ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Г.Н. Вялов

735

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОМ

ЖТФ, 1962, т 32, в 11, с 1361-1370

Дубна 1961

Г.Н. Вялов

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОМ

Направлено в ЖТФ

А н н о т а ц и я

В работе решается задача формирования заданного поля током в многослойном магнетике. Получены точные выражения плотности тонкого плоского тока для случая двух границ /поле в зазоре, поле за плоским магнитным экраном/ и произвольного заданного в плоскости магнитного поля. На языке метода изображений полученное решение эквивалентно учету всех изображений тока.

Введение

В практике формирования магнитного поля в ускорителях широко применяются витки с током [1,2,3,4,5]. Применение токов обеспечивает значительные преимущества по сравнению с железным шиммированием. Эти преимущества связаны с возможностью плавной регулировки поля путем изменения тока.

Обычно распределение токов на поверхности полюса определяется методом проб: берется некоторое распределение токов и отыскивается создаваемое ими поле, которое сравнивается с заданным полем. По расхождению между искомым и пробным полем оценивается изменение формы тока, необходимое для получения более точной формы поля. Затем эта операция повторяется до получения заданной формы поля с требуемой точностью. Если требования к точности воспроизведения поля не очень высоки, то указанный способ позволяет сформировать заданное поле при небольшом числе проб. Однако развитие ускорительной техники в настоящее время связано с постоянным возрастанием требований к точности воспроизведения поля [2,6,7,8]. Соответственно возрастают требования к точности расчета. При использовании метода проб число ступеней расчета быстро растет с повышением точности.

Объем вычислений и время, затрачиваемое на формирование поля, можно значительно сократить, если вместо косвенного метода проб использовать прямой метод вычисления тока по создаваемому им заданному полю. Общая задача такого рода связана с решением двухмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Мы рассмотрим ряд простых примеров, представляющих практический интерес. Наиболее простой и важной является задача формирования поля, заданного на плоскости в однородном магнетике. Назовем эту задачу основной. Решения других простейших задач, рассмотренных нами, выражаются через решение основной задачи. Кроме основной задачи нами рассмотрены задачи формирования поля плоским током при наличии одной и двух плоских границ раздела магнетика.

1. Вывод основных уравнений. Постановка задачи

Исходным пунктом наших рассуждений являются уравнения Максвелла для статического магнитного поля в изотропном магнетике:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}(\bar{r}) = \frac{4\pi}{c}\bar{j}(\bar{r}) = 4\pi\bar{\rho}(\bar{r}) \qquad /1.1/$$

$$\mathrm{div}\,\bar{B}(\bar{r}) = 0 \qquad /1.2/$$

$$\bar{B}(\bar{r}) = \mu(\bar{r})\cdot\bar{H}(\bar{r}) \qquad /1.3/$$

/мы пользуемся декартовой системой координат x , y , z , $\bar{r}=\bar{i}\cdot x+\bar{j}\cdot y+\bar{k}\cdot z$ -радиус – вектор произвольной точки/.

Для нас удобно исключить индукцию $\bar{B}$ и представить уравнения Максвелла в виде

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}(\bar{r}) = 4\pi\bar{\rho}(\bar{r}) \qquad /1.1/$$

$$\mathrm{div}\,\bar{H}(\bar{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\bar{H}(\bar{r})\cdot \mathrm{grad}\,\varepsilon(\bar{r}) \qquad /1.2^1/$$

$$\varepsilon(\bar{r}) = 1/\mu(\bar{r}). \qquad /1.4/$$

Введем эквивалентную токам намагниченность $\bar{M}(\bar{r})$ /9/

$$\mathrm{rot}\,\bar{M}(\bar{r}) = \bar{\rho}(\bar{r}). \qquad /1.5/$$

Эквивалентная токам намагниченность $\bar{M}(\bar{r})$ определяется, вообще говоря, неоднозначно. Однако в данной работе мы будем рассматривать только плоские токи

$$\bar{\rho}(\bar{r}) = \bar{i}\cdot\rho_x+\bar{j}\cdot\rho_y+\bar{k}\cdot\rho_z \equiv \bar{i}\cdot\rho_x+\bar{j}\cdot\rho_y, \quad \rho_z \equiv 0, \qquad /1.6/$$

для которых произвол в определении $\bar{M}$ легко исключить, полагая

$$\bar{M}(\bar{r}) = M_z\cdot\bar{k} = M(\bar{r})\cdot\bar{k} \qquad /1.8/$$

$$M_x = M_y = 0$$

и, требуя обращения $M/x, y, z/$ в нуль на бесконечности $x\to\infty$, $y\to\infty$, $z\to\infty$, если токи на бесконечности исчезают.

