



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Х. Кекк

713

К РАСЧЕТУ
МАГНИТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

Дубна 1961 год

Х. Кекк

713

К РАСЧЕТУ
МАГНИТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

1024/7 5р.

Объединенный институт
высших исследований
БИБЛИОТЕКА

В данной работе развит матричный метод расчета спектрометров заряженных частиц. Используя матрицы с тремя столбцами, можно учесть влияние малого разброса импульсов. Метод позволяет вычислять расстояние до изображения, увеличение, дисперсию и разрешение спектрометров, состоящих из нескольких магнитов, без расчета действия каждого из оптических элементов системы в отдельности. Из полученных уравнений можно вывести известные соотношения для промежуточных изображений, а также все другие свойства отдельных магнитов.

Используя метод, изложенный в данной работе, можно также получить свойства спектрометров с электрическим полем.

Уравнение движения частицы с массой m и скоростью v в магнитном поле $\vec{y} \perp \omega$ в цилиндрических координатах R, y, φ в меридианной плоскости $y = 0$ можно написать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dR}{dt} \right) - m R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{Ze v}{c} H, \quad (1)$$

где Ze - заряд частицы и c - скорость света. Учитывая, что

$$v^2 = R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \text{const}$$

при $\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \ll R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$ и $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \ll R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$, имеем $\frac{dm}{dt} = 0$ и $dt = \frac{R}{v} d\varphi$, и (1) принимает известную форму

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} - R = \frac{Ze R^2}{m v c} H. \quad (1a)$$

Пусть около окружности $R = R_1$

$$R = R_1 (1 + f) \quad f \ll 1, \quad (2)$$

а магнитное поле

$$H(R) = H_1 (1 - n f), \quad (3)$$

где

$$H_1 = H(R_1).$$

Тогда имеем $\left(f'' = \frac{d^2 f}{dt^2} \right)$

$$f'' - 1 - f = \frac{Ze H_1 R_1}{m v c} (1 + f)^2 (1 - n f). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь частицы с импульсом

$$m v = m v_0 (1 + \delta) \quad \delta \ll 1. \quad (5)$$

Для них имеем

$$f'' - 1 - f = \frac{Ze H_1 R_1}{m v_0 c} (1 + f)^2 (1 - n f) (1 - \delta). \quad (6)$$

С учетом

$$\frac{\sum e R_1 H_1}{m c v_0} = -1, \quad (7)$$

получим

$$\xi'' + \xi = \delta + \xi [n + \delta(2-n)] + O[\xi^2] \dots, \quad (8)$$

Учитывая только линейные члены, имеем отсюда в первом приближении

$$\xi'' + \xi(1-n) - \delta = 0. \quad (9)$$

Решение этого уравнения есть:

$$\xi = \left(\xi_0 - \frac{\delta}{1-n}\right) \cos \sqrt{1-n} \varphi + \xi'_0 \frac{1}{\sqrt{1-n}} \sin \sqrt{1-n} \varphi + \frac{\delta}{1-n}, \quad (10)$$

где $\xi_0 = \xi(0)$ и $\xi'_0 = \xi'(0)$.

Для $\xi_0 = \xi'_0 = \delta = 0$ имеем в качестве траектории равновесную орбиту $R = R_2$.

Если обозначить $\omega = \sqrt{1-n}$, то (10) можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega \varphi & \frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi & \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega \varphi) \\ -\omega \sin \omega \varphi & \cos \omega \varphi & \frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi'_0 \\ \delta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Начальные условия ξ_0 и ξ'_0 определяются геометрией. Для определения ξ_0 и ξ'_0 рассмотрим траектории на входной границе магнитного поля.

Очевидно, что в первом приближении ($x' \ll 1$)

$$\xi_0 = \frac{1}{R_2} (x_0 + x'_0 l'), \quad (12)$$

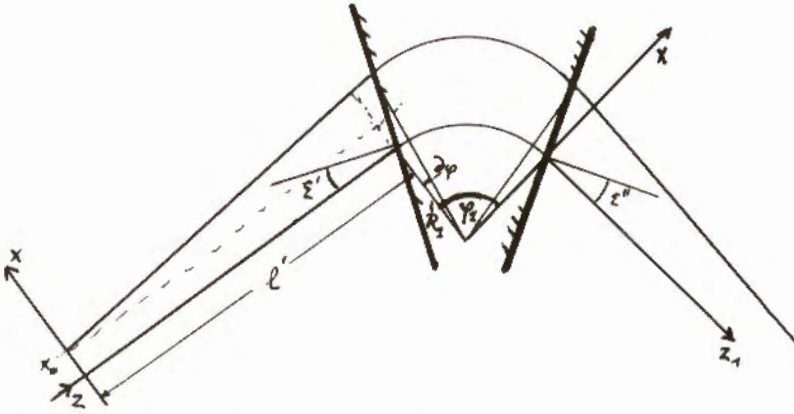
где x_0 и x'_0 - начальные условия в точке объекта и $x' = \frac{dx}{dz}$ (см. рис.).

