такого типа не может быть зарегистрирована. Для получения правильного представления об энергетическом и угловом распределении рожденных в камере вторичных частиц, для оценки сечений взаимодействия необходимо вводить геометрические поправки, обусловленные конечными размерами камеры.

В настоящей работе показана возможность нахождения аналитической функции распределения вероятности регистрации в камере событий данного типа, характеризующихся параметром \vec{l} . Зная зарегистрированные случаи и используя полученную функцию распределения вероятности их нахождения, можно определить истинное число случаев такого типа.

Формулы выводятся при следующих предположениях:

1) считается, что вторичные частицы могут образовываться в любом месте камеры с равной вероятностью;

2) распределение вторичных частиц по углам по отношению к направлению первичного пучка — изотропно^{x)}.

Задача сводится к геометрической. Пусть имеется ограниченный объем $(2a \times 2b \times 2c)$ (рис. 1). Необходимо найти функцию $W(l)$ — вероятности наблюдения в этом объеме отрезков длины l . Очевидно, для заданного направления $\vec{l}(l_x, l_y, l_z)$ — вероятность нахождения в ограниченном объеме — равна отношению объемов (рис. 2)

^{x)} В дальнейшем показывается, как можно применить формулу, если распределение вторичных частиц по углам имеет вид $A \cos^2 \theta + B \cos \theta + C$, где θ — угол вылета вторичной частицы по отношению к первичному пучку.

$$W(\vec{l}) = \frac{1}{8abc} [2a - |l_x|] [2b - |l_y|] [2c - |l_z|] \times$$

$$\times Q(2a - |l_x|) Q(2b - |l_y|) Q(2c - |l_z|)$$

$$Q(X) = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

Считаем распределение \vec{l} изотропным и усредняем по телесному углу

$$W(|l|) = \frac{1}{4\pi} \int W(\vec{l}) d\Omega_{\vec{l}}$$

Для удобства вычислений перейдем к координатам l, θ, ϕ .

$$l_x = l \sin \theta \cdot \cos \phi; \quad l_y = l \sin \theta \cdot \sin \phi; \quad l_z = l \cos \theta.$$

Тогда

$$W(l) = \frac{1}{32\pi abc} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Q(2a - l |\sin \theta| |\cos \phi|) Q(2b - l |\sin \theta| |\sin \phi|)$$

$$Q(2c - l |\cos \theta|) [2a - l |\sin \theta| |\cos \phi|] [2b - l |\sin \theta| |\sin \phi|]$$

$$[2c - l |\cos \theta|] \sin \theta d\theta d\phi.$$

Введем обозначения:

$$\cos \theta = \xi; \quad |\cos \theta| = |\xi|; \quad |\sin \theta| = \sqrt{1 - \xi^2};$$

учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(|\xi|, |\sin \phi|, |\cos \phi|) d\xi d\phi = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 f(|\xi|, |\sin \phi| |\cos \phi|) d\xi d\phi$$

имеем

$$W(l) = \frac{1}{4\pi abc} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 Q[2c - l\xi] Q[2a - l\sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi] Q[2b - l\sqrt{1 - \xi^2} \sin \phi] \\ [2a - l\sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi] [2b - l\sqrt{1 - \xi^2} \sin \phi] [2c - l\xi] d\xi d\phi.$$

Подынтегральное выражение отлично от нуля ($Q(X) \neq 0$) при одновременном выполнении условий:

$$2c - l\xi > 0 \quad (Ic)$$

$$2a - l\sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi > 0 \quad (Ia) \quad (I)$$

$$2b - l\sqrt{1 - \xi^2} \sin \phi > 0 \quad (Ib)$$

Неравенства (I) дают условия, накладываемые на пределы интегрирования, т.е. можно записать

$$W(l) = \frac{1}{4\pi abc} \int_0^{\pi/2} \int_{\xi_{\min}(\phi)}^{\xi_{\max}(\phi)} [2a - l\sqrt{1 - \xi^2} \cos \phi] [2b - l\sqrt{1 - \xi^2} \sin \phi] \\ [2c - l\xi] d\xi d\phi.$$

Очевидно, для разных l значения ξ_{\min} и ξ_{\max} будут различны. Задача сводится к вычислению этого интеграла при различных пределах, определяемых неравенствами (I). Для определенности считаем, что

$$2a > 2b > 2c.$$

Рассмотрим все возможные случаи:

1. Пусть $l < 2c < 2b < 2a$

(I) выполняются автоматически и

$$\xi_{\min} = 0 \quad ; \quad \xi_{\max} = 1.$$

2. Пусть $2c < l < 2b < 2a$

(Ia) и (Ib) выполняются автоматически; из (Ic) получаем $\xi \leq \frac{2c}{l}$.