Решение уравнений /1.1/ и /1.2/ можно выбрать в виде

$$\bar{H} = 4\pi\bar{M} + \bar{h}, \qquad /1.9/$$

где вектор поля $\bar{h}$ определяется уравнениями

$$\mathrm{rot}\,\bar{h} = 0, \qquad /1.10/$$

$$\operatorname{div}\bar{h} = 4\pi\bar{M}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon(\bar{r}) + \frac{1}{\varepsilon}\bar{h}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon(\bar{r}) - 4\pi\operatorname{div}\bar{M}(\bar{r}). \qquad /1.12/$$

Если мы интересуемся решениями $\bar{h}$, исчезающими на бесконечности, то

$$\bar{h}(\bar{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\bar{r}) \qquad /1.13/$$

$$\varphi(\bar{r}) = \int\frac{d\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\left[\frac{\bar{M}(\bar{r}')\cdot\operatorname{grad}\varepsilon(\bar{r}')}{\varepsilon(\bar{r}')} + \frac{\bar{h}(\bar{r}')\cdot\operatorname{grad}\varepsilon(\bar{r}')}{4\pi\varepsilon(\bar{r}')} - \operatorname{div}\bar{M}(\bar{r}')\right], \qquad /1.14/$$

где интегрирование производится по всему объему.

Если среда состоит из отдельных однородных кусков магнетика, причем токи $\bar{\rho}$ /и намагниченности M / исчезают на поверхностях раздела, то

$$\varphi(\bar{r}) = -\int\frac{\operatorname{div}\bar{M}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}d\bar{r}' + \sum_s\frac{\alpha_s}{2\pi}\int\frac{h_n(\bar{r}_s')}{|\bar{r}-\bar{r}_s'|}\,dS', \qquad /1.15/$$

где $\alpha_s = \frac{\Delta\varepsilon_s}{2\varepsilon_s}$; $\Delta\varepsilon_s$ -скачок $\varepsilon(\bar{r})$ на границе раздела; ε_s -среднее значение $\varepsilon(\bar{r})$ на границе,равное полусумме значений $\varepsilon(\bar{r})$ по обеим сторонам границы; $h_n(\bar{r})$ -нормальная составляющая $\bar{h}(\bar{r})$ к границе раздела; суммирование $\sum_s$ производится по всем гладким частям поверхности раздела, dS -элемент этой поверхности /сравните с уравнением /30,13/ работы[10]/.

Для дальнейших вычислений удобно представить потенциал $\varphi(\bar{r})$ в виде интеграла

$$\varphi(\bar{r}) = -\int G(x,y,z|\xi,\eta,\zeta)\operatorname{div}\bar{M}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad /1.16/$$

где $G(x,y,z|\xi,\eta,\zeta)$ -функция Грина оператора Лапласа для области, ограниченной поверхностями раздела магнетиков, определяется уравнением

$$G(x,y,z|\xi,\eta,\zeta) = G_0(x,y,z|\xi,\eta,\zeta) - \sum_s\frac{\alpha_s}{2\pi}\int G_0(x,y,z|x_s,y_s,z_s)\frac{\partial G(x_s,y_s,z_s|\xi,\eta,\zeta)}{\partial n_s}dS \qquad /1.17/$$

$$G_0(x,y,z|\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\ . \qquad /1.18/$$

Определение $G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)$ из /1.17/ эквивалентно решению "ключевой" задачи [/10/].

Мы будем рассматривать многослойный магнетик, границы раздела которого параллельны плоскости $z = 0$. В этом случае нормаль к границе совпадает с осью z и $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial z}$. Кроме того $div\bar{M} = \frac{\partial M(x,y,z)}{\partial z}$.

