



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Н.Н. Говорун

686

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО РОДА
ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА
В АНТЕННЕ - ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

Н.Н. Говорун

686

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО РОДА
ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА
В АНТЕННЕ - ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

В работе излагается метод численного решения интегрального уравнения первого рода для нахождения распределения тока и его фазы в антенне-теле вращения при ее произвольном возбуждении. Приводится способ сведения интегрального уравнения для тока к алгебраической системе и алгоритмы ее решения. Для случая цилиндрической антенны с плоскими торцами на концах при возбуждении ее плоской волной и щелью конечной ширины получено численное решение уравнения для антенн разной толщины $l = \frac{4}{\alpha}$ и более тонкие l и разной длины / от $kl = \frac{\pi}{4}$ до $kl = \frac{\pi}{2}$ /.

§ 1. Исходное уравнение

В качестве исходного уравнения для численного решения берется точное интегральное уравнение для нулевой гармоники меридионального тока, полученное в работе ^{1/1} для антенны - тела вращения с импедансной поверхностью:

$$\int_{\mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \kappa^2 \Psi \right) \sin \theta' + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho' \partial z} \cos \theta' - j, i \omega \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} \right\} j(l') \rho' dl' + i \omega \varepsilon \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} E_{\theta z}' \rho' dl' = 0,$$

где $\Psi = \frac{e^{i \kappa z}}{z}$; $z = \sqrt{[\rho'(l')]^2 + (z'(l') - z(l))^2}$; θ' - угол между нормалью к поверхности антенны и осью z ; \mathcal{L} - дуга образующей антенны; l' - длина дуги по образующей от некоторой точки отсчета до точки интегрирования $N(z', \rho', \varphi')$; l - длина дуги, соответствующая точке наблюдения $M(z, \rho, \varphi)$, система координат цилиндрическая. $j(l')$ - плотность электрического тока.

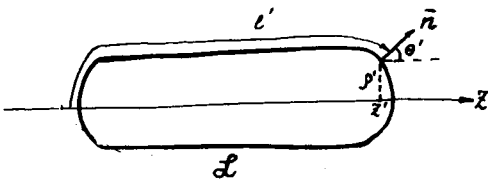


Рис. 1.

После обращения исходного уравнения ^{1/2} и введения безразмерных величин $l = \kappa l$, $l' = \kappa l'$, $z = \kappa z$, $z' = \kappa z'$ при сохранении для них прежних обозначений /индекс "1" опускаем/ получаем:

$$\int_{\mathcal{L}} K(l, l') J(l') dl' = \alpha \cos z + \beta \sin z - i \frac{z \omega \varepsilon}{\kappa} \int_0^z \sin(z-t) \int_{\mathcal{L}} E_{\theta z}' \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} \Big|_{z=t} \rho' dl' dt, \quad 1/1$$

где

$$K(l, l') = \left\{ \Psi \sin \theta' + \int_0^z \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho' \partial z} \cos \theta' - i \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} \right) \Big|_{z=t} \sin(z-t) dt \right\},$$

$$\alpha = \int_{\mathcal{L}} \Psi \Big|_{z=0} J(l') \sin \theta' dl', \quad \beta = \int_{\mathcal{L}} \Psi \Big|_{z=0} J(l') \sin \theta' dl', \quad 1/2$$

безразмерная $\alpha = j, \frac{\omega \varepsilon}{\kappa}$ характеризует величину проводимости поверхности;

$\frac{\omega \varepsilon}{\kappa} = 2,654 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{ом}}$. Если интеграл $\int_{\mathcal{L}} E_{\theta z}' dl'$ будет выражен в вольтах, то ток $J(l')$ получим в амперах.

Это уравнение имеет вид уравнения Халлена, но не тождественно ему. В точном уравнении Халлена и точка наблюдения, и точка интегрирования лежат на поверхности антенны, а ядро имеет особенность вида $\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}}$

линеаризированное же уравнение Халлена выводится приближенно. В уравнении /1/ точка интегрирования находится на поверхности антенны, а точка наблюдения - внутри нее на оси z , так что ядро $K(\rho, \rho')$ всюду непрерывно, за исключением случая, когда обе точки ρ и ρ' лежат на концах антенны.

Известно, что решение уравнения /1/ существует, и оно единственно для регулярных поверхностей в классе функций с абсолютно непрерывной первой производной^{/4/}. Можно показать, что уравнение /1/ применимо и тогда, когда E_ρ' является разрывной функцией, а поверхность имеет несглаженные уголки и ребра. Решение уравнения /1/ обращается в нуль на концах антенны^{/2/}. Предполагаем, что искомое решение является гладкой функцией. В случае, когда оно быстро меняется /возбуждение узкой щелью/, всегда можно выделить его быстро меняющуюся часть и искать из уравнения уже гладкую часть решения.

§ 2. Сведение интегрального уравнения к алгебраической системе и оценка погрешности

В этом параграфе рассматриваем способ сведения интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений, основанный на аппроксимации искомой функции с помощью некоторой линейной интерполяционной формулы, выражающей приближенное значение решения через значения решения в некоторых точках.

п. 1 Алгебраическая система уравнений

Запишем интегральное уравнение первого рода в виде

$$\int_L K(\rho, \rho') J(\rho') d\rho' = f(\rho), \quad /3/$$

или в операторной записи

$$A(\rho, J(\rho')) = f(\rho). \quad /4/$$

Пусть $J(\rho'_k)$ - значения решения уравнения /4/ в точках ρ'_k , $k = 0, 1, \dots, N$; а $J^*(\rho')$ - интерполяционная формула, выражающая приближенное решение через значения решения в точках ρ'_k . Тогда вследствие линейности $J^*(\rho')$ уравнение /4/ можно записать в виде

$$A(\ell, J^*(\ell)) = \int_{\mathcal{L}} K(\ell, \ell') J^*(\ell') d\ell' = \sum_{i=0}^N \alpha_i(\ell) J(\ell_i) = f(\ell) + \delta f(\ell), \quad /5/$$

где $\delta f(\ell) = \int_{\mathcal{L}} K(\ell, \ell') (J^*(\ell') - J(\ell_i)) d\ell'$; $\alpha_i(\ell)$ выражается в квадратурах через ядро $K(\ell, \ell')$ и его моменты. Опуская $\delta f(\ell)$ в уравнении /5/ и требуя его удовлетворения в точках ℓ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, получаем уравнение:

$$\sum_{i=0}^N \alpha_{ki} \tilde{J}(\ell_i) = f(\ell_k), \quad /6/$$

решение которого $\tilde{J}(\ell_i)$ $\alpha_{ki} = \alpha_i(\ell_k)$, дает приближенное значение для решения интегрального уравнения в точках ℓ_i .

п. 2. Оценка погрешности

Погрешность аппроксимации интегрального уравнения /3/ алгебраической системой /6/ целиком обусловлена погрешностью за счет опускания члена $\delta f(\ell)$ в правой части /5/, так как α_{ki} всегда могут быть получены с заданной точностью. Для оценки величины $\delta f(\ell)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} |\delta f(\ell)| &\leq \int_{\mathcal{L}} |K(\ell, \ell')| |J^*(\ell') - J(\ell_i)| d\ell' \leq \\ &\leq \max |J^*(\ell') - J(\ell_i)| \int_{\mathcal{L}} |K(\ell, \ell')| d\ell', \end{aligned} \quad /7/$$

т.е. погрешность аппроксимации в основном определяется гладкостью искомого решения. Это позволяет нам при гладком решении, независимо от поведения ядра, при сравнительно небольшом числе точек разбиения ℓ_k получать достаточную точность.

Предположим, что известна оценка погрешности аппроксимации $\delta f(\ell)$. Найдем погрешность в решении, полученном из системы /6/. Для точного решения в дискретных точках имеем:

$$A(\ell_k, J^*(\ell)) = \sum_{i=0}^N \alpha_{ki} J(\ell_i) = f(\ell_k) + \delta f(\ell_k). \quad /8/$$

Решение этого уравнения существует: предположим, что оно единственное, т.е. детерминант матрицы $\| \alpha_{ki} \|$ не равен нулю^{х/}. Решение системы /8/ будет

$$J(\ell_k) = A^{-1}(f(\ell_k) + \delta f(\ell_k)), \quad /9/$$

где A^{-1} - обратная матрица алгебраической системы /8/. Поскольку матрицы системы /8/ и системы /6/ одинаковы, то решение системы /6/ будет

$$\tilde{J}_k = A^{-1}(f(\ell_k)). \quad /10/$$

Вычитая далее /10/ из /9/, получаем для величины погрешности решения в точках ℓ_k :

$$\Delta J_k = J(\ell_k) - \tilde{J}_k = A^{-1}(\delta f(\ell_k)).$$

Для оценки по модулю будем иметь

$$|\Delta J_k| \leq \max |\delta f(\ell')| \frac{\sum_i |\Delta_{ki}|}{|\Delta|}, \quad \ell' \in \mathcal{L}, \quad /11/$$

где Δ_{ki} - алгебраическое дополнение элемента k -ой строки и i -го столбца детерминанта Δ матрицы системы /8/. Подставляя далее в /11/ $\delta f(\ell')$ из /7/, получим:

$$|\Delta J_k| \leq \max_{\mathcal{L}} |J''(\ell') - J'(\ell')| \int |K(\ell, \ell')| d\ell' \frac{\sum_i |\Delta_{ki}|}{|\Delta|}. \quad /12/$$

Применяя интерполяционную форму Лагранжа, получаем:

$$|J'(\ell') - J''(\ell')| \leq K_n \max |J^{(n+1)}(\ell')|, \quad \ell' \in \mathcal{L},$$

где

$$K_n = \frac{\max |(l - l_0)(l - l_1) \dots (l - l_n)|}{(n+1)!}, \quad l_0 \leq l \leq l_n.$$

Для квадратичной интерполяции с постоянным шагом Δl будет: $K_n = \frac{\Delta l^3}{9\sqrt{3}}$ формула /12/ приобретает вид

$$|\Delta J_k| \leq \max |J^{(n+1)}(\ell')| \frac{\sum_i |\Delta_{ki}|}{|\Delta|} \cdot \frac{\Delta l^3}{9\sqrt{3}} \int |K(\ell, \ell')| d\ell'.$$

Оценка погрешности /12/ неудобна тем, что величина погрешности выражается через точное решение, которое нам неизвестно. Для интегрального

^{х/} Для решаемой системы это выполняется и для довольно больших значений N .

