

18  
B-99

708



# ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

---

Г.Н. Вялов

708

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА  
ФОРМЫ МАГНИТА  
ПО ЗАДАННОМУ ПОЛЮ

*не т ф, 1962, т 32, с 3, с 287-293.*

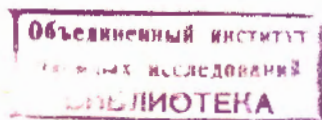
Дубна 1961 год

Г.Н. Вялов

708

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА  
ФОРМЫ МАГНИТА  
ПО ЗАДАННОМУ ПОЛЮ

Направлено в ЖТФ



### А н н о т а ц и я

В работе решается задача об определении формы одномерно намагниченных железных шимм, создающих заданную  $Z$ -компоненту магнитного поля в средней плоскости магнита. Предполагается, что шиммы накладываются на фиксированную плоскость, а их намагниченность известна. Методом последовательных приближений получено общее выражение для толщины шимм в виде суммы интегралов, зависящих от заданного поля.

Условия движения частицы в циклическом ускорителе накладывают ограничения на форму магнитного поля. Формирование магнитного поля можно осуществить выбором профиля магнитных полюсов. Форма поля в ускорителе часто бывает довольно сложной, а требования к точности воспроизведения ее — весьма высокими. Поэтому выбор нужного профиля полюсов требует длительных расчетов и моделирования. В связи с этим развитие прямых методов расчета формы магнита представляет практический интерес при проектировании ускорителей.

В настоящее время используются два метода расчета формы полюсов — метод эквипотенциальной поверхности и метод равномерного намагничивания<sup>/1,2/</sup>. Метод эквипотенциальной поверхности прямо определяет форму полюсов, как форму поверхностей равного магнитного потенциала, если задано магнитное поле в средней плоскости магнита. Возможности этого метода ограничены, так как лежащее в его основе предположение об эквипотенциальности поверхности железа нарушается с ростом поля из-за насыщения, особенно сильного на краях полюсов. Метод равномерного намагничивания не обладает этим недостатком. Напротив, его точность увеличивается с ростом поля. Однако, в том виде, в каком он до сих пор применялся, он не дает непосредственно форму полюсов, а определяет лишь поле заданного равномерно намагниченного куска железа. Поэтому целесообразно обобщить метод равномерного намагничивания, имея в виду его применение для прямого определения формы железных масс по создаваемому ими полю в средней плоскости магнита.

### 1. Формулировка метода и постановка задачи

Скалярный потенциал  $\Phi(\vec{r})$  магнитного поля, создаваемого в точке  $\vec{r}(x, y, z)$  железными массами с намагниченностью  $\vec{M}(\vec{r})$ , определяется выражением<sup>/1,2,3/</sup>

$$\Phi(\vec{r}) = \int dV' \vec{M}(\vec{r}') \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.1)$$

где интеграл берется по объему  $V$ , занимаемому железом, и

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}. \quad (1.2)$$

Если намагниченность  $\bar{M}(\bar{r})$  известна, а напряженность поля  $\bar{H}(\bar{r}) = -\text{grad } \Phi(\bar{r})$  задана на некоторой поверхности  $S'(\bar{r})$ , то уравнение (1.1) в принципе позволяет отыскать единственную границу объема  $V$ , удовлетворяющую некоторым дополнительным требованиям, которые можно сформулировать в каждом конкретном случае. Такую задачу приходится решать при отыскании профиля полюсов по магнитному полю, заданному в средней плоскости. В общем случае эта задача довольно сложна. Вместо нее мы рассмотрим несколько простых и практически важных случаев.

Типичная конструкция магнита состоит из двух плоско-параллельных полюсов, симметрично расположенных относительно средней плоскости  $Z=0$  на расстоянии  $Z_0$  от нее. При достаточно большом отношении диаметра полюсов к зазору между ними в значительной части средней плоскости получается поле, слабо неоднородное.

Магнитное поле более сложного профиля, например, с азимутальной вариацией, получается при наложении на полюса дополнительных железных шимм. Исходя из этого, нашу задачу можно сформулировать так: какова нижняя граница железных шимм

$$Z = Z_1(x, y) > 0, \quad (1.3)$$

наложенных на плоскость  $Z = Z_0$  и создающих заданное изменение  $\delta \bar{H}(x, y)$   $Z$ -компоненты  $H_z$  магнитного поля в средней плоскости, если известна намагниченность железа  $\bar{M}(\bar{r})$  (например, если железо равномерно намагничено по оси  $Z$ ).

Эта задача усложняется влиянием границ полюсов на поле намагниченных шимм, распределение которых отыскивается. Поэтому целесообразно сначала определить форму намагниченных шимм по создаваемому ими полю в отсутствие полюсов, а затем учесть их влияние. Именно этим мы и займемся в первую очередь.