Сформулируем теперь нашу задачу. Допустим, что слой токов, параллельных плоскости $z = 0$ и расположенных в области $b \geqslant z \geqslant a > 0$, создает в плоскости $z = 0$ компоненту магнитного поля, направленную по оси z и равную $H(x,y)$. Следует найти плотность токов в слое $b \geqslant z \geqslant a$, если она не зависит от z внутри слоя.

Поскольку в плоскости $z = 0$ токи /и намагниченность M / отсутствуют, то в этой плоскости поля $\bar{h}$ и $\bar{H}$ совпадают. Поэтому можно считать заданной z-компоненту h_z при $z = 0$.

Из однородности плотности тока по z следует однородность намагниченности M по z .

$$M(x,y,z) = M(x,y) \quad , \quad a \leq z \leq b . \qquad /1.19/$$

То обстоятельство, что M зависит от параметров a и b , мы будем явно отмечать. Тогда

$$\frac{\partial M(x,y,z,a,b)}{\partial z} = M(x,y,a,b)\left[\delta(z-a) - \delta(z-b)\right], \qquad /1.20/$$

где $\delta(z)$ - дельта-функция.

Из-за однородности среды по x и y функция Грина $G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)$ зависит только от разностей $x-\xi$, $y-\eta$.

Воспользовавшись этим свойством $G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)$, можно сделать преобразование Фурье для уравнения /1.17/ и для z-составляющей поля $\bar{h}$ в плоскости $z = 0$

$$h(x,y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, M(\xi,\eta,a,b)\left[\frac{\partial G(x,y,z/\xi,\eta,\zeta)}{\partial z} - \frac{\partial G(x,y,z/\xi,\eta,b)}{\partial z}\right]_{z=0} . \qquad /1.21/$$

Преобразованные величины связаны уравнениями

$$h(p,q)=2\pi\left[\frac{\partial G(p,q,z/a)}{\partial z}-\frac{\partial G(p,q,z/b)}{\partial z}\right]_{z=0}\cdot M(p,q,a,b) \qquad /1.22/$$

$$G(p,q,z/\zeta)=G_0(p,q,z/\zeta)-\sum_s \alpha_s G_0(p,q,z/z_s)\,\frac{\partial G(p,q,z_s/\zeta)}{\partial z_s}, \qquad /1.23/$$

где

$$h(p,q)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,h(x,y)\,e^{-ipx-iqy} \qquad /1.24/$$

и т.д. Введем обозначения

$$\sigma(p,q,z/\zeta)=\frac{\partial G(p,q,z/\zeta)}{\partial z}$$

$$\sigma_0(p,q,z/\zeta)=\frac{\partial G_0(p,q,z/\zeta)}{\partial z}$$

$$\sigma^{(s)}=\sigma(p,q,z_s/\zeta) \qquad /1.25/$$

$$\sigma_0^{(s)}=\sigma_0(p,q,z_s/\zeta)$$

$$\sigma_{ss'}=\sigma_0(p,q,z_s/z_{s'}), \quad s,s'=1,2,3,\ldots,n,$$

причем $\sigma_{ss}=0$.

Тогда

$$M(p,q,a,b)=\frac{h(p,q)}{2\pi\left[\sigma(p,q,0/a)-\sigma(p,q,0/b)\right]} \qquad /1.26/$$

$$\sigma(p,q,z/\zeta)=\sigma_0(p,q,z/\zeta)-\sum_s \alpha_s\sigma_0(p,q,z/z_s)\sigma^{(s)}. \qquad /1.27/$$

n величин $\sigma^{(s)}$ /при наличии n гладких частей поверхностей разрыва/ определяются системой из n линейных алгебраических уравнений.

/1.28/

$$\sigma^{(s)} + \sum_{s'} \alpha_{s'} \sigma_{ss'} \sigma^{(s')} = \sigma_0^{(s)} . \qquad /1.28/$$

Уравнения /1.26/, /1.27/ и /1.28/ в принципе решают поставленную задачу, если от Фурье- образа $M(p,q,a,b)$ перейти к координатному представлению путем обратного преобразования Фурье

$$M(x,y,a,b) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dp\, dq\, M(p,q,a,b)\, e^{ipx+iqy} . \qquad /1.29/$$

Перейдем теперь к рассмотрению частных задач.