уравнения второго рода /см. /5/ / можно исключить из оценки погрешности неизвестное точное решение. Для уравнений первого рода этого сделать не удастся. Приближенную оценку погрешности /12/ можно получить, если вместо максимальной ошибки в интерполяции для точного решения подставить оценку этой погрешности, полученную при использовании решения алгебраической системы /6/.

На практике оценку точности полученного решения будем получать путем сравнения решений, полученных для различного числа разбиений N . Будем производить также оценку константы $\frac{\sum |\Delta \kappa_i|}{|\Delta|}$ в неравенстве /12/ путем решения уравнения

$$\sum_{i=0}^n \alpha_{\kappa_i} y_i = 1.$$

Приведенный выше способ сведения интегрального уравнения к алгебраической системе уравнений подобен способу получения алгебраической системы путем замены интеграла

$$\int K(\varrho, \varrho') J(\varrho') d\varrho'$$

в исходном уравнении некоторой квадратурной формулой /см., например, /5/ /. Отличие в том, что в рассмотренном случае происходит замена интерполяционной формулой только искомого решения, интеграл от ядра вычисляется точно, а в /5/ интеграл целиком заменяется квадратурной формулой. Поэтому в оценку погрешности аппроксимации интегрального уравнения алгебраической системой /7/ будет входить только производная от решения, а в /5/ и производные от ядра уравнения. Вследствие этого, погрешность аппроксимации в нашем случае будет значительно меньше, чем при применении квадратурной формулы.

Заметим, что в случае уравнений первого рода из сильной сходимости /равномерной или в среднем/ последовательности $A(\varrho, \tilde{J}_k)$ к $A(\varrho, J(\varrho'))$ при $k \rightarrow \infty$ ^{x/}, если не накладывать специальных ограничений на класс функций, среди которых ищется решение, следует только слабая сходимость \tilde{J}_k к $J(\varrho')$. На практике это может привести к тому, что схема счета может оказаться неустойчивой. На гладкое решение уравнения /3/ при этом будет накладываться "пила" произвольной амплитуды. Однако, и это "пилообразное" решение алгебраического уравнения будет сходиться к решению интегрального уравнения, но только слабо.

^{x/} Доказательство этого, почти очевидного, утверждения см. в приложении 7 работы /7/.

В нашем случае тонких антенн алгебраические системы, получаемые из интегрального уравнения для нулевой гармоники меридионального тока /1/, будут регулярными, и процесс нахождения решения методом последовательных приближений является устойчивым.

§ 3. Решение системы алгебраических уравнений

В этом параграфе излагаются алгоритмы решения системы алгебраических уравнений и дается характеристика программы на машину "Стрела", реализующей метод нахождения тока в тонких вибраторах. Все изложение дается для случая цилиндрической антенны с плоскими торцами на концах, однако описываемые алгоритмы применимы для антенны - тела вращения произвольной формы.

п. 1. Алгебраическая система для цилиндрической антенны

В дальнейшем при нахождении зависимости распределения тока от импеданности поверхности будем пользоваться разложением решения уравнения /1/ в ряд $J(\ell, \beta_1) = J_0(\ell) + \alpha_1 J_1(\ell) + \alpha_1^2 J_2(\ell) + \dots$ по α_1 , где $J_0(\ell)$ - решение задачи для идеально проводящей поверхности, $\alpha_1 = \beta_1 \frac{\omega \ell}{K}$. Поправки на импеданс $J_1(\ell)$, $J_2(\ell)$ и т.д. находятся также из уравнения для идеально проводящей поверхности

$$\int_{\ell} K(\ell, \ell') \Big|_{\beta_1=0} J_i(\ell') d\ell' = - \int_{\ell} \frac{\partial K(\ell, \ell')}{\partial \alpha_1} \Big|_{\beta_1=0} J_{i-1}(\ell') d\ell' + \alpha \cos \chi + \beta \sin \chi$$

с правой частью

$$- \int_{\ell} \frac{\partial K(\ell, \ell')}{\partial \alpha_1} \Big|_{\beta_1=0} J_{i-1}(\ell') d\ell',$$

зависящей от предыдущей поправки J_{i-1} . Для металлических антенн, вследствие малости β_1 , и α_1 , достаточно ограничиться первым членом разложения $J_0(\ell)$.

В случае цилиндрической антенны имеем:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta' &= -1, \quad \sin \theta' = 0, \quad d\ell' = d\rho' && \text{для } 0 \leq \ell' \leq \alpha, \\
 \cos \theta' &= 0, \quad \sin \theta' = 1, \quad d\ell' = d\tilde{z}' && \text{для } \alpha \leq \ell' \leq 2L + \alpha, \\
 \cos \theta' &= 1, \quad \sin \theta' = 0, \quad d\ell' = -d\rho' && \text{для } 2L + \alpha \leq \ell' \leq 2L + 2\alpha,
 \end{aligned} \quad /13/$$

$2L$ - длина антенны, $\rho' = \rho = \alpha$ для $\alpha \leq \ell', \ell \leq 2L + \alpha$,
 α - радиус антенны, $-L \leq \tilde{z}', \tilde{z} \leq L$.

Подставляя /13/ в /1/ при $\dot{J}_1 = 0$ и интегрируя по частям по \tilde{z} , получаем уравнение для идеально проводящего цилиндра с плоскими торцами на кра-

цах:

$$\int_{-L}^L \Psi(\tilde{z}) d\tilde{z}' - \int_0^{\alpha} J_-(\rho') \int_0^{\tilde{z}} \cos(\tilde{z}-t) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} \bigg|_{\tilde{z}'=-L} d\rho' dt - \int_0^{\alpha} J_+(\rho') \int_0^{\tilde{z}} \cos(\tilde{z}-t) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} \bigg|_{\tilde{z}'=L} d\rho' dt = \alpha \cos \tilde{z} + \rho \sin \tilde{z} + f(\tilde{z}), \quad /14/$$

где $f(\tilde{z}) = -i \frac{2\tilde{z}\omega\epsilon}{\kappa} \int_0^{\tilde{z}} \sin(\tilde{z}-t) dt \int_{\tilde{z}}^{\tilde{z}'} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} \bigg|_{\tilde{z}=t} E_r \rho' d\ell'$, $J_-(\rho)$ - полный ток на левом торце, $J_+(\rho)$ - полный ток на правом торце. В качестве интерполяционной формулы $J^{\sim}(\ell')$ используем формулу квадратичной интерполяции, при помощи которой выражаем ток через его значения в $2N+1$ точках $n\Delta\tilde{z}$, где $\Delta\tilde{z} = \frac{L}{N}$, $-N \leq n \leq N$. Применим формулы с перекрытием, т.е. для нахождения значения $J(\ell')$ в интервале (z_n, z_{n+1}) используем и значение $J(\ell')$ в точке \tilde{z}_{n+2} :

$$J^{\sim}(\tilde{z}') = J_n \frac{(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+2})(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+1})}{2\Delta\tilde{z}^2} - J_{n+1} \frac{(\tilde{z}' - \tilde{z}_n)(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+2})}{\Delta\tilde{z}^2} + J_{n+2} \frac{(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+1})(\tilde{z}' - \tilde{z}_n)}{2\Delta\tilde{z}^2}, \quad /15/$$

$$\tilde{z}_n \leq \tilde{z}' \leq \tilde{z}_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-2.$$

На крайнем интервале $(\tilde{z}_{N-1}, \tilde{z}_N)$, а также на торцах антенны ток выражаем в виде:

$$J^{\sim}(\tilde{z}') = J_{N-1} + \frac{J_N - J_{N-1}}{\Delta\tilde{z}} (\tilde{z}' - \tilde{z}_{N-1}), \quad /16/$$

$$J_+(\rho') = \frac{J_N}{\alpha^2} \rho'^2. \quad /17/$$

Аналогично запишем и для отрицательных значений \tilde{z}' :

$$J^{\sim}(\tilde{z}') = J_n \frac{(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+1})(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+2})}{2\Delta\tilde{z}^2} - J_{n+1} \frac{(\tilde{z}' - \tilde{z}_n)(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+2})}{\Delta\tilde{z}^2} + J_{n+2} \frac{(\tilde{z}' - \tilde{z}_n)(\tilde{z}' - \tilde{z}_{n+1})}{2\Delta\tilde{z}^2}, \quad /18/$$

$$\tilde{z}_n \geq \tilde{z}' \geq \tilde{z}_{n+1}, \quad n = 0, -1, \dots, -N+2,$$

$$J^{\sim}(z') = J_{-N+1} - \frac{J_{-N} - J_{-N+1}}{\Delta z} (z' - z_{-N+1}), \quad /19/$$

$$J^{\sim}(\rho') = \frac{J_{-N}}{\alpha^2} \rho'^2. \quad /20/$$

Подставляя теперь интерполяционные формулы /15/-/20/ в уравнение /14/, получим алгебраическую систему для нахождения J_n ^{x/}

$$A(z_k, J^{\sim}) = \sum_{n=-N}^N J_n \alpha_{kn} = \alpha \cos z_k + \beta \sin z_k + f(z_k), \quad /21/$$

$$-N \leq k \leq N,$$

где α_{kn} выражаются в квадратурах через ядро уравнения /14/ /см. приложение 1, где даны также выражения для $f(z_k)$ /.

п. 2. Алгоритмы решения системы алгебраических уравнений

Так как α и β в системе /21/ выражаются в квадратурах через искоемое решение /см. /2/ § 1/, то систему уравнений /21/ можно было бы записать в виде /8/, включив члены с α и β в левую часть уравнения. Однако, это делать нецелесообразно, так как матрица системы /21/ для тонких антенн имеет большие диагональные и малые недиагональные элементы /система /21/ - регулярна/, что позволяет без потерь точности находить обратную матрицу системы /21/ или же, пользуясь регулярностью системы решать ее методом последовательных приближений. Включение же членов с α и β "портит" матрицу системы /21/, делает ее нерегулярной, что приводит к дополнительной потере точности при счете, и схема счета может стать неустойчивой.