Будем решать задачу в приближении одномерного намагничивания по оси  $Z$ , не зависящего от  $Z$ . В этом случае скалярный потенциал поля шимм можно представить в виде

$$\Phi(\bar{r}) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' M(x', y') \left[ \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_1|} \right], \quad (1.4)$$

где  $M(x, y) \equiv M_z(x, y)$ ,  $\bar{r}_0$  - точка на плоскости  $Z = Z_0$ ,  $\bar{r}_1$  - точка на поверхности  $Z = Z_1$ .

Если теперь перейти от скалярного потенциала  $\Phi(\bar{r})$  к  $Z$ -компоненте магнитного поля  $\delta \bar{H} = -\text{grad} \Phi$  в средней плоскости  $Z = 0$ , то получим нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $Z_1(x, y)$

$$\delta H(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' M(x', y') \left[ \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_1|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} \right) \right]_{Z=0} \quad (1.5)$$

## 2. Определение $Z_1(x, y)$ методом последовательных приближений

Уравнение (1.5) является сложным для аналитического решения. В общем случае его точное решение можно найти численно. Вместе с тем в ряде практически важных частных случаев имеется упрощающее обстоятельство, а именно, искомая толщина железного слоя

$$\Delta(x, y, z_0) = Z_0 - Z_1(x, y) \quad (2.1)$$

оказывается значительно меньше расстояния слоя от средней плоскости

$$\Delta(x, y, z_0) \ll Z_0. \quad (2.2)$$

Это обстоятельство позволяет разложить подынтегральное выражение в (1.5) в ряд по степеням

$$\frac{\Delta(x', y', z_0)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + Z_0^2}} \quad (2.3)$$

и применить к определению  $\Delta(x, y, z_0)$  метод последовательных приближений.

Предварительно преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$\varepsilon \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \mathcal{K}(x-x', y-y', z_0) f(x', y', z_0, \varepsilon) M(x', y') = \varepsilon h(x, y) + Q(x, y, \varepsilon), \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon$  - малый численный параметр, введенный нами для удобства разложения по формулам

$$\begin{aligned} \Delta(x, y, z_0) &= \varepsilon f(x, y, z_0, \varepsilon) \\ \delta H(x, y) &= \varepsilon h(x, y), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$f(x, y, z_0, \varepsilon)$  - новая неизвестная функция;

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x-x', y-y', z_0) &= \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda z_0} J_0(\lambda \rho) \\ \rho^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$J_0(\lambda \rho)$  - функция Бесселя первого рода с индексом нуля <sup>/4/</sup>

$$Q(x, y, \varepsilon) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' M(x', y') \int_0^\infty \lambda d\lambda J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda z_0} \Phi[\lambda \varepsilon f(x', y', z_0, \varepsilon)] \quad (2.7)$$

$$\Phi[\lambda \varepsilon f(x, y, z_0, \varepsilon)] = 1 + \lambda \varepsilon f(x, y, z_0, \varepsilon) - e^{\lambda \varepsilon f(x, y, z_0, \varepsilon)}, \quad (2.8)$$

причем  $Q$  является величиной порядка  $\varepsilon^2$ .

Будем теперь искать функцию  $f(x, y, z_0, \varepsilon)$  в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$f(x, y, z_0, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x, y, z_0) \quad (2.9)$$

(получив нужные нам разложения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , мы затем положим  $\varepsilon = 1$ , что эквивалентно преобразованию

$$\varepsilon^{n+1} f_n(x, y, z_0) \rightarrow f_n(x, y, z_0).$$

$n^{\text{е}}$  - приближение  $f_n(x, y, z_0)$  определяется линейным интегральным уравнением

$$h_n(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \mathcal{K}(x-x', y-y', z_0) f_n(x', y', z_0) M(x', y'), \quad (2.10)$$

где

$$h_0(x, y) = h(x, y) \quad (2.11)$$

$$h_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{\partial^{n+1} Q(x, y, \epsilon)}{\partial \epsilon^{n+1}} \right|_{\epsilon=0}, \quad n \geq 1.$$

Там, где это было необходимо, мы предполагали возможность дифференцирования под знаком интеграла, а также почленного интегрирования получающихся при разложении рядов. Это приводит к некоторым ограничениям на функцию  $f(x, y, z, \epsilon)$ , анализом которых мы заниматься не будем.