2. Формирование поля в однородном магнетике

В однородном магнетике нет скачков магнитной проницаемости и α_s =0. Поэтому

$$\sigma(p,q,z|\zeta) = \sigma_0 (p,q,z|\zeta) = \epsilon(\zeta - z)\, e^{-\lambda|\zeta - z|} , \qquad /2.1/$$

где $\epsilon(z)$ -знаковая функция

$$\epsilon(z) = \begin{cases} 1 , & z > 0 \\ -1 , & z < 0 . \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sigma(p,q,0|\zeta) = e^{-\lambda\zeta} \quad \text{при} \quad \zeta > 0,\ \lambda^2 = p^2 + q^2 \qquad /2.2/$$

и величина $M(p,q,a,b)$ оказывается равной

$$M(p,q,a,b) = M_0 (p,q,a,\Delta) = \frac{h(p,q)\, e^{\lambda a}}{2\pi(1 - e^{\lambda\Delta})} , \qquad /2.3/$$

где параметр $\Delta = b - a$ - толщина слоя тока - введен вместо параметра b . Индекс "0" в обозначении Mo введен для выделения того обстоятельства, что Mo - это плотность намагничивания, необходимая для формирования заданного поля <u>в однородном магнетике</u> /в вакууме, например/, т.е. решение основной задачи.

При вычислении намагниченности в координатном представлении полезно различать два предельных случая:

1. Толщина слоя тока Δ мала, так что $\lambda \cdot \Delta \ll 1$ в области λ, где величина $h(p,q)e^{\lambda a}$ заметно отлична от нуля. В этом случае величину $\lambda\Delta/(1-e^{-\lambda\Delta})$ можно разложить в ряд по степеням $\lambda\Delta$. Тогда

$$M_o(p,q,a,\Delta)\cdot\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Delta^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \mathcal{M}_o(p,q,a), \qquad /2.4/$$

где

$$\mathcal{M}_o(p,q,a) = \left[M_o(p,q,a,\Delta)\cdot\Delta\right]_{\Delta=0} = \frac{h(p,q)e^{\lambda a}}{2\pi\lambda} \qquad /2.5/$$

и первые четыре коэффициента C_n равны

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= 1/2 \\ C_2 &= 1/12 \\ C_3 &= 0 \ . \end{aligned} \qquad /2.6/$$

В координатном представлении получим

$$M_o(x,y,a,\Delta)\cdot\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Delta^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \mathcal{M}_o(x,y,a). \qquad /2.7/$$

Свойства функции

$$\mathcal{M}_o(x,y,a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dp\,dq\ \frac{h(p,q)e^{\lambda a}}{\lambda}\, e^{ipx+iqy} \qquad /2.8/$$

изучались в работе /11/.

2. Толщина слоя тока Δ велика, так что $\lambda\Delta \gg 1$ в области λ, где $h(p,q)e^{\lambda a} \neq 0$. В этом случае $e^{-\lambda a} \ll 1$ и величину

$$\frac{1}{1-e^{-\lambda\Delta}}$$

можно разложить в ряд по степеням $e^{-\lambda\Delta}$, т.е. представить $M_o(p,q,a,\Delta)$ в виде ряда

$$M_0(p,q,a,\Delta)=\frac{h(p,q)}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\lambda\Delta+\lambda a}=\sum_{n=0}^{\infty}M_0(p,q,a-n\Delta,\infty), \qquad /2.9/$$

где $M_0(p,q,a_n,\infty)$ – намагниченность, создающая заданное поле при $\Delta=\infty$ /бесконечно высокая катушка с током/. В координатном пространстве имеем

$$M_0(x,y,a,\Delta)=\sum_{n=0}^{\infty}M_0(x,y,a-n\Delta,\infty). \qquad /2.10/$$

3. Формирование поля при наличии одной границы раздела

Если имеется одна граница раздела $z=z_1>b$, причем $\mu=\mu_0$, если $z<z_1$ и $\mu=\mu$, если $z>z_1$, то уравнение /1.27/ эквивалентно уравнению

$$G(p,q,z|\zeta)=G_0(p,q,z|\zeta)+\alpha G_0(p,q,z|z_1)G(p,q,z_1|\zeta), \qquad /3.1/$$