Мы будем решать систему /21/ методом последовательных приближений. Оставляя справа только диагональные элементы матрицы, получаем следующую итерационную схему для решения системы:

^{x/} Значок тильда " ~ " над буквой опускаем.

$$J_K^{(i)} = \frac{1}{\alpha_{KK}} \left(- \sum_{n=-N}^N J_n^{(i-1)} \alpha_{Kn} + \alpha^{(i)} \cos z_K + \beta^{(i)} \sin z_K + f(z_K) \right), \quad /22/$$

где $\sum_{n=-N}^N$ означает, что суммирование ведется по всем n за исключением $n=K$. Далее берем в качестве нулевого приближения некоторую функцию, и процесс ведем по одному из описанных ниже способов.

Случай, когда $\cos L \neq 0$, $\sin L \neq 0$. Коэффициенты $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$ находятся из требования непрерывности производной по z' от тока на торцах антенны:

$$\frac{J_N^{(i)}}{\alpha} = \frac{J_N^{(i)} - J_{N-1}^{(i)}}{\Delta z}, \quad /23/$$

$$\frac{J_{-N}^{(i)}}{\alpha} = \frac{J_{-N}^{(i)} - J_{-N+1}^{(i)}}{\Delta z}.$$

Далее, используя $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$, находим следующее приближение для тока по формуле /22/.

Случай, когда $\cos L = 0$, $\sin L \neq 0$. Делим правую часть уравнения на $J_0^{(i-1)}$. Из формулы

$$\alpha^{(i-1)} = \int_{-L}^L \Psi / z=0 J_{i-1}^{(i-1)}(z') dz' = \sum_{n=-N}^N J_n^{(i-1)} \alpha_{0n} \quad /24/$$

находим $\frac{\alpha^{(i-1)}}{J_0^{(i-1)}}$. Считая теперь $\frac{\alpha^{(i-1)}}{J_0^{(i-1)}}$ заданным, из условий /23/ находим $\frac{\beta^{(i)}}{J_0^{(i-1)}}$ и $\frac{1}{J_0^{(i-1)}}$. Находим $\alpha^{(i)}$ по формуле $\alpha^{(i)} = \frac{J_{01}^{(i-1)}}{J_0^{(i-1)}} \alpha^{(i-1)}$. Произведем перенормировку " $i-1$ "-го приближения по формуле

$$J_{K1}^{(i-1)} = \frac{J_{01}^{(i-1)}}{J_0^{(i-1)}} J_K^{(i-1)}. \quad /25/$$

Далее, используя $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ и $J_{K1}^{(i-1)}$, находим по формуле /22/ следующее " i "-ое приближение.

Случай, когда $\sin L = 0$, $\cos L \neq 0$. Коэффициент $\beta^{(i)}$ находится по формуле

$$\beta^{(i-1)} = \int_{-L}^L \Psi_{\bar{z}}' \Big|_{\bar{z}=0} J_{i-1}(\bar{z}') d\bar{z}' \quad /26/$$

Считая $\beta^{(i)}$ известным, из условий /23/ и формулы

$$J_k^{(i)} = \frac{1}{\alpha_{kk}} \left\{ \left[J_{01}^{(i-1)} \frac{1}{J_0^{(i-1)}} \sum_{-N}^N J_n^{(i-1)} \alpha_{kn} \right] + \alpha^{(i)} \cos \bar{z}_k + \beta^{(i)} \sin \bar{z}_k + f(\bar{z}_k) \right\}$$

находим $\alpha^{(i)}$ и $J_{01}^{(i-1)}$. Произведя перенормировку предыдущего „ $i-1$ “-го приближения по формуле /25/, находим „ i “-ое приближение по формуле /22/. При счете симметричных задач для случая $\sin L = 0$ применялась более простая процедура нахождения $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$: $\beta^{(i)}$ бралось равным нулю, $\alpha^{(i)}$ находилось из одного из условий /23/.

п. 3. Схема программы на машину "Стрела"

Программа построена по блочному принципу. Блоки не имеют связей между собой, при их последовательной работе реализуется алгоритм нахождения решения уравнения /1/, описанный ранее. Составляя разные комбинации из блоков, получаем программы для решения конкретных задач /разные длины антенн, различные возбуждения, счет поправки на импеданс/. В программу входят четыре основных блока или, назовем их иначе, четыре обобщенных оператора K_1, K_2, K_3, K_4 .

Оператор K_1 служит для сведения интегрального уравнения /1/ к алгебраической системе уравнений /21/. Он вычисляет коэффициенты α_{kn} по формулам /27-30/ и записывает их на магнитную ленту.

Оператор K_2 служит для счета правых частей и их записи на магнитную ленту.

Оператор K_3 реализует алгоритм нахождения решения алгебраической системы /21/ по методу последовательных приближений. Он вызывает с магнитной ленты коэффициенты α_{kn} и правые части $f(\bar{z}_k)$, далее ведет счет по схеме, описанной в п. 2, и заканчивает его при достижении заданной точности

выдачей результатов: $J(z_k) = J_1(z_k) + iJ_2(z_k)$; $\rho = |J| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2}$; $\varphi = \arcsin \frac{J_2}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2}}$, а также входного импеданса $\frac{1}{J_0} = R + iX$. Счет заканчивается, когда величина $\frac{|\alpha^{(i+1)} - \alpha^{(i)}| + |\beta^{(i+1)} - \beta^{(i)}|}{|\alpha^{(i)}| + |\beta^{(i)}|}$ становится меньше заданного ε . Обычно бралось $\varepsilon = 10^{-4}$.

Оператор K_4 служит для организации последовательной работы операторов K_1, K_2, K_3 . Он вводит в машину данные конкретного задания для счета, а затем последовательно вызывает с магнитной ленты операторы K_1, K_2, K_3 и ведет по ним счет.

Все операторы перед началом работы настраивают себя на счет конкретного варианта задачи, определяемого значениями L - половины длины антенны, α - радиуса антенны, $N+1$ - числа точек разбиения на половине длины антенны, z_0 - точки нахождения возбуждающей щели и точностью счета интегралов. Эти данные пробиваются на отдельную перфокарту и кладутся в конце перфокарт оператора K_4 . Таким образом, для того, чтобы посчитать новый вариант задачи, достаточно лишь сменить одну карту с исходными данными задачи.

Отметим, что программа для нахождения тока в цилиндрической антенне работает по алгоритму, который пригоден и для антенны-тела вращения произвольной формы. Действительно, после того как посчитаны коэффициенты α_{kn} и $f(z_k)$, с формой антенны мы уже не имеем дела. А при счете коэффициентов α_{kn} машина хорошо считает интегралы для любых форм поверхности. Антенна была выбрана цилиндрической для того, чтобы без лишних затрат машинного времени на машине "Стрела" можно было проверить возможности описанного метода нахождения тока численным способом.

§ 4. Результаты численного решения

В этом параграфе приводятся результаты расчетов, проведенных по описанной ранее программе для случая цилиндрической антенны разной длины /от

$$kL = \frac{\pi}{4} \quad \text{до} \quad kL = \frac{7}{2} \pi \quad / \text{ и разной толщины } / \text{от} \quad \alpha = \frac{L}{6} \quad \text{до} \quad \alpha = \frac{L}{65536} /.$$

Рассматривалось возбуждение плоской волной и щелью конечной ширины. Для очень тонких антенн рассмотрено несколько случаев возбуждения бесконечно тонкой щелью^{x/}. При счете на отрезке длиной в четверть волны ($kL = \frac{\pi}{2}$) бралось от 5 до 9 точек, что обеспечивало точность конечного результата в пределах от 1 до 0,1 процента. Так для антенны с $kL = \frac{\pi}{2}$, $\frac{L}{a} = 8192$ при возбуждении ее бесконечно тонкой щелью значения входного импеданса были: а/ для 5 точек на четверть волны $Z = 73,1 - i42,1$ ома; б/ для 9 точек на четверть волны $Z = 73,5 - i42,6$ ома. Время счета одного варианта занимало от 5 до 30 минут. Значение входных импедансов для $\alpha = \frac{L}{8192}$ будет: при $kL = \frac{\pi}{2}$ $Z = 73,5 - i42,6$ ома, при $kL = \frac{3}{2} \pi$ $Z = 105,8 - i45,1$ ома.

Сравнение их с импедансами $Z_{\frac{\pi}{2}} = 73,13 - i43$ ома, $Z_{\frac{3}{2}\pi} = 105,5 - i45$ ома, полученными при помощи приближенных методов для бесконечно тонкой антенны, показывает, что результаты практически совпадают.

Зависимость же активного входного сопротивления от радиуса антенны для $kL = \frac{\pi}{2}$ и $kL = \frac{3}{2} \pi$, приведенная в работе Кинга и Блейка^{18/}, не подтверждается точным расчетом. В^{18/} активное сопротивление расчет с уменьшением радиуса антенны, точное же решение дает некоторое уменьшение входного сопротивления при уменьшении радиуса. Для $\alpha = \frac{L}{1024}$ $Z_{\frac{\pi}{2}} = 78,2 - i43,8$ ома, а $Z_{\frac{3}{2}\pi} = 110,2 - i46,8$ ома. По-видимому, это происходит потому, что полученные Кингом и Блейком данные основаны на токе, выраженном только через первый член разложения по логарифмическому параметру малости $-\frac{1}{2 \ln \frac{a}{L}}$.

Результаты расчетов при возбуждении антенны плоской волной и щелью конечной ширины приведены в виде графиков для распределения тока и фазы на поверхности антенны на рис.2 - 11.

З а к л ю ч е н и е

Применение интегрального уравнения первого рода^{1/} для численного решения по описанной схеме позволяет эффективно находить распределение то-

^{x/} Имеется в виду щель, для которой $L/d \gg 1$ и $d/a \gg 1$, где $2d$ - ширина щели. Точное решение при возбуждении математически бесконечно тонкой щелью имеет логарифмическую особенность в точке питания. Входной импеданс в этом случае равен нулю. Подробнее об этом см. /7/, /11/

При возбуждении щелью конечной ширины $E = 0$ вне щели и $E = \text{const.}$ на щели.

ка в тонкой антенне - теле вращения произвольной формы при произвольном возбуждении. Как показывают проведенные расчеты, при помощи изложенного метода удается получать решение и для довольно толстых антенн /например, до $\alpha = \frac{L}{6}$ при $\kappa L = \frac{\pi}{2}$ /. Для тонких антенн / $\kappa \alpha \leq 10^{-3}$ итерационный процесс нахождения решения сходится очень быстро / менее десяти приближений /. Т.е. при помощи уравнения первого рода /1/ можно получать решение для таких значений радиусов антенн, для которых не могут быть использованы интегральные уравнения второго рода /6,2/.