### 3. Решение интегрального уравнения для $f_n(x, y, z_0)$

Интегральные уравнения (2.10), определяющие функции  $n^{\text{е}}$  приближения к  $f(x, y, z_0, \epsilon)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), имеют универсальную форму:

$$h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \mathcal{K}(x-x', y-y', z_0) \mathcal{M}(x', y', z_0), \quad (3.1)$$

где величина

$$\mathcal{M}(x, y, z_0) = f(x, y, z_0) M(x, y) \equiv \Delta(x, y, z_0) M(x, y) \quad (3.2)$$

определяет мощность намагниченного слоя <sup>/5/</sup>. Уравнение (3.1) является линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода <sup>/6/</sup>. При соответствующих ограничениях на функцию  $\mathcal{M}(x, y, z_0)$  это уравнение решается методом Фурье <sup>/7/</sup>. Применяя к уравнению (3.1) преобразование Фурье

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dp dq h(p, q) e^{ipx+iqy}$$



$$h(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy h(x, y) e^{-ipx - iqy} \quad (3.3)$$

и т.д., получим уравнение

$$h(\rho, \varphi) = 2\pi \mathcal{K}(\rho, \varphi, z_0) \mathcal{M}(\rho, \varphi, z_0), \quad (3.4)$$

где

$$\mathcal{K}(\rho, \varphi, z_0) = \sqrt{\rho^2 + q^2} e^{-z_0 \sqrt{\rho^2 + q^2}}. \quad (3.5)$$

Определяя  $\mathcal{M}(\rho, \varphi, z_0)$  из (3.4) и производя обратное преобразование Фурье, придем к окончательному выражению для  $\mathcal{M}(x, y, z_0)$

$$\mathcal{M}(x, y, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{\lambda z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' J_0(\lambda \rho) h(x', y'). \quad (3.6)$$

В одномерном случае из (3.4) следует более простой результат

$$\mathcal{M}(x, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \frac{e^{z_0 |\rho| + ipx}}{|\rho|} \int_{-\infty}^{\infty} dx' h(x') e^{-ipx'}. \quad (3.7)$$

В полярных координатах  $(r, \varphi)$  выражение (3.6) принимает вид

$$\mathcal{M}(r, \varphi, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{\lambda z_0} \int_0^{\infty} r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' J_0(\lambda \rho) h(r', \varphi'). \quad (3.8)$$

В аксиально-симметричном случае это выражение упрощается

$$\mathcal{M}(r, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{\lambda z_0} J_0(\lambda r) \int_0^{\infty} r' dr' J_0(\lambda r') h(r'). \quad (3.9)$$

4. Представление  $\mathcal{M}(x, y, z_0)$  в виде аналитического продолжения регулярной функции

Искомая мощность намагниченного слоя  $\mathcal{M}(x, y, z_0)$  представлена в виде повторных интегралов по параметру  $\lambda$  (или  $\rho$ ) и координатам  $x, y$  (или  $r, \varphi$ ). Порядок интегрирования в этих интегралах изменить нельзя, так как интегралы

$$\int_0^{\infty} d\lambda e^{\lambda z_0} J_0(\lambda \rho) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \frac{e^{z_0 |\rho| + i\rho x}}{|\rho|} \quad \text{при} \quad z_0 > 0$$

расходятся.

Поэтому функцию  $\mathcal{M}(x, y, z_0)$  при  $z_0 > 0$  нельзя представить в компактной форме

$$\mathcal{M}(x, y, z_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \delta(x-x', y-y', z_0) h(x', y'). \quad (4.1)$$

Однако, это возможно, если  $z_0 < 0$ . При этом

$$\delta(x-x', y-y', z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\lambda e^{\lambda z} J_0(\lambda \rho) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad z < 0 \quad (4.2)$$

и

$$\mathcal{M}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь аналитические свойства  $\mathcal{M}(x, y, z)$  как функции комплексной переменной  $z$  в зависимости от условий, налагаемых на Фурье-образ  $h(\rho, \varphi)$

$$\mathcal{M}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z\sqrt{\rho^2 + \varphi^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \varphi^2}} h(\rho, \varphi) e^{i\rho x + i\varphi y}. \quad (4.4)$$

Для аналитичности  $\mathcal{M}(x, y, z)$  по  $z$  в точке  $z = z_0$  (и всюду на прямой  $\operatorname{Re} z = z_0$  и слева от нее) необходимо и достаточно, чтобы функция  $h(p, q)$  убывала на бесконечности не медленнее, чем

$$e^{-a\sqrt{p^2+q^2}}, \quad a > z_0$$

и возрастала бы в нуле по  $\sqrt{p^2+q^2}$  не быстрее, чем

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)^\alpha, \quad \alpha < 1.$$

При этих условиях интегралы для функции  $\mathcal{M}(x, y, z)$  и всех ее производных по  $z$  в области  $\operatorname{Re} z \leq z_0$  существуют и равномерно сходятся.