Следовательно, $\xi_{\min} = 0$; $\xi_{\max} = \frac{2c}{l}$.

3. Пусть $2c < 2b < l < 2a$
из (1с) и (1в) получаем

$$2c - l\xi > 0 \quad \xi \leq \frac{2c}{l}$$

$$2b - l\sqrt{1-\xi^2} \sin\phi > 0 \quad \sqrt{1-\xi^2} < \frac{2b}{l \sin\phi}$$

при $\sin\phi \leq \frac{2b}{l}$ выполняется (1в)

при $\sin\phi > \frac{2b}{l}$ $\xi \geq \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2\phi}}$,

следовательно,

$$\xi_{\max} = \frac{2c}{l} \quad \xi_{\min} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \sin\phi \leq \frac{2b}{l} \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2\phi}} & \frac{2b}{l} < \sin\phi \leq 1. \end{cases}$$

4. И, наконец, пусть $2c < 2b < 2a < l$

Должны быть выполнены неравенства (1).

Из (1с) получаем $\xi \leq \frac{2c}{l}$; $\xi_{\max} = \frac{2c}{l}$.

Введем обозначения $\frac{2b}{l} = \sin\phi_s$; $\frac{2a}{l} = \cos\phi_c$.

Из неравенств (1а) и (1в) имеем

$$\begin{aligned} & 0 \leq \sin\phi \leq \frac{2b}{l} \quad 0 \leq \phi \leq \phi_s \\ \text{из (1в)} \quad \xi_{\min}(b) = & \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2\phi}} & \frac{2b}{l} \leq \sin\phi \leq 1 \quad \phi_s \leq \phi \leq \pi/2 \end{cases} \\ \text{из (1а)} \quad \xi_{\min}(a) = & \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2\phi}} & \frac{2a}{l} \leq \cos\phi \leq 1 \quad 0 \leq \phi \leq \phi_c \\ 0 & 0 \leq \cos\phi \leq \frac{2a}{l} \quad \phi_c \leq \phi \leq \pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\xi_{\min} = \max \{ \xi_{\min}(a), \xi_{\min}(b) \} .$$

Обозначим $\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{b}{a}$.

Соотношения между ϕ_c , ϕ_s и ϕ_0 будут меняться с изменением l, ϕ ;

при $\operatorname{tg} \phi < \frac{b}{a}$ $\phi < \phi_0$

$$\sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \operatorname{Sin}^2 \phi}} < \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \operatorname{Cos}^2 \phi}};$$

при $\operatorname{tg} \phi > \frac{b}{a}$ $\phi > \phi_0$

$$\sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \operatorname{Sin}^2 \phi}} > \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \operatorname{Cos}^2 \phi}}.$$

Для правильной расстановки пределов интегрирования надо рассмотреть все случаи (все возможные соотношения между ϕ_s , ϕ_c и ϕ_0 .)

1. Пусть $0 \leq \phi_s < \phi_c < \phi_0 \leq \pi/2$

(см.рис.3а)

$$\xi_{\min} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \operatorname{Cos}^2 \phi}} & 0 < \phi < \phi_s \\ \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \operatorname{Cos}^2 \phi}} & \phi_s < \phi < \phi_c \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \operatorname{Sin}^2 \phi}} & \phi_c < \phi < \phi_0 \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \operatorname{Sin}^2 \phi}} & \phi_0 < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

2. $0 \leq \phi_c < \phi_s < \phi_0 \leq \pi/2$

/см.рис.3б/

$$\xi_{\min} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \operatorname{Cos}^2 \phi}} & 0 < \phi < \phi_c \\ 0 & \phi_c < \phi < \phi_s \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \operatorname{Sin}^2 \phi}} & \phi_s < \phi < \phi_0 \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \operatorname{Sin}^2 \phi}} & \phi_0 < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

$$3. \quad 0 \leq \phi_0 < \phi_s < \phi_c \leq \pi/2$$

/см. рис. 3в/.