Для тонких антенн изложенный способ решения имеет преимущество и по сравнению с методом моментов, который был использован при решении задачи для цилиндрической трубы в работе /9/. В нашем случае для получения решения той же задачи требуется значительно меньше вычислений. Отметим также, что в изложенном выше методе естественно получается предельный переход к случаю бесконечно тонкой антенны, так как в основу его положен метод, развитый для нахождения приближенного решения для тонких антенн в работах /3,10/.

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность проф. А.А.Самарскому за постоянный интерес к работе при ее выполнении.

Приложение 1

Расчетные формулы

Учитывая, что коэффициенты α_{kn} , правая часть $f(z_k)$, а также решение системы /21/ являются комплексными числами, введем обозначения

$$\alpha_{kn} = \alpha_{kn}^{(1)} + i\alpha_{kn}^{(2)}, \quad \mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{1k} + i\mathcal{J}_{2k},$$

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2,$$

$$f(z_k) = f_1(z_k) + if_2(z_k),$$

и запишем систему /21/ в виде

$$\sum_{n=-N}^N (\mathcal{J}_{1n} \alpha_{kn}^{(1)} - \mathcal{J}_{2n} \alpha_{kn}^{(2)}) = \alpha_1 \cos z_k + \beta_1 \sin z_k + f_1(z_k),$$

$$\sum_{n=-N}^N (\mathcal{J}_{1n} \alpha_{kn}^{(2)} + \mathcal{J}_{2n} \alpha_{kn}^{(1)}) = \alpha_2 \cos z_k + \beta_2 \sin z_k + f_2(z_k), \quad /26/$$

где

$$\alpha_{kn}^{(i)} = \begin{cases} \phi_N'(z_n) + \operatorname{Re} K(z_n) & \text{для } k = N, \\ \phi_{N-1}(z_n) & \text{для } k = N-1, \\ \phi(z_n - j_k) & \text{для } N-2 \geq k \geq 2, \\ \phi_1(z_n) & \text{для } k = 1, \\ \phi_0(z_n) + \phi_0(-z_n) & \text{для } k = 0, \\ \phi_1(-z_n) & \text{для } k = -1, \\ \phi(-z_n - j_{|k|}) & \text{для } -N+2 \leq k \leq -2, \\ \phi_{N-1}(-z_n) & \text{для } k = -N+1, \\ \phi_N'(-z_n) + \operatorname{Re} K(-z_n) & \text{для } k = -N, \end{cases} \quad /27/$$

$$\phi_N'(z_n) = \beta(z_n, j_{N-1}) + \frac{1}{2} \gamma(z_n, j_{N-2}) - \frac{1}{2} \beta(z_n, j_{N-2}),$$

$$\phi_{N-1}(z_n) = \alpha(z_n, j_{N-1}) - \beta(z_n, j_{N-1}) - \gamma(z_n, j_{N-2}) + 2\beta(z_n, j_{N-2}) + \frac{1}{2} \gamma(z_n, j_{N-3}) - \frac{1}{2} \beta(z_n, j_{N-3}),$$

$$\phi(z_n - j_k) = \alpha(z_n, j_k) - \frac{3}{2} \beta(z_n, j_k) + \frac{1}{2} \gamma(z_n, j_k) - \gamma(z_n, j_{k-1}) +$$

$$+ 2\beta(z_n, j_{k-1}) + \frac{1}{2} \gamma(z_n, j_{k-2}) - \frac{1}{2} \beta(z_n, j_{k-2}),$$

$$\Phi_1(\bar{z}_n) = \alpha(\bar{z}_n, \zeta_1) - \frac{3}{2}\beta(\bar{z}_n, \zeta_1) + \frac{1}{2}\gamma(\bar{z}_n, \zeta_1) - \gamma(\bar{z}_n, \zeta_0) + 2\beta(\bar{z}_n, \zeta_0),$$

$$\Phi_0(\bar{z}_n) = \alpha(\bar{z}_n, \zeta_0) - \frac{3}{2}\beta(\bar{z}_n, \zeta_0) + \frac{1}{2}\gamma(\bar{z}_n, \zeta_0),$$

$$\alpha(\bar{z}_n, \zeta_k) = \int_0^{\Delta\bar{z}} \frac{\cos z}{z} dt, \quad /28/$$

$$\beta(\bar{z}_n, \zeta_k) = \frac{1}{\Delta\bar{z}} \int_0^{\Delta\bar{z}} \frac{\cos z}{z} t dt, \quad /29/$$

$$\gamma(\bar{z}_n, \zeta_k) = \frac{1}{\Delta\bar{z}^2} \int_0^{\Delta\bar{z}} \frac{\cos z}{z} t^2 dt, \quad /30/$$

$$z = \sqrt{\alpha^2 + (\bar{z}_n - \zeta_k - t)^2}; \quad \bar{z}_n = \Delta\bar{z} \cdot n; \quad \zeta_k = \Delta\bar{z} \cdot k;$$

$$K(\bar{z}_n) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^a \rho'^3 d\rho' \int_0^{\bar{z}_k} \frac{1}{z_1} \frac{d\psi}{d z_1} \cos(\bar{z}_k - t) dt;$$

$$\psi = \frac{e^{iz_1}}{z_1}; \quad z_1 = \sqrt{\rho'^2 + (t-L)^2}.$$

Формулы, выражающие $\alpha_{kn}^{(2)}$, выписывать не будем. Укажем только, что они получаются из формул для $\alpha_{kn}^{(1)}$, если в /27/ вместе $\text{Re}K(z_k)$ и $\text{Re}K(-z_k)$ подставить $\text{Im}K(z_k)$ и $\text{Im}K(-z_k)$, а в интегралах /28/, /29/, /30/ вместо $\frac{\cos z}{z}$ поставить $\frac{\sin z}{z}$.

Правая часть $f(z_k)$ для произвольного возбуждения будет

$$f(z_k) = f_1(z_k) + if_2(z_k) = -\frac{i2\pi\omega\epsilon}{K} \int_L E_\tau \rho'^2 dl' \int_0^{z_k} \sin(z_k - t) \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} \Big|_{z=t} dt. \quad /31/$$

В случае возбуждения бесконечно тонкой щелью в точке $z=0$, $E_\tau = V\delta(\rho')$, правая часть будет:

$$f(z_k) = -\frac{i2\pi\omega\epsilon V}{K} \int_0^{z_k} \sin(z_k - t) \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} dt, \quad z = \sqrt{\alpha^2 + t^2}. \quad /32/$$

Правой частью уравнения при счете поправки на импеданс будет:

$$f(z_k) = i \int_L \mathcal{J}(\rho') \rho' dl' \int_0^{z_k} \sin(z_k - t) \frac{1}{z} \frac{d\psi}{dz} \Big|_{z=t} dt. \quad /33/$$

Для очень тонких антенн $\alpha \ll 1$ можно написать приближенные выражения для правых частей:

а/ для произвольного возбуждения

$$f(z_k) \approx \frac{2\pi i \omega \epsilon}{K} \int_0^{z_k} \sin(z_k - t) E_\tau(t) \left(\frac{L - |t|}{\sqrt{\alpha^2 + (L - |t|)^2}} + 1 \right) dt, \quad /34/$$

б/ в случае возбуждения бесконечно тонкой щелью

$$f(z_k) \approx \frac{i2\pi\omega\epsilon V}{K} \sin |z_k|, \quad /35/$$

в/ для возбуждения плоской волной цилиндрической антенны с $E_\tau = E_z = E_0$:

$$f(z_k) = \frac{2\pi i \omega \epsilon E_0}{K} \int_0^{z_k} \sin(z_k - t) \left(\frac{L - t}{\sqrt{\alpha^2 + (L - t)^2}} + \frac{L + t}{\sqrt{\alpha^2 + (L + t)^2}} \right) dt + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad /36/$$

Распределение тока и фазы.

$KL = \frac{\pi}{4}$, Возбуждение плоской волной,
 $\int_{-L}^L E dx' = 1$ Вольт, p - в миллиамперах,
 φ - в радианах, $\mathcal{E} = p e^{i\varphi}$.

- ○ ○ ○ ○ $a = \frac{L}{8}$
- · — · — $a = \frac{L}{16}$
- · — · — $a = \frac{L}{32}$
- · — · — $a = \frac{L}{256}$
- $a = \frac{L}{1024}$
- $a = \frac{L}{8192}$

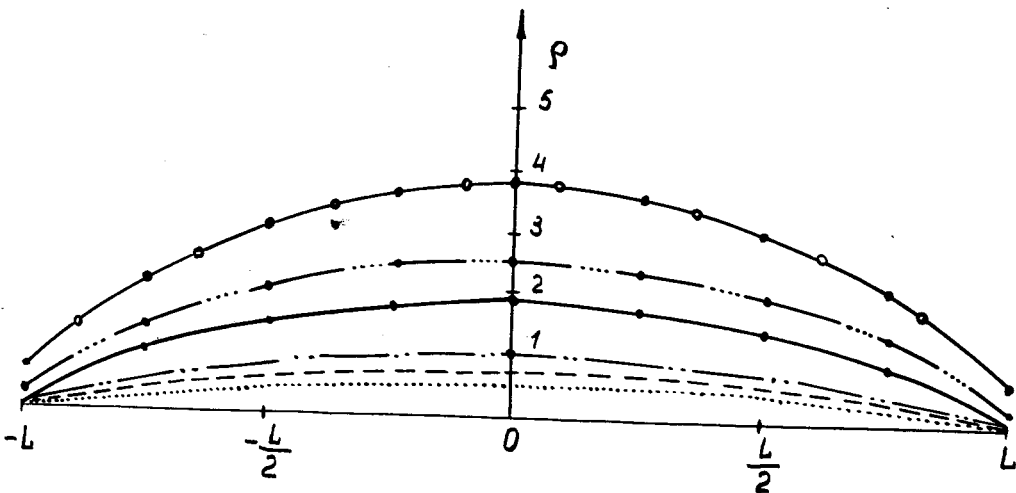
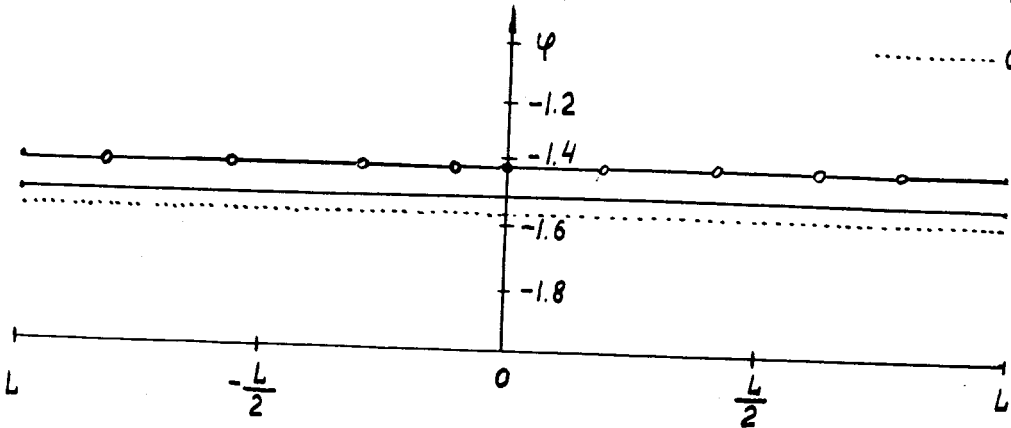


Рис. 2.