Для ξ'_0 имеем

$$\xi'_0 = \tan(\arctan x'_0 + \partial \varphi) = x'_0 + \partial \varphi. \quad (13)$$

Далее

$$\partial \varphi = \xi_0 \cdot \tan \varepsilon'. \quad (14)$$



Учитывая (12) для f_0 , получим

$$f_0' = x_0' + \frac{x_0 + x_0 l' \operatorname{tg} \varepsilon'}{R_2} \quad (15)$$

и для начальных условий получаем выражения

$$\begin{vmatrix} f_0 \\ f_0' \\ \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/R_2 & l'/R_2 & 0 \\ \operatorname{tg} \varepsilon'/R_2 & 1 + \frac{l'}{R_2} \operatorname{tg} \varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{vmatrix} \quad (16)$$

Таким образом мы получаем на выходе из магнитного поля (φ_2 есть угол отклонения частицы с $f_0 = f_0' = \delta = 0$)

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) \quad (17)$$

$$f'(\varphi) = f'(\varphi_0) + f(\varphi_0) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'',$$

где ε'' угол среза на выходе (ε' при входе). Переходя к координатам z_1 и x в направлении движения и перпендикулярном к нему после магнита, получим

$$\begin{aligned}
 x(z_1) &= R_1 \cdot \xi(\varphi) + z_1 \cdot \xi'(\varphi) = (R_1 + z_1 \operatorname{tg} \varepsilon') \cdot \xi(\varphi_1) + z_1 \cdot \xi'(\varphi_1) \\
 x'(z_1) &= \xi'(\varphi) = \xi'(\varphi_1) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' + \xi''(\varphi_1),
 \end{aligned} \tag{18}$$

а, следовательно,

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 + z_1 \operatorname{tg} \varepsilon'' & z_1 & 0 \\ \operatorname{tg} \varepsilon'' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi(\varphi_1) \\ \xi'(\varphi_1) \\ \delta \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Учитывая ур. (11), (16) и (19), наконец, получаем

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \delta \end{vmatrix}, \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \left[1 + \frac{z_1}{R_1} (\operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon'') \right] \cos \omega_1 \varphi_1 + \left[\operatorname{tg} \varepsilon' + \frac{z_1}{R_1} (\operatorname{tg} \varepsilon' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' - \omega_1^2) \right] \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1 \\
 M_{12} &= \left[l'_1 + z_1 \left(1 + \frac{l'_1}{R_1} (\operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon'') \right) \right] \cos \omega_1 \varphi_1 + \left[R_1 + l'_1 \operatorname{tg} \varepsilon' + z_1 (\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{l'_1}{R_1} (\operatorname{tg} \varepsilon' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' - \omega_1^2)) \right] \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1 \\
 M_{13} &= \frac{R_1 + z_1 \operatorname{tg} \varepsilon''}{\omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 \varphi_1] + \frac{z_1}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1 \\
 M_{21} &= \frac{1}{R_2} [\operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon''] \cos \omega_1 \varphi_1 + \frac{1}{R_2} [\operatorname{tg} \varepsilon' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' - \omega_1^2] \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1 \\
 M_{22} &= \left[1 + \frac{l'_2}{R_2} (\operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon'') \right] \cos \omega_1 \varphi_1 + \left[\operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{l'_2}{R_2} (\operatorname{tg} \varepsilon' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' - \omega_1^2) \right] \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1 \\
 M_{23} &= \frac{\operatorname{tg} \varepsilon''}{\omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 \varphi_1] + \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь индексом "1" обозначены параметры первого магнита. Верхняя строка этой матрицы соответствует выражению, данному Саталом^{1/1/}. Для системы из двух магнитов, при расстоянии d между магнитами, получим

$$\begin{vmatrix} x(z_2) \\ x'(z_2) \\ \delta \end{vmatrix} = |N| \cdot |M| \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \delta \end{vmatrix}, \quad (22)$$

где N_{ik} непосредственно получаются из M_{ik} , если всюду вместо R_1, z_1, l'_1, \dots подставить R_2, z_2, l'_2, \dots . Для l'_2 имеем при любом z_1 $l'_2 = d - z_1$ или просто $z_1 = d, l'_2 = 0$.