$$\xi_{min} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & 0 < \phi < \phi_0 \\ \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & \phi_0 < \phi < \phi_s \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2 \phi}} & \phi_s < \phi < \phi_c \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2 \phi}} & \phi_c < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

$$4. \quad 0 \leq \phi_0 < \phi_c < \phi_s \leq \pi/2$$

/см. рис. 3г/.

$$\xi_{min} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & 0 < \phi < \phi_0 \\ \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & \phi_0 < \phi < \phi_c \\ 0 & \phi_c < \phi < \phi_s \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2 \phi}} & \phi_s < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

$$5. \quad 0 \leq \phi_s < \phi_0 < \phi_c \leq \pi/2$$

/см. рис. 3д/.

$$\xi_{min} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & 0 < \phi < \phi_0 \\ \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & \phi_s < \phi < \phi_0 \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2 \phi}} & \phi_0 < \phi < \phi_c \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2 \phi}} & \phi_c < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

в. $0 \leq \phi_c < \phi_0 < \phi_s \leq \pi/2$

/см. рис. 3е/.

$$\xi_{min} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2 \cos^2 \phi}} & 0 < \phi < \phi_c \\ 0 & \phi_c < \phi < \phi_0 \\ 0 & \phi_0 < \phi < \phi_s \\ \sqrt{1 - \frac{4b^2}{l^2 \sin^2 \phi}} & \phi_s < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

Следует учесть, что при получении для некоторых ϕ $\xi_{max} < \xi_{min}$ надо положить $\xi_{max} \equiv \xi_{min}$ и \int обратится в нуль.

Указанные формулы можно применить и в том случае, когда \vec{l} могут находиться в направленном конусе, т.е. когда на направления вторичных частиц могут быть наложены ограничения. Тогда, зная экспериментальное угловое распределение вторичных частиц и аппроксимируя его функцией вида

$$\rho(\vec{l}) = \begin{cases} A \cos^2 \theta + B \cos \theta + C & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \theta > \pi/2, \end{cases}$$

получим при усреднении по \vec{l}

$$W(l) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(\vec{l}) W(\vec{l}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

т.е. функция $\rho(\vec{l})$ вводится под интеграл и производится интегрирование с учетом указанных пределов.

Используя ранее выведенную формулу, покажем, как пользоваться ею в конкретной задаче для получения аналитической функции распределения. Рассмотрим подробнее случаи 1 и 2.

1. Для случая $1 \leq 2c \leq 2b \leq 2a$

имеем $\xi_{\min} = 0$; $\xi_{\max} = 1$

$$\begin{aligned}
 W_1(1) &= \frac{1}{4\pi abc} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [2a - 1\sqrt{1-\xi^2} \cos \phi] [2b - 1\sqrt{1-\xi^2} \sin \phi] \\
 & [2c - 1\xi] d\xi d\phi = \frac{1}{4\pi abc} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [8abc - 4ab\xi^2 - (4ac \sin \phi + \\
 & + 4bc \cos \phi) \sqrt{1-\xi^2} + (2a^2 \sin \phi + 2b^2 \cos \phi) \xi \sqrt{1-\xi^2} + \\
 & + 2c^2 \sin \phi \cos \phi (1-\xi^2) - l^2 \cos \phi \sin \phi \xi (1-\xi^2)] d\xi = \\
 & = 1 - \frac{(ac+bc+ab)}{4abc} l + \frac{(a+b+c)}{6\pi abc} l^2 - \frac{l^3}{32\pi abc} \quad (*).
 \end{aligned}$$

2. Для случая $2c \leq l \leq 2b \leq 2a$

имеем $\xi_{\min} = 0$; $\xi_{\max} = \frac{2c}{l}$ (см. выше)

$$\begin{aligned}
 W_2(1) &= \frac{1}{4\pi abc} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2c/l} [2a - 1\sqrt{1-\xi^2} \cos \phi] [2b - 1\sqrt{1-\xi^2} \sin \phi] \\
 & [2c - 1\xi] d\xi = \frac{1}{4\pi abc} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2c/l} [8abc - 4ab\xi^2 - (4ac \sin \phi + \\
 & + 4bc \cos \phi) \sqrt{1-\xi^2} + (2a^2 \sin \phi + 2b^2 \cos \phi) \xi \sqrt{1-\xi^2} + \\
 & + 2c^2 \sin \phi \cos \phi (1-\xi^2) - l^2 \cos \phi \sin \phi \xi (1-\xi^2)] d\xi = \\
 & = \frac{1}{2} \left(\frac{2c}{l} \right) - l \left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{2\pi b} \right) \left[\arcsin \frac{2c}{l} + \frac{2c}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{2c}{l} \right)^2} \right] + \\
 & + \left(\frac{l^2}{6\pi ac} + \frac{l^2}{6\pi bc} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2c}{l} \right)^2} \right] + \left(\frac{2c}{l} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{2c}{l} \right)^2} + \\
 & + \frac{l^2}{4\pi ab} \left[\frac{2c}{l} - \frac{1}{3} \left(\frac{2c}{l} \right)^3 \right] - \frac{l^3}{16\pi abc} \left[\left(\frac{2c}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2c}{l} \right)^4 \right] (**).
 \end{aligned}$$