Распределение тока и фазы.

$kL = \frac{\pi}{2}$, возбуждение плоской волной,

$\int_{-L}^L E e^{i\varphi} = 1$ вольт, ρ - в миллиамперах, φ - в радианах.

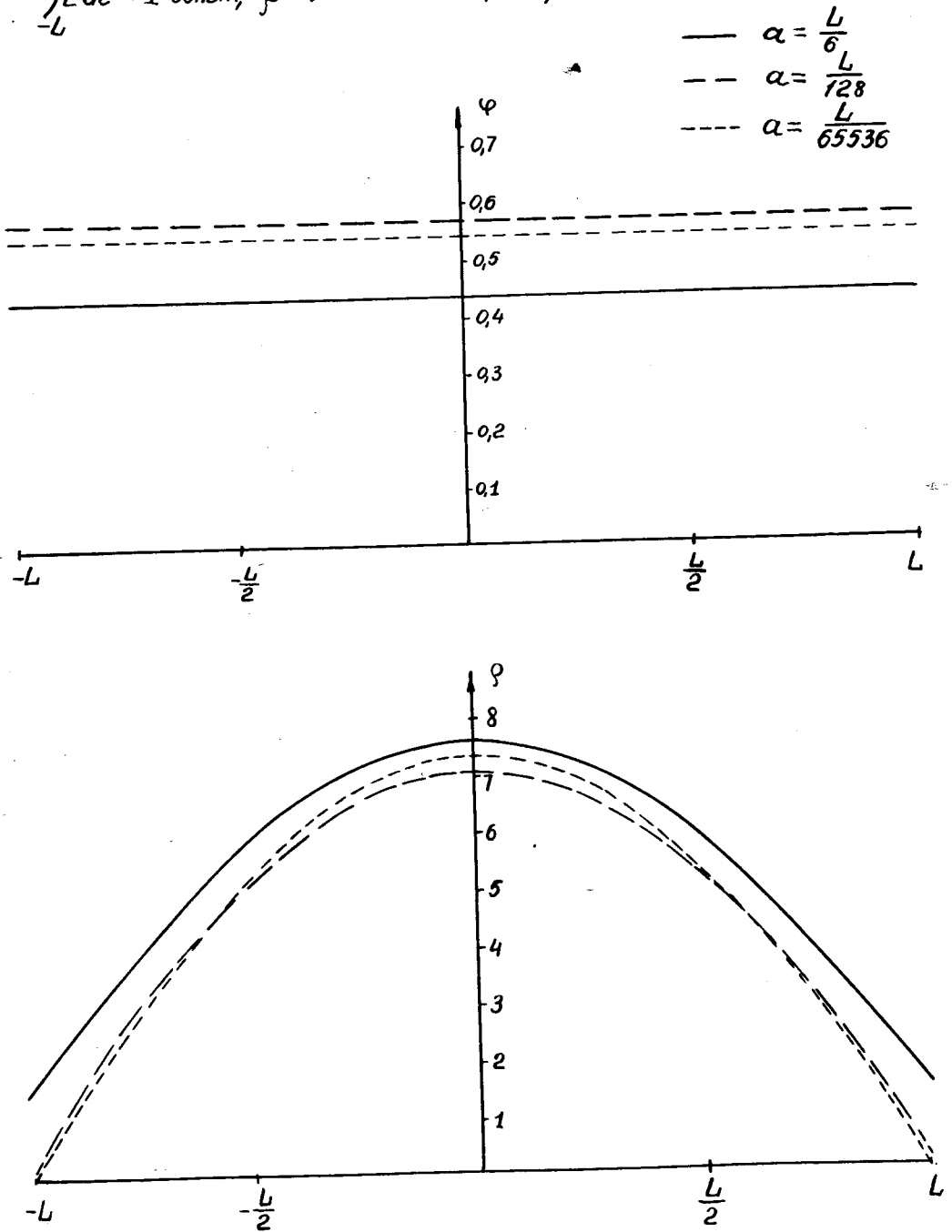


Рис. 3.

Распределение тока и фазы.

$KL = \frac{3}{2}\pi$, Возбуждение плоской волной,

$\gamma = r e^{i\varphi}$, r - в миллиамперах,

φ - в радианах, $\int_{-L}^L E e^{i\varphi} dx = 1$ вольт.

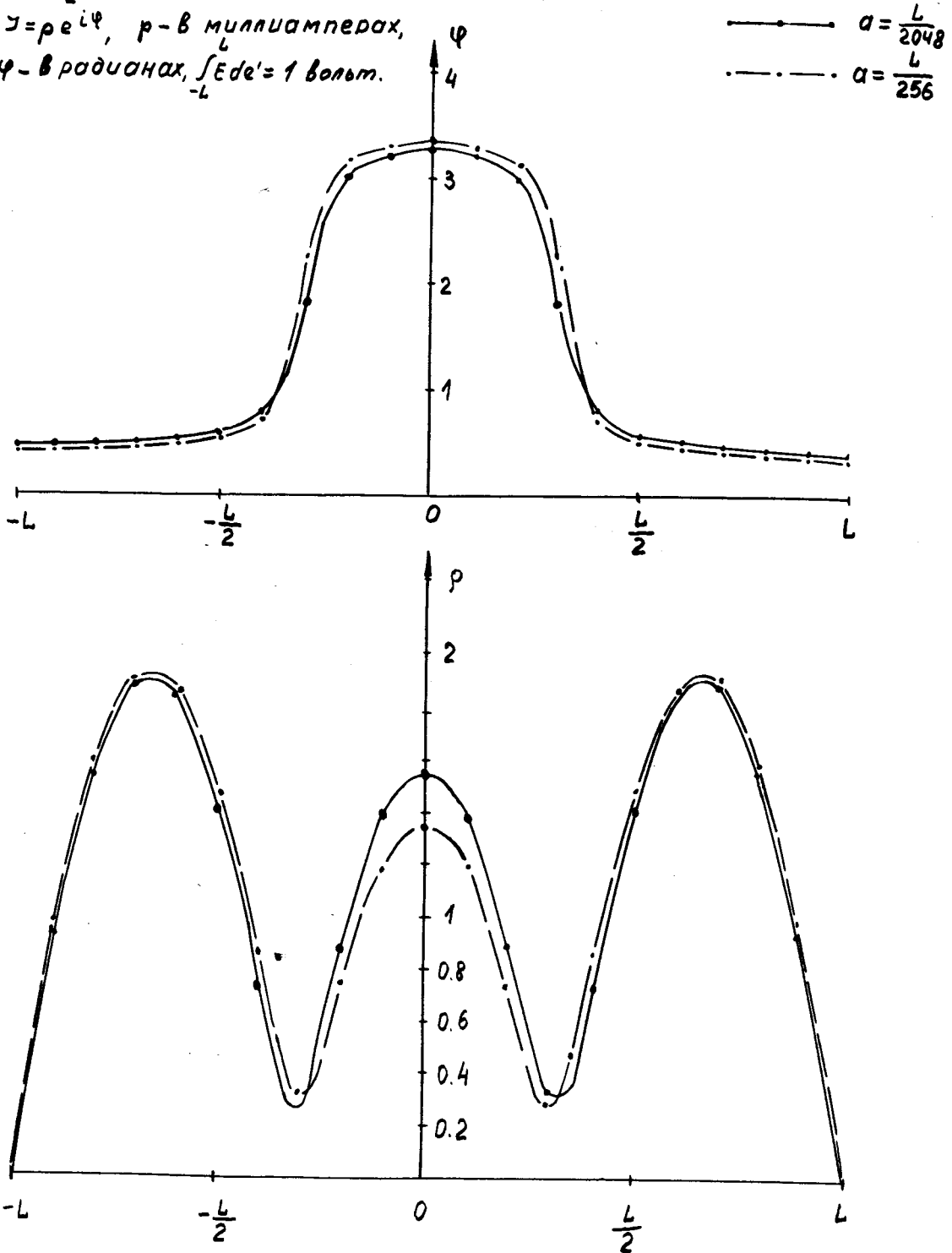


Рис. 4.

Распределение тока и фазы.

$KL = \frac{2}{\pi}$, возбуждение маски, волны, 5-го порядка, p -в миллиамперах, φ -в радианах, $a = \frac{1}{102}$, $\int_{-L}^L E d\epsilon' = 1$ вольт.