Изображение объекта получается, как обычно, в том случае, когда x не зависит от x'_0 . Следовательно, для получения изображения должно быть выполнено условие

$$(NM)_{12} = N_{11}M_{12} + N_{12}M_{21} = 0, \quad (23)$$

из которого может быть определено расстояние $z_2 = l''$ от выхода второго магнита до изображения.

Увеличение $\chi_{1,2}$ системы определяется

$$\chi_{1,2} = \frac{\partial x}{\partial x_0} \Big|_{z_2=l''} = (NM)_{11} \Big|_{l''} = (N_{11}M_{11} + N_{12}M_{21}) \Big|_{l''}, \quad (24)$$

а дисперсия $D_{1,2}$

$$D_{1,2} = \frac{\partial x}{\partial \delta} \Big|_{z_2=l''} = (NM)_{13} \Big|_{l''} = (N_{11}M_{13} + N_{12}M_{23} + N_{13}) \Big|_{l''}. \quad (25)$$

Для разрешения по импульсам получим из известного условия

$$\frac{p}{\Delta p} = \frac{1}{s_0} \cdot \left| \frac{D}{\chi} \right| = \frac{1}{s_0} \left| \frac{N_{11}M_{13} + N_{12}M_{23} + N_{13}}{N_{11}M_{11} + N_{12}M_{21}} \right|_{l''}, \quad (26)$$

где s_0 - ширина входной щели спектрометра. Как и следовало ожидать, в случае $\varphi_2 = 0$ получаем $|N| = \begin{vmatrix} 1 & d+l'' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, т.е. действие одного первого магнита.

Легко видеть, что дополнительное требование $M_{12} = 0$ в уравнении (23) означает, что граница между оптическими элементами, которым соответствуют матрицы M и N , совпадает с местом изображения первого магнита. Учитывая, что $(NM)_{12} = 0$, в этом случае имеем также $N_{12} = 0$.

При этом получаем

$$\chi_{11} = N_{11}(l_2'') \cdot M_{11}(l_1'') = \chi_1 \cdot \chi_2 \quad (27)$$

и

$$D_{12} = N_{11}(l_2'') \cdot M_{12}(l_1'') + N_{12}(l_2'') = D_1 \chi_2 + D_2. \quad (28)$$

Это известные соотношения $\text{Сатас}'а^{1/2/}$ для обычного метода расчета. Наши уравнения (23) ... (26) позволяют сразу рассчитать свойства спектрометра без расчета свойств (т.е. расстояние до изображения, дисперсия и увеличение) отдельных магнитов. Таким образом, например, для перпендикулярного входа и выхода ($\varepsilon_1' = \varepsilon_1'' = \varepsilon_2' = \varepsilon_2'' = 0$) имеем

$$D_{12} = \cos \omega_2 \varphi_2 \left[\frac{R_1}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 \varphi_1) + \frac{d+l''}{\omega_1} \sin \omega_1 \varphi_1 \right] + \frac{R_2}{\omega_2^2} \left[1 - \cos \omega_2 \varphi_2 \right] - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \varphi_2 \left[\frac{R_1}{R_2} l'' \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 (1 - \cos \omega_1 \varphi_1) - \left(R_2 - \frac{l'' d}{R_1} \omega_2^2 \right) \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_1 \varphi_1 - l'' \right],$$

$$\chi_{12} = \cos \omega_2 \varphi_2 \left[\cos \omega_1 \varphi_1 - \frac{l''+d}{R_1} \omega_1 \sin \omega_1 \varphi_1 \right] - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \varphi_2 \left[\frac{l''}{R_2} \omega_2^2 \cos \omega_1 \varphi_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} - \omega_2^2 \frac{l'' d}{R_1 R_2} \right) \omega_1 \sin \omega_1 \varphi_1 \right],$$

где

$$l'' = \frac{\frac{R_2}{R_1} \frac{\omega_1}{\omega_2} l_1' \cdot \text{tg} \omega_1 \varphi_1 \cdot \text{tg} \omega_2 \varphi_2 + \left(\frac{d l_1'}{R_1} \omega_1^2 - R_1 \right) \frac{1}{\omega_1} \text{tg} \omega_1 \varphi_1 - \frac{R_2}{\omega_2} \text{tg} \omega_2 \varphi_2 - (l_1' + d)}{\frac{1}{R_2} \left[\frac{d l_1'}{R_1} \omega_1^2 - R_1 \right] \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{tg} \omega_1 \varphi_1 \cdot \text{tg} \omega_2 \varphi_2 - \frac{l_1'}{R_1} \omega_1 \text{tg} \omega_1 \varphi_1 - \frac{l_1' + d}{R_2} \omega_2 \text{tg} \omega_2 \varphi_2 + 1}$$