где
$$\alpha=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}.$$

Так как $G_{11}=G_0(p,q,z_1|z_1)=0$, то имеем
$$G(p,q,z_1|\zeta)=G_0(p,q,z_1|\zeta).$$
Следовательно,

$$G(p,q,z|\zeta)=G_0(p,q,z|\zeta)+\alpha G_0(p,q,z|z_1)G_0(p,q,z_1|\zeta). \qquad /3.2/$$

Эквивалентная токам намагниченность $M(p,q,a,\Delta,d)$ оказывается равной

$$M(p,q,a,\Delta,d)=\frac{M_0(p,q,a,\Delta)}{1+\alpha e^{-2\lambda d}}, \qquad /3.3/$$

где $M_0(p,q,a,\Delta)$ определено в предыдущем параграфе, а $d=z_1-\frac{a+b}{2}$ является средним расстоянием тока до границы.

Величину

$$k(\lambda d) = 1 + \alpha e^{-2\lambda d} \qquad /3.4/$$

назовем эффективностью тока около границы. Эффективность тока около границы показывает во сколько раз магнитное действие тока около границы эффективнее действия тока в однородном магнетике. Эффективность тока является функцией λ, т.е. зависит от формы тока. Эффективность тока полностью определена, если ток распределен в виде плоской волны, либо является набором /пакетом/ плоских волн, волновые числа p, q которых связаны соотношением

$$p^2 + q^2 = \lambda^2 = const .$$

Если распределение тока имеет вид волнового пакета с волновыми числами λ, лежащими в достаточно малой окрестности некоторого среднего значения λ_{cp}, то имеет смысл понятие средней эффективности тока. Если же спектр λ широкий, то можно различать два предельных случая, аналогичных двум предельным случаям предыдущего параграфа:

1. Токи лежат вблизи поверхности, т.е. $\lambda d \ll 1$.

В этом случае

$$M(x,y,a,\Delta,d) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-2d)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} M_0(x,y,a,\Delta), \qquad /3.5/$$

где первые коэффициенты A_n равны

$$A_0 = 1/(1+\alpha)$$

$$A_1 = -\alpha/(1+\alpha)^2 \qquad /3.6/$$

$$A_2 = \alpha(\alpha-1)/(1+\alpha)^3$$

$$A_3 = \alpha(4\alpha - \alpha^2 - 1)/(1+\alpha)^4 .$$

2. Токи лежат далеко от поверхности раздела, т.е. $\lambda d \gg 1$. В этом случае

$$M(x,y,a,\Delta,d) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n M_0(x,y,a-2nd,\Delta). \qquad /3.7/$$

4. Ток в плоском зазоре

Пусть имеется три среды, разделенных плоскостями $z = z_1 < 0$ и $z = z_2 > b$, причем

$$\begin{array}{lll} \mu = \mu & \text{при} & z < z_1 \\ \mu = \mu_0 & \text{при} & z_1 < z < z_2 \\ \mu = \mu & \text{при} & z > z_2 . \end{array}$$

В этом случае

$$\sigma(p,q,z|\zeta) = \sigma_0(p,q,z|\zeta) - \alpha\sigma_0(p,q,z|z_1)\sigma(p,q,z_1|\zeta) + \alpha\sigma_0(p,q,z|z_2)\sigma(p,q,z_2|\zeta). \qquad /4.1/$$

Для определения величин

$$\sigma_1 = \sigma(p,q,z_1|\zeta)$$
$$\sigma_2 = \sigma(p,q,z_2|\zeta)$$

имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sigma_1 - \alpha\sigma_0(p,q,z_1|z_2) = \sigma_0(p,q,z_1|\zeta) \\ &\alpha\sigma_0(p,q,z_2|z_1)\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0(p,q,z_2|\zeta), \end{aligned} \qquad /4.2/$$

решая которую получим

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0(p,q,z_1|\zeta) + \alpha\sigma_0(p,q,z_1|z_2)\sigma_0(p,q,z_2|\zeta)}{1 + \alpha^2\sigma_0(p,q,z_1|z_2)\sigma_0(p,q,z_2|z_1)} \qquad /4.3/$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0(p,q,z_2|\zeta) - \alpha\sigma_0(p,q,z_2|z_1)\sigma(p,q,z_1|\zeta)}{1 + \alpha^2\sigma_0(p,q,z_1|z_2)\sigma_0(p,q,z_2|z_1)} .$$