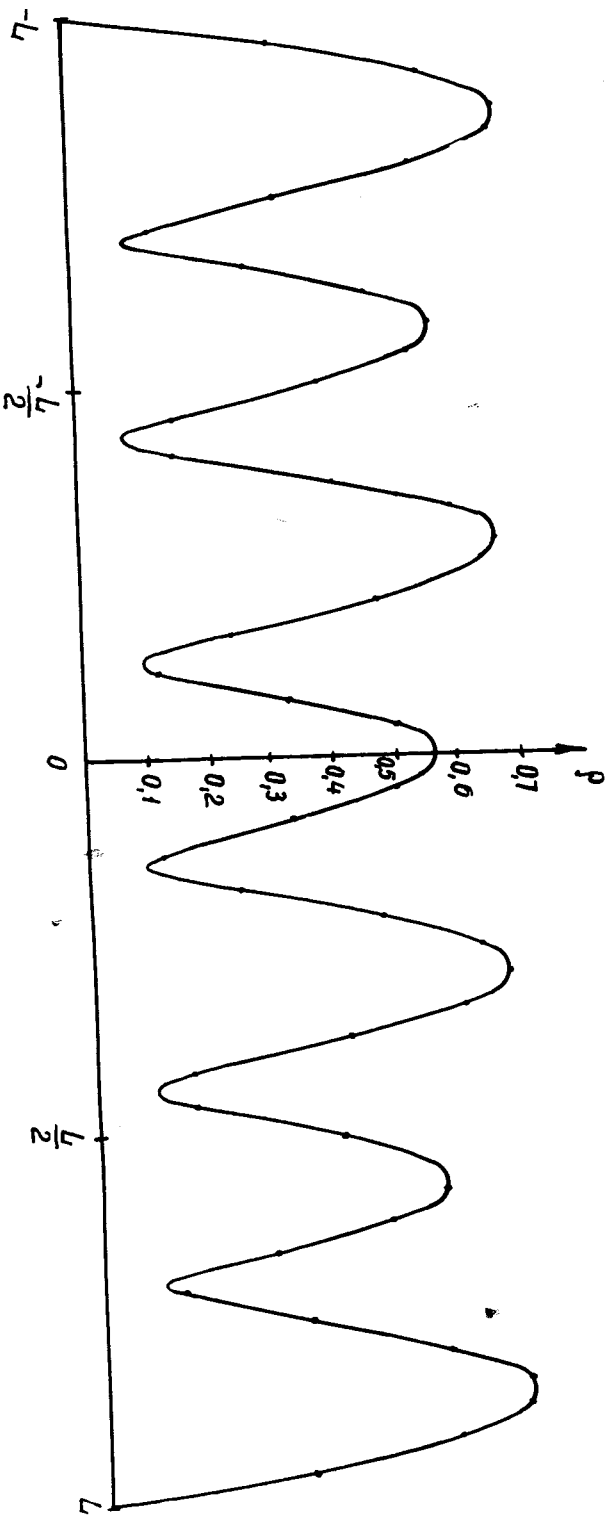
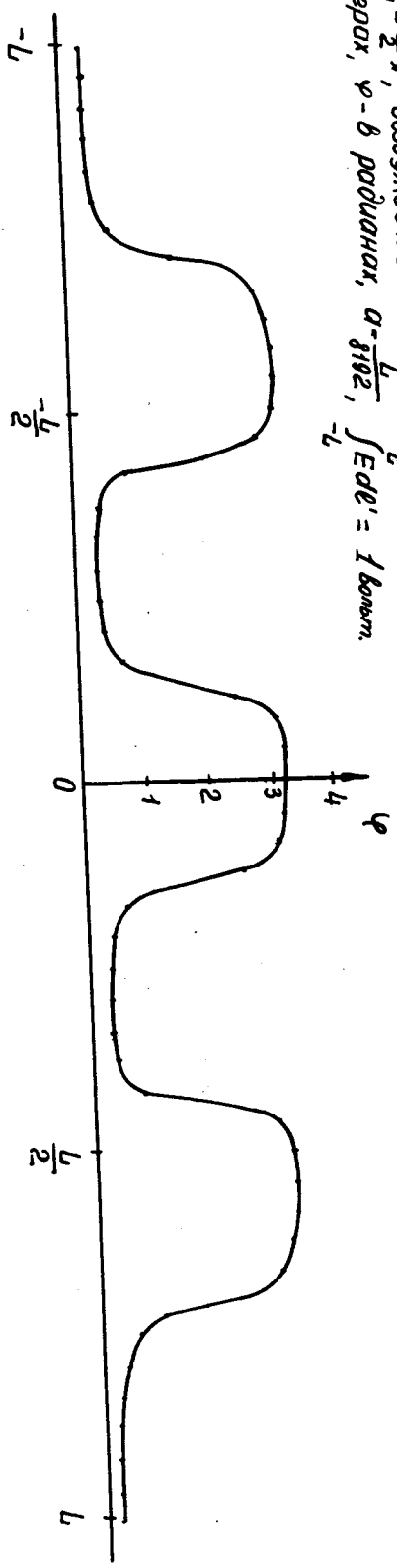


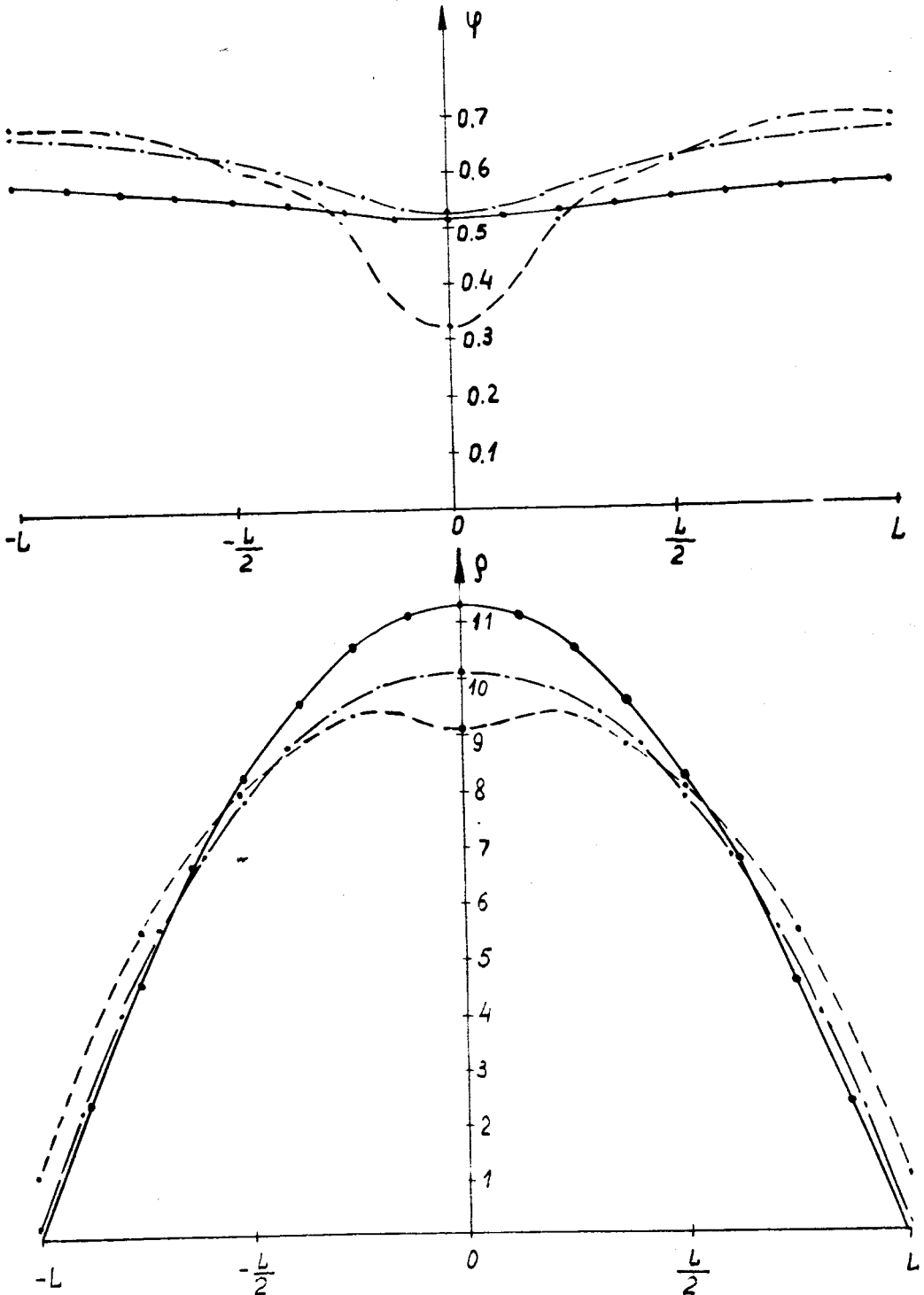
Рис. 5.

Распределение тока и фазы

$KL = \frac{\pi}{2}$, возбуждение щелью $2d = \frac{L}{4}$

$J = re^{i\varphi}$, p — в миллиамперах ч-в
радианах, $\int_{-d}^{+d} E e^{i\varphi} = 1$ вольт

—•—•—•— $a = \frac{L}{65536}$
- - - - - $a = \frac{L}{128}$
· · · · · $a = \frac{L}{16}$



Распределение тока и фазы.

$KL = \frac{3\pi}{2}$, возбуждение щелью $2d = \frac{3\pi}{8}$,

$\mathcal{U} = r e^{i\varphi}$, r - в миллиамперах, φ - в радианах,

$\int_{-d}^{+d} E' d' e^{i\varphi'} = 1$ вольт.