Конечно, из уравнения (20) следуют формулы для свойств секторного магнитного спектрометра [3], т.е.

$$D = \frac{R}{\omega^2} \left[(1 - \cos \omega \varphi) \left(1 + \frac{\ell''}{R} \operatorname{tg} \varepsilon' \right) + \frac{\ell''}{R} \omega \sin \omega \varphi \right]$$

$$\chi = - \frac{\ell''}{\ell'} \left[\cos \omega \varphi + \left(\frac{R}{\ell'} + \operatorname{tg} \varepsilon' \right) \frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi \right]^{-1}$$

$$\ell'' = R \frac{1 + \left(\frac{R}{\ell'} + \operatorname{tg} \varepsilon' \right) \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \omega \varphi}{\omega \operatorname{tg} \omega \varphi - \left(\frac{R}{\ell'} + \operatorname{tg} \varepsilon' \right) + \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[1 + \left(\frac{R}{\ell'} + \operatorname{tg} \varepsilon' \right) \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \omega \varphi \right]}$$

и для однородного магнитного поля получаются известные результаты Herzog'a /4/. Можно заметить, что для периодического расположения магнитов матрица

$$A = \begin{vmatrix} (NM)_{11} & (NM)_{12} \\ (NM)_{21} & (NM)_{22} \end{vmatrix}$$

даст преобразование от начала первого магнитного периода до начала второго магнитного периода, включая интервал без поля. Отсюда имеем критерии стабильности движения в ускорителях с жесткой фокусировкой

$$\cos \mu = \frac{1}{2} \left[(NM)_{11} + (NM)_{22} \right],$$

где μ - характеристический показатель уравнения движения. Без интервалов легко получается известное выражение ($n_1 \ll -1, n_2 \gg 1$)

$$\cos \mu = \cos \frac{\pi}{N'} \sqrt{n_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi}{N'} \sqrt{|n_2|} + \frac{n_1 + n_2}{2 \sqrt{|n_1 \cdot n_2|}} \sin \frac{\pi}{N'} \sqrt{n_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi}{N'} \sqrt{|n_2|},$$

где $\frac{2\pi}{N'}$ период магнитного поля.

Если учесть в уравнении (8) еще и члены, линейные относительно φ и содержащие δ , то получаем дифференциальное уравнение

$$\xi'' + \xi [1 + \delta(n-2) - n] + \delta = 0, \quad (28)$$

имеющее решение

$$\varphi = \left(\varphi_0 - \frac{\delta}{x^2}\right) \cos x\varphi + \varphi_0' \cdot \frac{1}{x} \sin x\varphi + \frac{\delta}{x^2}, \quad (30)$$

где

$$x^2 = 1 - n + \delta(n-2). \quad (31)$$

Следовательно, N_{ik} и M_{ik} зависят от δ и из (23) получаем для каждой величины δ свое расстояние до изображения, т.е. можно вычислить кривые точек изображения.

Аналогичным образом рассмотрение квадрупольной линзы дает матрицу

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \lambda L - \lambda_2 \sin \lambda L & L'(\cos \lambda L - \lambda_2 \sin \lambda L) + \frac{1}{\lambda} \sin \lambda L + z \cos \lambda L & 0 \\ -\lambda \sin \lambda L & \cos \lambda L - \lambda L' \sin \lambda L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{vmatrix}, \quad (32)$$

где L - длина полюса линзы и

$$\lambda^2 = \frac{Ze}{mv_0 c} |\text{grad } H|. \quad (33)$$

В отличие от рассмотренных секторных полей здесь дополнительного члена за счет δ нет, так что получается только известная матрица. Несмотря на это, формула в форме (32) целесообразна, если рассматривается система, составленная из магнитов и линз, как это предложено Enge^{15/}.

Указанным методом можно рассматривать движение в электрических полях. Уравнение движения в цилиндрическом конденсаторе, например, имеет вид ($v \ll c$)

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{Ze}{m} E, \quad (34)$$

где E - напряженность электрического поля.