Очевидно, при $l = 2c$ оба решения (x) и (xx) должны совпадать.
Для (x) получим

$$W_1(2c) = 1 - \frac{(ac + bc + ab)}{4abc} 2c + \frac{(a + b + c)4c^2}{6\pi abc} - \frac{8c^3}{32\pi abc} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{c}{2b} - \frac{c}{2a} + \frac{2c}{3\pi b} + \frac{2c}{3\pi a} + \frac{5c^2}{12\pi abc}$$

Из (xx) получим при $l = 2c$

$$W_2(2c) = \frac{1}{2} - 2c \left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{2\pi b} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{4c^2}{6\pi ac} + \frac{4c^2}{6\pi bc} +$$

$$+ \frac{4c^2}{4\pi ab} \frac{2}{3} - \frac{8c^3}{16\pi abc} (1 - \frac{1}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{c}{2b} - \frac{c}{2a} + \frac{2c}{3\pi b} + \frac{2c}{3\pi a} + \frac{5c^2}{12\pi abc},$$

т.е. $W_1(2c) \equiv W_2(2c)$.

Аналитические выражения (x) и (xx) были применены для случая 24 литровой пузырьковой пропановой камеры, имеющей размеры $2a = 55$ см; $2b = 28$ см, $2c = 10$ см. Получили кривую, изображенную на рис. 4. Из кривой видно, что вероятность регистрации вторичных частиц, характеризующихся $l > 2b$ достаточно мала и во многих случаях можно ограничиться рассмотрением случаев 1 и 2. Для этой же камеры были рассчитаны случаи, когда вторичные частицы могли вылетать в конусе $= \pi/6$ и $\pi/3$, а также рассмотрен случай, в котором использовалась экспериментальная кривая углового распределения вторичных частиц.

Результаты сравнивались с кривой распределения вероятности регистрации, вычисленной по методу Монте-Карло^{х)}.

х) Пользуюсь случаем выразить благодарность Г.И.Копылову и В.И.Кочкину за расчет кривой распределения вероятности по методу Монте-Карло и возможность сравнения полученных результатов.

Получено согласие в пределах ошибок. В области $l > 2$ в кривую получали приближенно аппроксимацией к большим значениям l .

Для точного проведения кривой в этой области надо рассмотреть случаи 3 и 4, которые в элементарных функциях не решаются. Окончательную кривую распределения вероятности для всех возможных l можно получить численным интегрированием.

В заключение выражаю глубокую признательность Векслеру В.И. за постановку задачи и интерес к работе, Яркому О.И. за помощь в работе и Подгорецкому М.И. за полезные обсуждения.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1961 года.