— $a = \frac{L}{2048}$
 - - - $a = \frac{L}{256}$

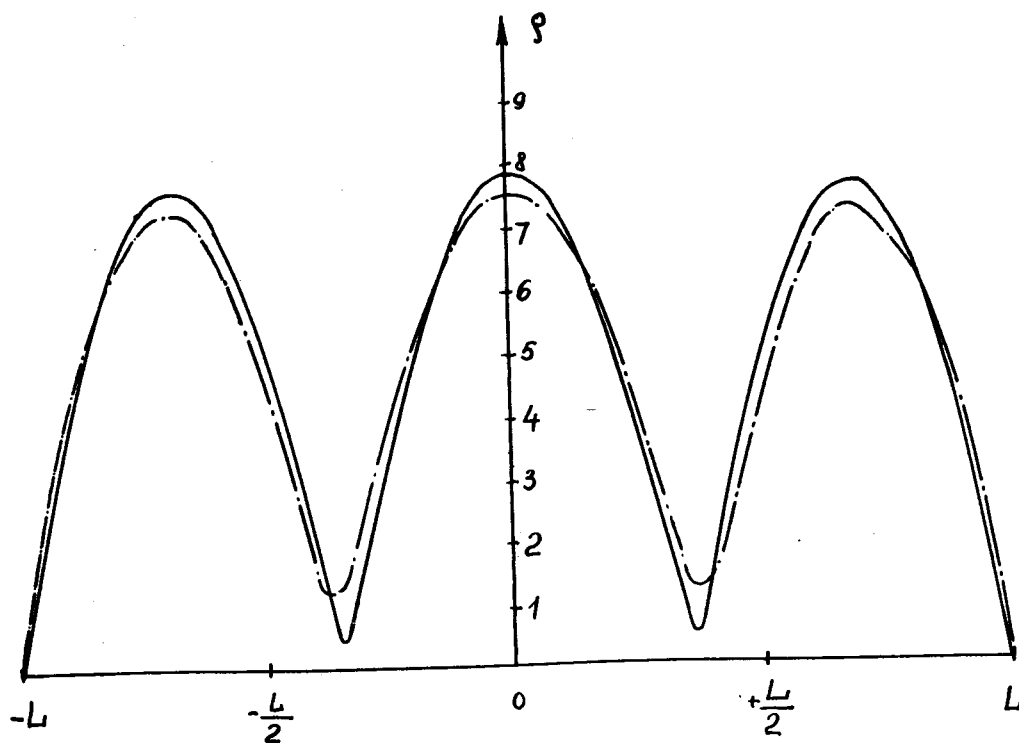
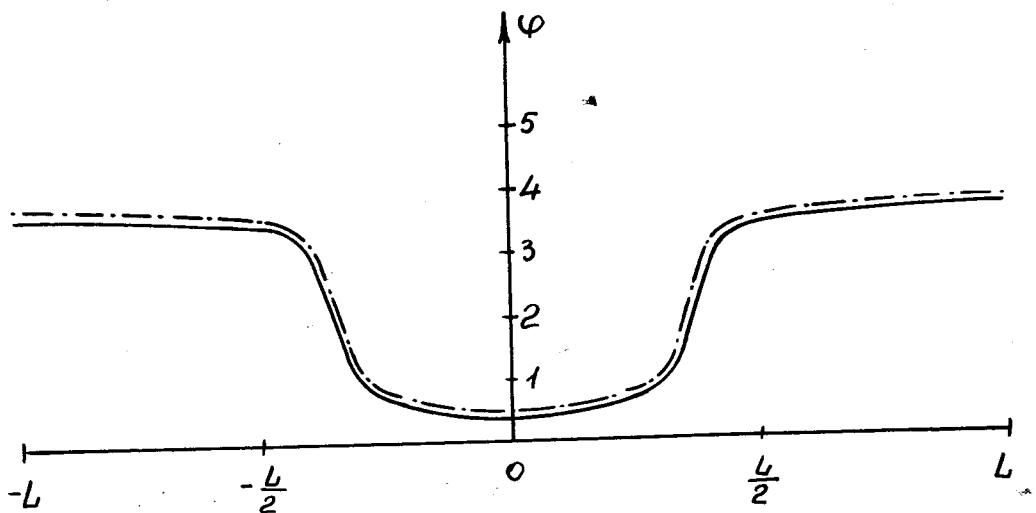


Рис. 7.

Распределение тока.

$kL = \frac{7}{2}\pi$, возбужденные щелью $2d = \frac{L}{4}$,
 $\int_{-L}^L E_{de}' = 1$ вольт. ρ - миллионперох, $\alpha = \frac{1}{8192}$.

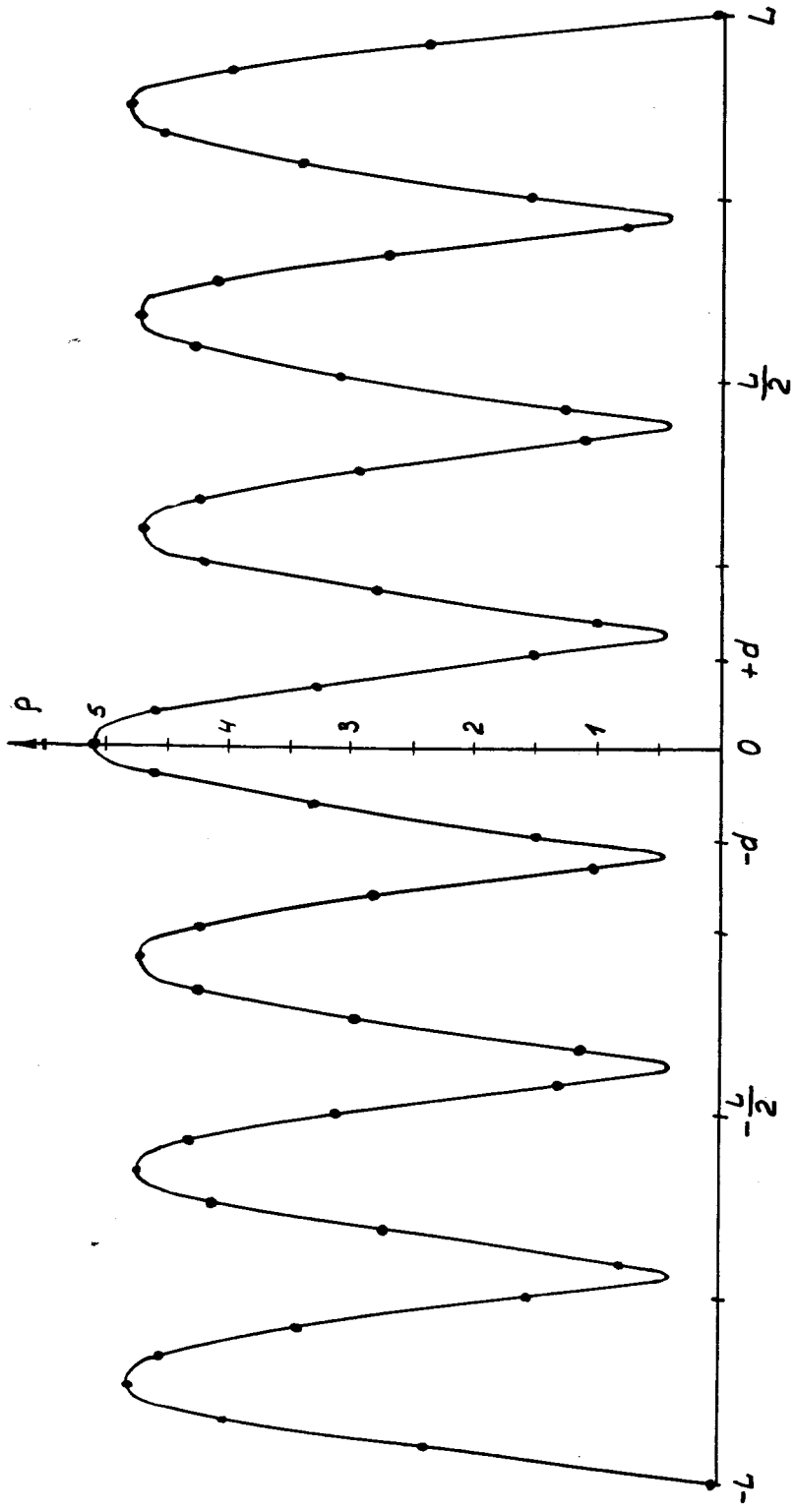


Рис. 8.

Распределение фазы.

$kL = \frac{7}{2}\pi$, Возбуждение щелью $2d = \frac{L}{4}$,

$\varphi = 6$ радиан, $\alpha = \frac{L}{8192}$.

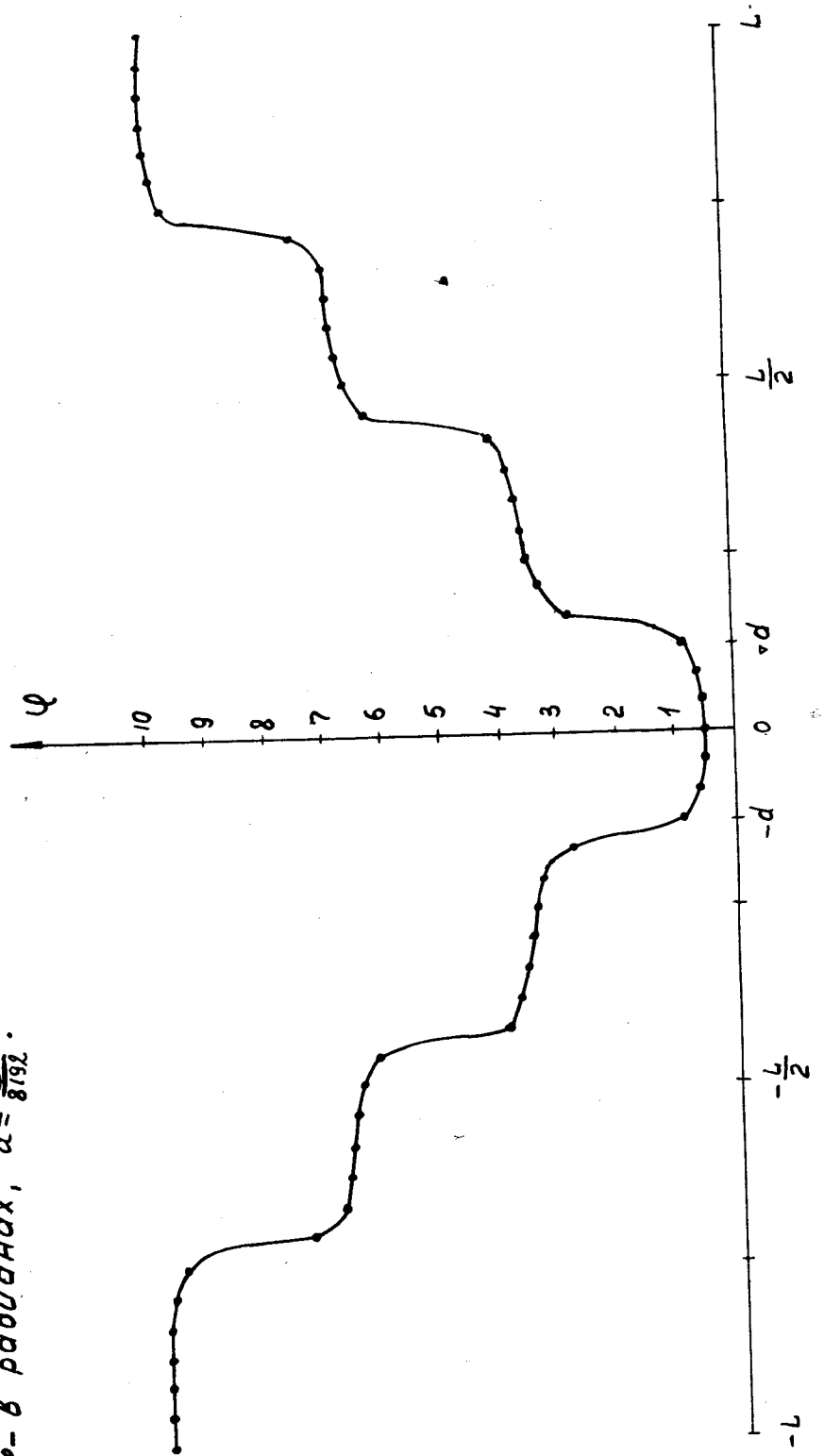


Рис. 9.