В отличие от магнитного спектрометра здесь должно учитываться изменение кинетической энергии в поле. В нерелятивистском случае имеем

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 + \delta)^2 - Ze \int_{R_0}^R E(R') dR'. \quad (35)$$

Используя $R = R_0(1+\varphi)$ и $E(R') = E(R_0) \cdot \frac{R_0}{R'}$, получаем

$$\int_{R_0}^R E(R') dR' = \int_0^\varphi E(R_0) \cdot R_0 (1-\eta) d\eta \quad (36)$$

и, следовательно, в первом приближении

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (1+2\delta) - \tilde{z} e R_0 E(R_0) \cdot \varphi. \quad (37)$$

Учитывая

$$R_0 = \frac{m v_0^2}{\tilde{z} e E(R_0)}, \quad (38)$$

имеем

$$v^2 = v_0^2 (1+2\delta - 2\varphi). \quad (39)$$

С учетом $\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \ll 1$ опять

$$dt^2 = \frac{R^2}{v^2} d\varphi^2 = \frac{R^2}{v_0^2} d\varphi^2 (1+2\delta - 2\varphi)^{-1}, \quad (40)$$

и уравнение движения принимает форму

$$\ddot{\varphi} - 1 - \varphi = - (1+\varphi)(1-2\delta + 2\varphi), \quad (41)$$

а, следовательно, пренебрегая квадратичными членами, получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2\varphi - 2\delta = 0, \quad (42)$$

решение которого

$$\varphi = (\varphi_0 - \delta) \cos \sqrt{2}\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\varphi}_0 \sin \sqrt{2}\varphi + \delta. \quad (43)$$

Его вид в матричной форме (с учетом $\delta_1 = \delta - \varphi$, соответственно (39))

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \delta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\varphi & 1 - \cos\sqrt{2}\varphi \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi & \cos\sqrt{2}\varphi & \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi \\ -\cos\sqrt{2}\varphi & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\varphi & \cos\sqrt{2}\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_0' \\ \delta \end{vmatrix} \quad (44)$$

В случае цилиндрического конденсатора $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ упрощаются начальные условия и из-за того, что в области спада поля изменение δ компенсируется, после конденсатора получим

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\sqrt{2}\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\varphi & 1 - \cos\sqrt{2}\varphi \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi & \cos\sqrt{2}\varphi & \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/R_0 & L'/R_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{vmatrix} \quad (45a)$$

или

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{vmatrix} = |P| \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{vmatrix}, \quad (45b)$$

где

$$\begin{aligned} P_{11} &= \cos\sqrt{2}\varphi - \frac{z}{R_0}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi \\ P_{12} &= (L' + z)\cos\sqrt{2}\varphi - \left(\frac{zL'}{R_0}\sqrt{2} - \frac{R_0}{\sqrt{2}}\right)\sin\sqrt{2}\varphi \\ P_{13} &= R_0(1 - \cos\sqrt{2}\varphi) + z\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi \\ P_{21} &= -\frac{\sqrt{2}}{R_0}\sin\sqrt{2}\varphi \\ P_{22} &= \left(\frac{L'}{R_0} + 1\right)\cos\sqrt{2}\varphi \\ P_{23} &= \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\varphi \\ P_{31} &= P_{32} = 0 \\ P_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Из $P_{12} = 0$ следует

$$l'' = \frac{R_0^2}{2} + \frac{R_0 l'}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \sqrt{2} \varphi$$

$$l' - \frac{R_0}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \sqrt{2} \varphi, \quad (47)$$

увеличение оказывается

$$\chi = \cos \sqrt{2} \varphi - \frac{l''}{R_0} \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \varphi, \quad (48)$$

а дисперсия

$$D = R_0 (1 - \cos \sqrt{2} \varphi) + l'' \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \varphi. \quad (49)$$

Это известные уравнения, получаемые обычными методами с помощью громоздкого геометрического рассмотрения.

Используя матрицы с 4 столбцами, таким же образом можно учесть также влияние малых разбросов, скоростей и масс и, следовательно, можно рассмотреть свойства масс-спектрометров. Самой собой разумеется, что указанное рассмотрение можно распространить на вертикальное движение.

Автор весьма благодарен сотруднику Объединенного института ядерных исследований И.М.Матора за полезное обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

1. L.Cartan. J. Phys. Rad., 8, 453 (1937).
2. M.Camac. Rev. Sci. Instr., 22, 197 (1951).
3. R.M.Sternheimer. Rev. Sci. Instr., 23, 629 (1952). Rev. Sci. Instr., 24, 573 (1953).
4. R.Herzog. Z. Physik, 89, 447 (1934).
5. H.A.Engel. Rev. Sci. Instr., 29, 885 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1961 года.

Замечание при корректуре. После того как данная статья была сдана в печать, в журнале Rev.Sci.Instr. 32, 2 появилась статья Пеннера, в которой рассматриваются аналогичные вопросы.