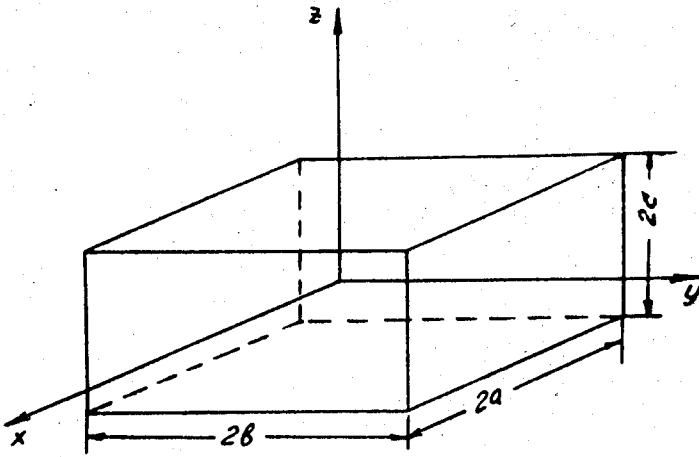


Рис. 1

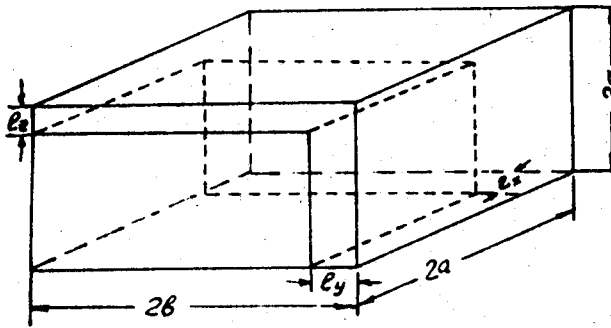
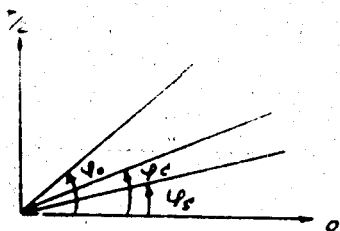
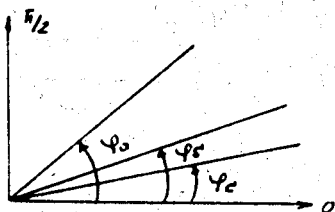


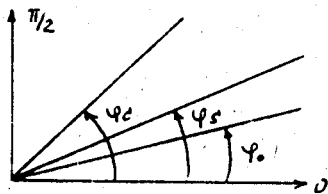
Рис. 2



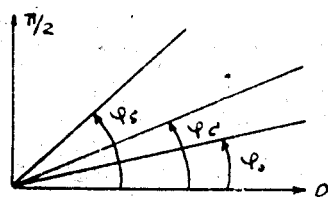
Puc. 3a



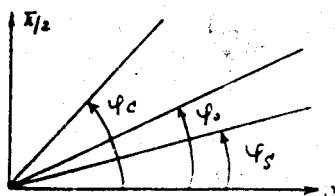
Puc. 3б



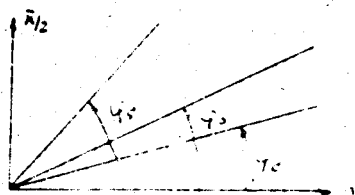
Puc. 3в



Puc. 3г



Puc. 3д



Puc. 3е

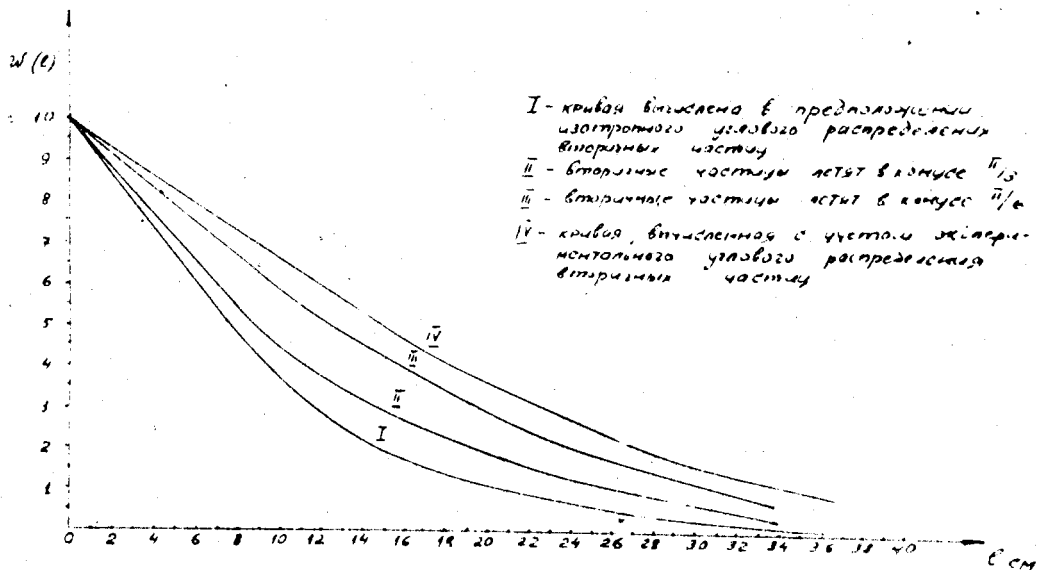


Рис. 4