Поэтому функция  $\mathcal{M}(x, y, z)$  является аналитической по  $z$  всюду слева от прямой  $\operatorname{Re} z = a$  и ее значения на отрезке действительной оси  $0 < z < a$  можно получить аналитическим продолжением функции (4.3), определенной при  $z < 0$ , в область  $z > 0$ .

Аналогично, функцию

$$\mathcal{M}(x, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{z_0|p|+ipx}}{|p|} h(p), \quad z_0 > 0, \quad (4.5)$$

если она аналитична в точке  $z_0$ , можно получить аналитическим продолжением функции

$$\mathcal{M}(x, z) = -\frac{z}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^z z' dz' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x') dx'}{(x-x')^2 + z'^2}, \quad (4.6)$$

определенной при  $z < 0$ .

Следует отметить, что несмотря на кажущуюся симметрию выражений (4.3) и (4.6) относительно знака  $z$ , переход от  $z < 0$  к  $z > 0$  под знаком интеграла недопустим. В данном случае это связано с некоммутативностью операций интегрирования по координатам  $x, y$  и аналитического продолжения по  $z$ . Для иллюстрации этого рассмотрим, например, применение формулы (4.6),

Пусть

$$h(x) = \frac{1}{(x+ia)^n} + \frac{1}{(x-ia)^n}, \quad (4.7)$$

причем  $a > z_0 > 0$ ,  $n > 1$ .

Тогда

$$\mathcal{M}(x, z) = \frac{1}{2\pi i(n-1)} \left\{ \frac{1}{[x+i(a-z)]^{n-1}} - \frac{1}{[x-i(a-z)]^{n-1}} \right\}, \quad z < 0. \quad (4.8)$$

Аналитически продолжая выражение (4.8) в область  $0 < z < a$ , получим окончательный результат

$$\mathcal{M}(x, z_0) = \frac{1}{2\pi i(n-1)} \left\{ \frac{1}{[x+i(a-z_0)]^{n-1}} - \frac{1}{[x-i(a-z_0)]^{n-1}} \right\}, \quad (4.9)$$

справедливый при  $z_0 < a$ ,  $n > 1$ .

Если же с самого начала считать формулу (4.8) справедливой и в области  $z > 0$ , то для функции  $\mathcal{M}(x, z_0)$  при  $z_0 > 0$  получается выражение

$$\mathcal{M}(x, z_0) = \frac{1}{2\pi i(n-1)} \left\{ \frac{1}{[x+i(a+z_0)]^{n-1}} - \frac{1}{[x-i(a+z_0)]^{n-1}} \right\}, \quad (4.10)$$

отличающееся от правильного результата (4.9) знаком перед  $z_0$ .

### З а к л ю ч е н и е

Нами была поставлена и решена частная задача об определении формы намагниченных железных шимм по создаваемой ими  $z$ -компоненте магнитного поля в средней плоскости магнита в предположении одномерного намагничивания шимм по оси  $z$ . При этом не учитывалось влияние поля шимм на магнитное состояние полюсов магнита, т.е. по сути дела рассматривались намагниченные шиммы, находящиеся в вакууме. Оказалось, что искомое распределение намагни-

ченных шимм определяется довольно сложным нелинейным интегральным уравнением. Это уравнение решалось методом последовательных приближений. Мы не задавались целью выяснить условия сходимости развиваемого метода, а только пытались построить вычислительную схему, пригодную для практических расчетов. Было найдено, что последовательные приближения к искомой функции определяются линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Решения этого уравнения представлены в виде разложений Фурье-Бесселя и в виде аналитического продолжения интеграла от известной функции (формулы (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (4.3) и (4.6)). Эти формулы можно использовать в конкретных расчетах распределений шимм. В зависимости от характера задачи они могут быть еще упрощены. В дальнейшем необходимо будет учесть влияние полюсов на поле шимм и выяснить условия и характер сходимости рядов, получающихся в методе последовательных приближений к толщине искомого слоя.

В заключение я хочу выразить искреннюю благодарность В.В.Бабикову и И.И.Ройзену за полезную дискуссию.

#### Л и т е р а т у р а

1. В.Смайт. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М., 1954.
2. В.И.Данилов. Формирование магнитных полей для ускорителей с пространственной вариацией. Диссертация, ОИЯИ, 1959.
3. Д.А.Стрэттон. Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М-Л, 1949.
4. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций, ч.1, ИЛ, М., 1949.  
Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения ГИТТЛ, М, 1953.
5. И.Е.Тамм. Основы теории электричества, изд.пятое, ГИТТЛ, М, 1954.
6. Ф.М.Морс и Г.Фешбах. Методы теоретической физики, т.1, ИЛ, М., 1958г.
7. Е.Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ, М, 1949 г.