В симметричном случае, когда $|z_1| = z_2 = z_0$, для $\sigma(p,q,0|\zeta)$ получается выражение

$$\sigma(p,q,0|\zeta) = \frac{e^{-\lambda\zeta}\left(1 - \alpha e^{-2\lambda(z_0-\zeta)}\right)}{1 - \alpha e^{-2\lambda z_0}} , \qquad /4.4/$$

а намагниченность M оказывается равной

$$M(p,q,a,\Delta,d,z_0) = \frac{M_0(p,q,a,\Delta)\left(1 - \alpha e^{-2\lambda z_0}\right)}{1 + \alpha e^{-2\lambda d}} . \qquad /4.5/$$

Величину $$k(\lambda d, \lambda z_0) = \frac{1+\alpha e^{-2\lambda d}}{1-\alpha e^{-2\lambda z_0}}$$
назовем эффективностью тока в зазоре. Как и эффективность тока около границы, эффективность тока в зазоре полностью определена для распределения тока в виде плоской волны или узкого волнового пакета.

Введение поправок на конечную величину d мы рассмотрели в предыдущем параграфе. Поэтому рассмотрим сейчас практически интересный случай малого d. В этом пределе получим

$$M(x,y,a,\Delta,0,z_0) = \frac{M_0(x,y,a,\Delta) - \alpha M_0(x,y,a-2z_0,\Delta)}{1+\alpha}. \qquad /4.6/$$

При учете следующих приближений по d возникает ряд

$$M(x,y,a,\Delta,d,z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-2d)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} M_0(x,y,a,\Delta,0,z_0). \qquad /4.7/$$

Если пользоваться терминологией метода изображений [10], то выражение /4.6/ эквивалентно учету всех изображений тока. Величина тока, создающего заданное поле, уменьшается за счет дополнительного магнитного действия границ /или изображений тока/ по сравнению с током в вакууме /в однородной среде/. Это соответствует появлению вычитаемого в числителе /4.6/ и возникновению знаменателя, большего единицы при $\alpha > 0$.

5. Ток над плоским слоем магнетика. Экранирование

Пусть, как и в предыдущем случае, имеется две границы раздела, но обе плоскости раздела $z = z_1$ и $z = z_2$ находятся ниже тока, т.е.

$$0 < z_1 < z_2 < a. \qquad /5.1/$$

В этом случае уравнение, определяющее $\sigma(p,q,z|\zeta)$, принимает вид

$$\sigma(p,q,z|\zeta) = \sigma_0(p,q,z|\zeta) + \alpha\sigma_0(p,q,z|z_1)\sigma(p,q,z_1|\zeta) - \alpha\sigma_0(p,q,z|z_2)\sigma(p,q,z_2|\zeta). \qquad /5.2/$$

Принимая во внимание неравенство /5.1/ и выполнив ряд простых преобразований, получим

$$\sigma(p,q,0|\zeta) = \frac{e^{-\lambda\zeta}(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2 e^{-2\lambda\delta}}, \qquad /5.3/$$

где $\delta = z_2 - z_1$ – толщина экранирующего слоя. Окончательное выражение намагниченности оказывается равным

$$M(p,q,a,\Delta,\delta) = \frac{h(p,q)\,e^{\lambda a}}{2\pi(1-e^{-\lambda\Delta})} \cdot \frac{1-\alpha^2 e^{-2\lambda\delta}}{1-\alpha^2} . \qquad /5.4/$$

Величину

$$k(\lambda\delta) = \frac{1-\alpha^2 e^{-2\lambda\delta}}{1-\alpha^2} \qquad /5.5/$$

можно назвать коэффициентом экранирования. Он указывает во сколько раз магнитное действие тока ослабляется плоским железным экраном толщиной δ. Можно различать два предельных случая экранирования:

1. Толщина экрана δ мала, так что $\lambda\delta \ll 1$. В этом случае коэффициент экранирования близок к единице.

2. Толщина экрана δ велика, так что $\lambda\delta \gg 1$.