Распределение тока и фазы.

$KL = \pi$, возбуждение щелью $\frac{L}{4}$,
 $\int_{-L}^L E dy = 1$ вольт, $J = \rho e^{i\varphi}$, ρ - в миллиамперах,
 φ - в радианах, $\sigma = \frac{L}{1024}$.

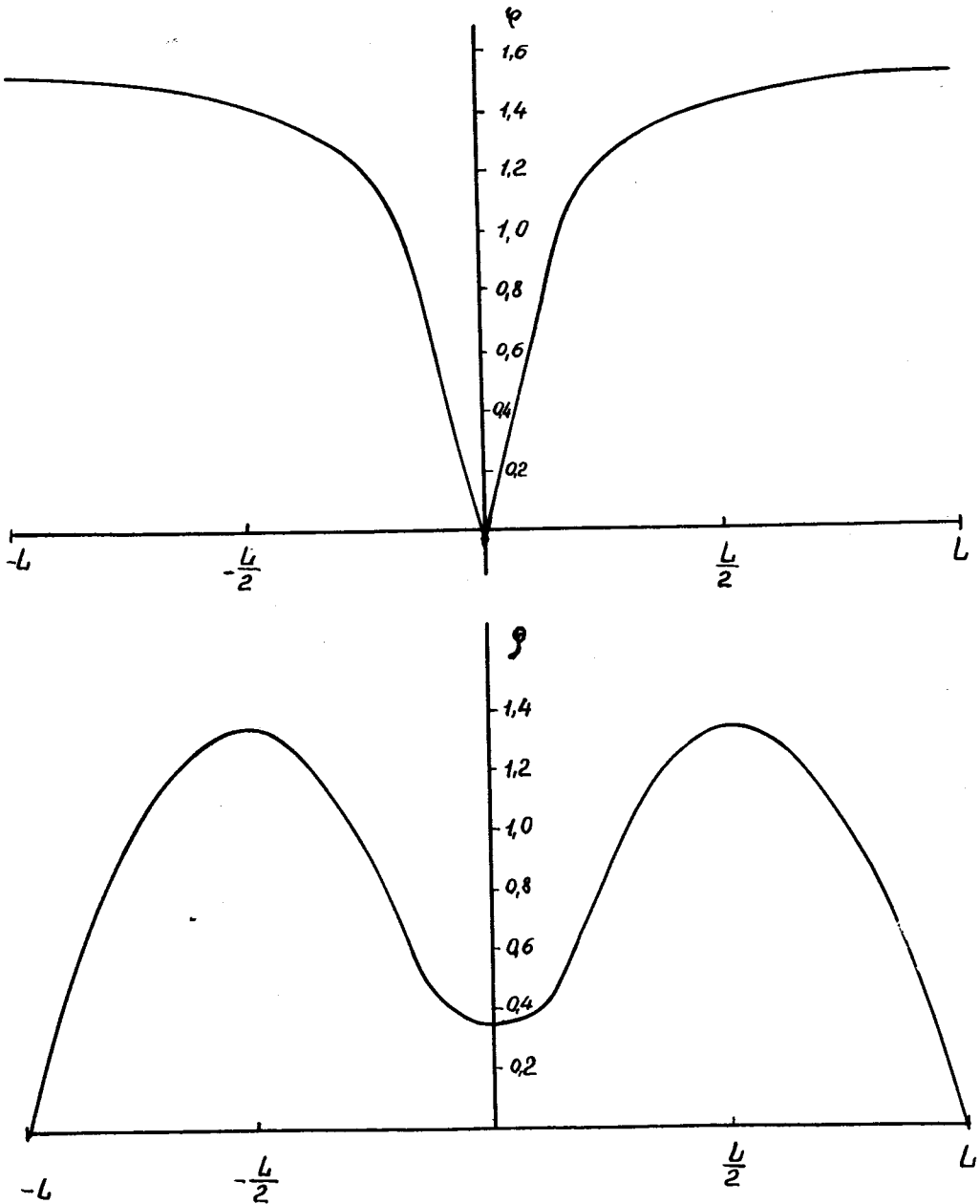


Рис. 10.

Распределение тока и фазы.

$kL = \pi$, возбуждение плоской волной,

$\int_{-L}^L E e^{i\psi} dx = 1$ вольт, $J = \rho e^{i\psi}$, ρ - в миллиметрах

ψ - в радианах, $a = \frac{L}{1024}$.

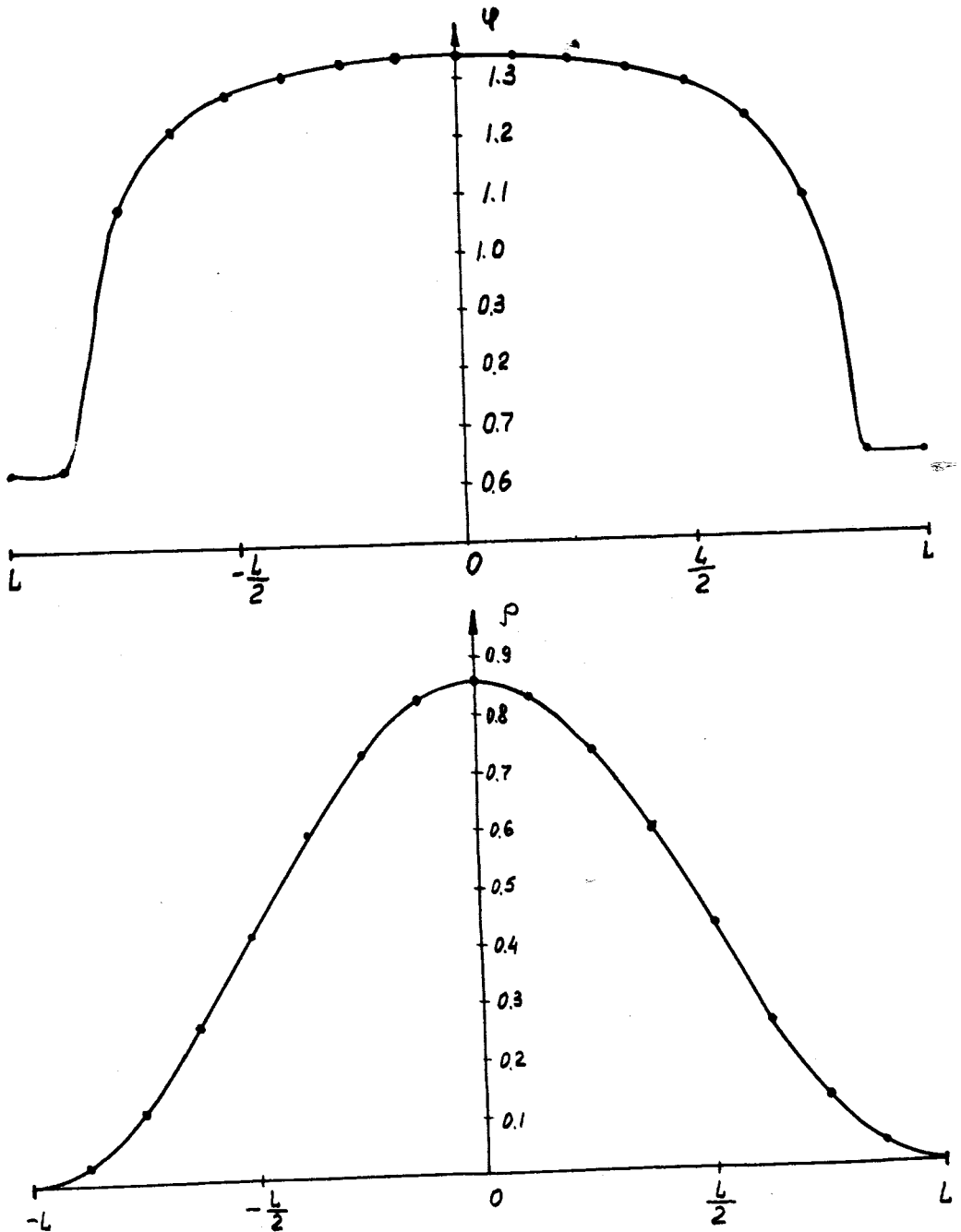


Рис. 11.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Н. Говорун. ДАН, 123, № 1 /1959/.
2. Н.Н. Говорун. НДВШ. Физико-математические науки, № 2 /1959/.
3. E. Hallen. Nova Acta (Upsala), ser. IV, 11, N.4 (1938).
4. Н.Н. Говорун, ДАН, 132, №1 /1960/.
5. Л.В. Канторович и В.И. Крылов. "Приближенные методы высшего анализа", Гостехиздат, 1952.
6. Е.Н. Васильев. Изв. ВУЗ. Радиотехника, т.2, 588 /1959/.
7. Н.Н. Говорун. "Интегральные уравнения теории антенн". Диссертация. МГУ /1961/.
8. King and Blake. P.I.R.E. 30, 335 (1942).
9. П.Л. Капица, В.А. Фок, Л.А. Вайнштейн. ЖТФ, 29, вып. 10, 1959.
10. М.А. Леонтович и М.Л. Левин. ЖТФ, 14, вып. 9 /1944/.
11. L. Infeld. Quart. Appl. Math. 5, 113 (1947).

Рукопись поступила в издательский
отдел 2 марта 1961 г.