В этом случае коэффициент экранирования близок к величине

$$k \approx \frac{1}{1-\alpha^2} = \frac{(\mu+\mu_0)^2}{4\mu\mu_0} . \qquad /5.6/$$

Если к тому же $\mu \gg \mu_0$, то

$$k \approx \frac{\mu}{4\mu_0} . \qquad /5.7/$$

В общем случае, если известно аналитическое выражение $M_0(x,y,a,\Delta)$ без учета экранирования /K = 1/, то намагниченность $M(x,y,a,\Delta,\delta)$ с учетом экранирования равна

$$M(x,y,a,\Delta,\delta) = \frac{1}{1-\alpha^2}\left[M_0(x,y,a,\Delta) - \alpha^2 M_0(x,y,a-2\delta,\Delta)\right] . \qquad /5.8/$$

6. Выводы

Нами решалась задача формирования магнитного поля плоским током в многослойном магнетике в случае отсутствия границы раздела и при наличии одной или двух границ. Задачи с большим числом плоских границ не содержат ничего принципиально нового и могут быть решены по аналогии с предыдущими случаями.

В полученных нами результатах важную роль играет значение намагниченности $M_0(x,y,a,\Delta)$, формирующей заданное поле в однородном магнетике. Если величина $M_0(x,y,a,\Delta)$ известна в виде аналитического выражения, то точные выражения эквивалентной намагниченности с учетом влияния границ получены, по крайней мере, для бесконечно тонких $/\Delta \to 0/$ слоев тока, лежащих сколь угодно близко $/d \to 0/$ к границе раздела / выражения /4.6/, /5.8//. Выражение /3.5/ является в этом смысле тривиальным, поскольку оно эквивалентно известному правилу изображения тока в плоской границе. Учет поправок на толщину Δ слоя тока и конечность расстояния d тока от границы в случае малости этих величин производился методом последовательных приближений, если обратное преобразование Фурье для точных выражений M является трудной задачей /формулы /4.7/, /3.5/ и /3.7//.

Следует отметить следующее обстоятельство. При обычном расчете тока, формирующего заданное поле, для учета влияния границ пользуются правилом изображений тока. Это приводит к необходимости суммировать медленно сходящиеся ряды, члены которых описывают поля тока и его изображений. В предлагаемом нами методе эта трудность не существует, по крайней мере, для тонких слоев тока вблизи границ раздела. Действительно, если известна форма тока, создающего заданное поле в однородном магнетике, как функция расстояния a до средней плоскости $z=0$, то учет влияния границ сводится к суммированию двух известных функций /выражения /4.6/ и /5.8//. Поэтому можно ожидать, что использование предлагаемого нами метода в области его применимости значительно облегчит расчеты тока при формировании поля.

Литература

1. J.P. Blewett et al. Pole-Face Windings. Part I - Design, Rev. Sci. Instr. 24, 9, 773 1953.
2. R.S. Livingstone et al. The Oak Ridge Relativistic Isochronous Cyclotron I, II, III;Nucl. Instr.6,1,1960; 6,321,1960; 6,234,1960; см.также русский перевод:Окриджский релятивистский изохронный циклотрон, ГУАЭ,1960.
3. J.J. Burgerjon, W. Weidemann. The Pretoria Cyclotron II, Nucl. Instr. 8, 261 1960.
4. J.S. Allen et al. Variable Energy Spiral Ridge Cyclotron. Rev. Sci. Instr. 31,8,813, 1960.
5. E. Schwarz. Nomorgramme zur Ermittlung der Magnetische Feld..., Deutsche Elektrotechnik, 3,83, 1954.

6. H.G. Blosser, R.E. Worsham. Four-Sector Asimuthally Varying Field Cyclotron. Rev. Sci. Instr. 29, 10, 819. 1958.

7. В.И. Данилов, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркясян. Формирование аксиально-симметричных магнитных полей ОИЯИ ЛЯП , Р-344, Дубна / 1959/.

8. Sector-Focused Cyclotrons, Proceedings of an Informal Conference. Sea Island, Georgia, February 2–4, 1959. Nuclear Science Series. Report Number 26. Nat. Acad. Sci.-Nat. R.C. Washington, D.C, 1959.

9. И.Е. Тамм. Основы теории электричества, издание пятое ГИИТЛ, М, 1954.

10. Г.А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений . АН СССР, М-Л, 1948.

11. Г.Н. Вялов. Об одном методе расчета формы магнита по заданному полю, ОИЯИ ЛЯР, 708, Дубна /1961/.

Работа поступила в издательский отдел
28 апреля 1961 года.